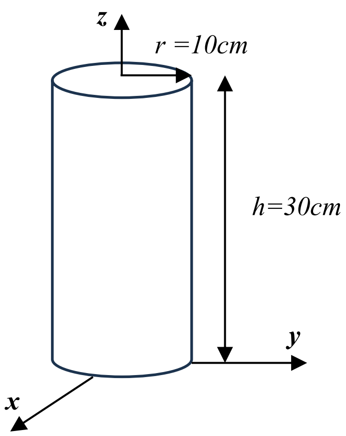
Tentamen
Vektorfält och elektromagnetisk fältteori, EEN190

Tid:	2025-03-17, kl. 8:30-13:30
Hjälpmedel:	Physics Handbook Beta Mathematics Handbook Typgodkänd kalkylator Formelsamlingar i vektorfält och elektromagnetisk fältteori. Inga andra anteckningar är tillåtna.
Förfrågningar:	Andreas Fhager
Lösningar:	Anslås på kursens hemsida senast första vardagen efter tentan.
Resultatet:	Distribueras via LADOK.
Granskning:	Plats och tid annonseras på kurshemsidan.
Om rättningen:	Svar och lösningar skall motiveras och förklaras. Skriv tydligt och förklara vad ni gör i er lösning och vilken metod som används. Poängavdrag görs för otydliga figurer och lösningar samt lösningar som inte förklaras eller motiveras. Mindre allvarliga fel och rena räknefel leder till mindre avdrag. Mer allvarliga, principiella fel och metodfel leder till större avdrag. Poängavdrag görs även för utelämnade referensriktningar, dimensionsfel och uppenbart orimliga svar.
Betygsgränser:	Betyg 3: Totalt 36, varav $\geq$ 21 på problemdelen och $\geq$ 8 på teorin Betyg 4: Totalt 48, varav $\geq$ 26 på problemdelen och $\geq$ 10 på teorin Betyg 5: Totalt 60, varav $\geq$ 31 på problemdelen och $\geq$ 12 på teorin

Lycka till!

1 (Vektorfält)

Problemlösning (12 poäng)



a. En volymladdningstäthet beskrivs av uttrycket
$\rho = 100e^{-z}(x^2 + y^2)^{-1/4}$.
Beräkna den totala laddningen inuti cylindern med radie $r = 10$ cm och höjden $h = 30$ cm placerad med sin botten på planet $z = 0$, se figuren. (4p)

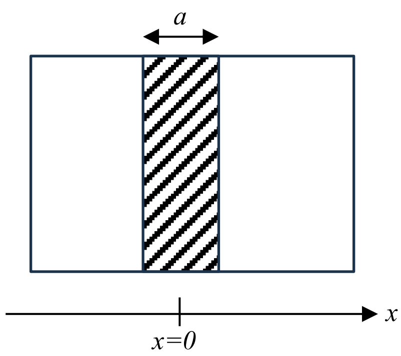
b. Visa följande räkneregler, där *f* är ett skalärt fält och ***u*** är ett vektorfält. Båda fälten är deriverbara. Gör beräkningarna med hjälp av indexnotation. (4p)
   1. $\nabla \cdot (f\boldsymbol{u}) = \nabla f \cdot \boldsymbol{u} + f\nabla \cdot \boldsymbol{u}$
   2. $\nabla \times (f\boldsymbol{u}) = \nabla f \times \boldsymbol{u} + f\nabla \times \boldsymbol{u}$

c. Ett vektorfält ges av $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{a}f$, där $\boldsymbol{a}$ är en konstant vektor, och f är ett skalärt fält. Visa följande variant på Stokes sats, ($\hat{\boldsymbol{n}}$ är normalen till ytan S) (4p):

$$\iint_S -\nabla f \times \hat{\boldsymbol{n}}\, dS = \oint_C f\, \boldsymbol{dr}$$

2 (Elektrostatik)

Problemlösning (8 poäng)



I halvledare förekommer sk PN-övergångar. I en specifik sådan PN-övergång kan potentialen beskrivas med uttrycket

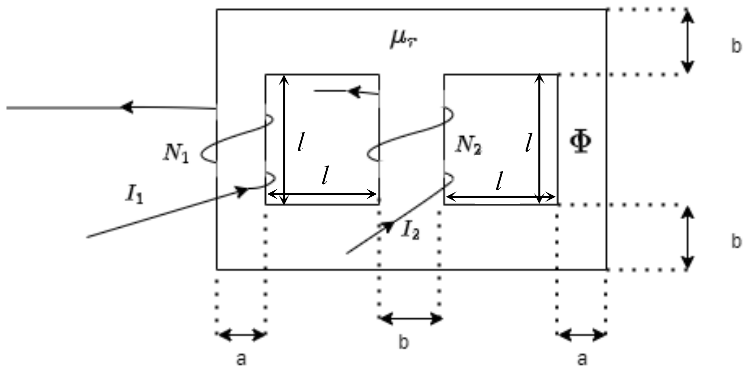
$$V(x) = \left[1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}}\right]\frac{V_0}{2}$$

Centrum av PN-övergången är lokaliserad i planet $x = 0$, PN-övergången har bredden a och V_0 är den totala potentialskillnaden mellan dess ändlägen, se figuren. (Den streckade delen visar själva PN-överången.)

a) Beräkna E-fältet i PN-övergången.
b) Finns det någon laddningstäthet i PN-övergången? Beräkna i så fall ett uttryck för denna.

3 (Magnetostatik)

Problemlösning (8 poäng)



Två spolar med strömmen I_1 respektive I_2 samt varvantal N_1 och N_2 arrangeras i en magnetisk krets enligt figuren. Strömriktningarna framgår också av figuren. Beräkna ett uttryck för storlek och riktning för det magnetiska flödet, Φ, i benet längst till höger i bilden. Antag homogena materialegenskaper i järnkärnan. Antag även att den relativa permeabiliteten är μ_r, samt att tvärsnittsarean är kvadratisk överallt, dvs är bredden b är arean b^2. Varje del av slingan har längden *l*. Eventuella förluster kan försummas.

4
Problemlösning (8 poäng)

Vi vill kunna mäta det magnetiska fältet i ett rum där man utför magnetresonanstomografi, MRI. Ett tidsvarierande B-fält genereras i MRI maskinen och kan antas utbreda sig i rummet. Fältet beskrivs som $B(t) = B_0 \sin(\omega t)$. Amplituden B_0 varierar i rummet ligger i intervallet: $0.2\,T < B_0 < 3\,T$. Frekvensen är 300 MHz. B-fältet ska bestämmas genom att mäta inducerad spänning i en cirkulär slinga. Förutsättningarna för mätningarna är följande:

- Spänning mäts i en cirkulär slinga gjord av mycket gott ledande koppartråd.
- Den minsta spänningen vi kan mäta är 0.5 mV.

a) Beräkna ett uttryck för den cirkulära slingans minsta möjliga radie som krävs för att alla värden av B_0 i intervallet $B_0 = 0.2\,T$ till $B_0 = 3\,T$ ska kunna mätas.

5
Problemlösning (8 poäng)

En våg propagerar i ett dielektriskt material som har materialegenskaperna $\mu_r = 1$, $\varepsilon_r = 9$ och $\sigma = 1$. Det magnetiska fältet för vågen är givet:

$$\boldsymbol{H} = 7\sin\left(2\pi \times 10^9 t - \beta x + \frac{\pi}{2}\right) e^{-\alpha x} \hat{y} \ \text{A/m}$$

a) Utgå från vågekvationen och Maxwells ekvationer och härled ett uttryck för α och β (antag $\beta > 0$). Beräkna därefter numeriska värden för α och β. (Att använda uttryck på α och β från formelsamlingen ger ej full poäng på uppgiften.) (4p)
b) Beräkna den tidsmedelvärdesbildade effekttätheten, dvs. tidsmedelvärdet av Poyntingvektorn. (2p)
c) Vilket villkor måste uppfyllas för att vågen ska vara en plan våg? Är vågen en plan våg? (2p)

6
Problemlösning (8 poäng)

En Hertzdipolantenn med dipolmomentet $\boldsymbol{p}(t) = \hat{z} p_0 \sin(\omega t)$ är placerad i luft i punkten $(0,0,\text{a})$ (kartesiska koordinater). I (x,y)-planet (vid z=0) ligger ett mycket stort, mycket gott ledande plan. Antag att planet befinner sig i strålningszonen till dipolen. Beräkna den inducerade ytströmtätheten som antennen orsakar i metallplanet.

7
Teori (20 poäng)

Svara kortfattat, och med motiveringar där det efterfrågas.
Inget svar behöver vara längre än max 2-3 meningar.

Elektrostatik

1. Vika förutsättningar måste vara uppfyllda för att man ska kunna använda Gauss lag för att beräkna E-fältet från en laddningstäthet.
2. Var kan det finnas nettoladdning i perfekt ledande metall? Motivera svaret.
3. Vad beskrivs mha P-fältet?
4. Hur är ekvipotentialytorna orienterade i förhållande till E.fältslinjerna.

Magnetostatik

5. Vad är grunden till definitionen av B-fältet? Motivera och förklara ditt svar.
6. Vilka postulat behövs för att beskriva magnetostatiken? Ange postulaten på så enkel form som möjligt.
7. Vad säger randvillkoret för B-fältets tangentialkomponent i en gränsyta mellan två olika magnetiska material?
8. På vilka grunder väljs $\nabla \cdot \boldsymbol{A} = 0$ i magnetostatiken? Förklara.

Dynamik

9. Vad menas med att den elektromagnetiska fältteorin är en makroskopisk teori?
10. Är B-fältet källfritt inom dynamiken, dvs då fälten är tidsberoende? Motivera svaret.
11. Vad är den fysikaliska tolkningen av egeninduktans?
12. Vad säger Lentz lag?
13. Förklara hur komplexa fält relaterar till reella tidsberoende fält?
14. Ange minst tre olika egenskaper som kännetecknar en plan våg.
15. Vad beskrivs med hjälp av grupphastigheten?
16. Vad beskrivs med hjälp av vågimpedansen i ett material?
17. Varifrån härleds Fresnells ekvationer?
18. Vad är Brewstervinkeln? Motivera hur man kommer fram till ett numeriskt värde på Brewstervinken.
19. Beskriv minst två egenskaper som kännetecknar en Hertzdipol?
20. Vad illustreras med hjälp av strålningsdiagrammet för en antenn eller antennanordning?

1 a) Volymen beskrivs enklast mha cylinderkoordinater

Introducera $r = \sqrt{x^2+y^2}$

Skriv om $\rho = 100e^{-z} r^{-1/2}$

Total laddning fås som $Q = \int_{vol} \rho \, dv$

$$Q = \int_0^{0,3}\int_0^{2\pi}\int_0^{0,1} 100e^{-z} r^{-1/2} \, r \, dr \, d\phi \, dz$$

$$= \left[\int_0^{0,3}\int_0^{2\pi} 100e^{-z} \frac{2}{3} r^{3/2} \, d\phi \, dz\right]_0^{0,1}$$

$$= \int_0^{0,3}\int_0^{2\pi} 2,1082e^{-z} \, d\phi \, dz = \int_0^{0,3} 13,2461\, e^{-z} \, dz = 3,43 \text{ C}$$

b) 1. $\nabla \cdot (f\mathbf{u}) = \frac{\partial}{\partial x_i}(fu_i) = \frac{\partial f}{\partial x_i} u_i + f \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \nabla f \cdot \mathbf{u} + f \nabla \cdot \mathbf{u}$

2. $\nabla \times (f\mathbf{u}) = [\nabla \times (f\mathbf{u})]_i = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j}(fu_k) = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial f}{\partial x_j} u_k + f\varepsilon_{ijk} \frac{\partial u_k}{\partial x_j}$

$$= [\nabla f \times \mathbf{u} + f \nabla \times \mathbf{u}]_i = \nabla f \times \mathbf{u} + f \nabla \times \mathbf{u}$$

c) Stokes sats säger $\iint_S \nabla \times \mathbf{u} \cdot d\mathbf{S} = \oint_C \mathbf{u} \cdot d\mathbf{r}$ (också vanligt att skriva $d\mathbf{r} = d\mathbf{l}$)

Vi sätter nu in $\mathbf{u} = \mathbf{a}f$ och ser vad det ger

$$\iint_S \nabla \times \mathbf{u} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \nabla \times \mathbf{a}f \cdot d\mathbf{S} = \iint_S (\nabla f \times \mathbf{a} + f \nabla \times \mathbf{a}) \cdot d\mathbf{S} = \left\{ \mathbf{a}\text{-konstant} \Rightarrow \nabla \times \mathbf{a} = 0 \right\}$$

$$= \iint_S \nabla f \times \mathbf{a} \cdot d\mathbf{S} = \mathbf{a} \cdot \left(\iint_S -\nabla f \times \hat{n} \, dS\right) \{\text{där } d\mathbf{S} = \hat{n}\, dS\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{a} \times \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c} \\ \text{och} \\ \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c} = -\mathbf{b} \cdot \mathbf{a} \times \mathbf{c} \end{array} \right\}$$

$$= \oint_C \mathbf{a}f \cdot d\mathbf{r} = \mathbf{a} \cdot \left(\oint_C f \, d\mathbf{r}\right)$$

$$\Rightarrow \iint_S -\nabla f \times \hat{n} \, dS = \oint_C f \, d\mathbf{r}$$

2 a) Följande potential är given:

$$V(x) = \left[1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}\right]\frac{V_0}{2}$$

E-fältet beräknas som $\mathbb{E} = -\nabla V$ eftersom potentialen bara har ett x-beroende fås

$$E_x = -\frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{V_0}{2}\left[\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}} - \frac{x^2}{(x^2+a^2)^{3/2}}\right] =$$

$$= -\frac{V_0}{2}\frac{x^2+a^2-x^2}{(x^2+a^2)^{3/2}} = -\frac{V_0}{2}\frac{a^2}{(x^2+a^2)^{3/2}}$$

b) Det kan möjligen finnas en rymdladdningstäthet. Den fås genom beräkning mha postulatet, Gauss lag:

$$\rho_v = \varepsilon_0 \nabla \cdot \mathbb{E} = \left\{\begin{matrix}\text{enbart} \\ \text{x-komponent}\end{matrix}\right\} = \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial x} E_x =$$

$$= -\frac{V_0}{2}\varepsilon_0 a^2 \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{(x^2+a^2)^{3/2}}\right] = -\frac{V_0}{2}\varepsilon_0 a^2\left(\frac{-3}{2}\right)\frac{2x}{(x^2+a^2)^{5/2}}$$

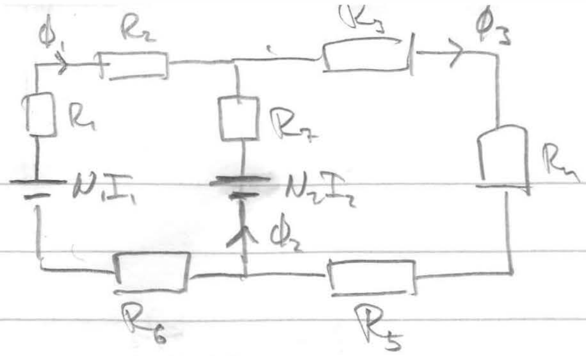
$$= \frac{3V_0\varepsilon_0}{2}\frac{a^2 x}{(x^2+a^2)^{5/2}}$$

Vi har alltså en rymdladdningstäthet i PN-övergången som beror av x-koordinaten.

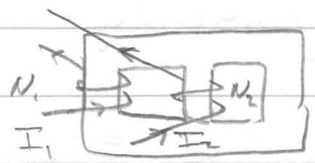
Sol.

Extended solution. Not needed for full points

3



Equivalent circuit



We want Φ_3 size and direction.

By right-hand rule we have direction of Φ_1 and Φ_2 => Φ_3 can only go as above.

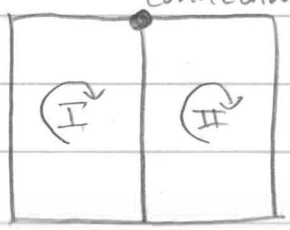
Size is found by solving the above circuit, using

$$\sum_j N_j I_j = \sum_k R_k \Phi_k$$

Reluctance

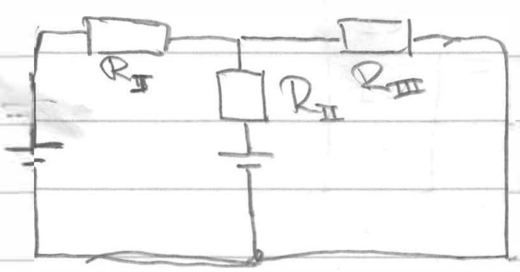
$$R_k = \frac{1}{\mu} \frac{l_k}{A_k}, \quad \mu = \mu_0 \mu_r$$

connection point



We look at 2 closed path's I & II and connection point

We also use series in recistance: $R = R_1 + R_2 + \dots$ to transform above circuit to:



with $R_I = R_1 + R_2 + R_6$

$R_{II} = R_7$

$R_{III} = R_3 + R_4 + R_5$

Note that the simplification is realized before making it into an equivalent circuit.

By geometry:

$$R_1 = R_4 = \frac{1}{\mu}\frac{l}{a^2}$$

$$R_2 = R_3 = R_5 = R_6 = \frac{1}{\mu}\frac{l+a+b/2}{b^2}$$

$$R_7 = \frac{1}{\mu}\frac{l}{b^2}$$

$$\Rightarrow R_I = \frac{1}{\mu}\left(\frac{l}{a^2} + 2\frac{l+a+b/2}{b^2}\right)$$

$$R_{II} = \frac{1}{\mu}\frac{l}{b^2}$$

$$R_{III} = \frac{1}{\mu}\left(\frac{l}{a^2} + 2\frac{l+a+b/2}{b^2}\right)$$

Let $R' = R_I = R_{III}$

Start at connection point:

Loop I: $\Phi_2 R_{II} - N_2 I_2 + N_1 I_1 - \Phi_1 R' = 0$

$$\Rightarrow \Phi_1 R' - \Phi_2 R_{II} = \underbrace{N_1 I_1 - N_2 I_2}_{:= \xi_I}$$

Loop II: $-\Phi_3 R' + N_2 I_2 - \Phi_2 R_{II} = 0$

$$\Rightarrow \Phi_2 R_{II} + \Phi_3 R' = \underbrace{N_2 I_2}_{:= \xi_{II}}$$

Connection point: $\Phi_1 + \Phi_2 - \Phi_3 = 0$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} R' & -R_{II} & 0 \\ 0 & R_{II} & R' \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_I \\ \xi_{II} \\ 0 \end{bmatrix}$$

With $\Phi_2 = \Phi_3 - \Phi_1$

I $\quad \Phi_1 R' - (\Phi_3 - \Phi_1) R_{\mathrm{II}} = \xi_{\mathrm{I}}$

$$\Rightarrow \Phi_1 \underbrace{(R' + R_{\mathrm{II}})}_{= R''} - \Phi_3 R_{\mathrm{II}} = \xi_{\mathrm{I}} \qquad (*)$$

II $\quad (\Phi_3 - \Phi_1) R_{\mathrm{II}} + \Phi_3 R' = \xi_{\mathrm{II}}$

$$\Rightarrow \Phi_3 (R' + R_{\mathrm{II}}) - \Phi_1 R_{\mathrm{II}} = \xi_{\mathrm{II}}$$

$$\Leftrightarrow \Phi_3 R'' - \Phi_1 R_{\mathrm{II}} = \xi_{\mathrm{II}} \qquad (**)$$

$$(*) \Rightarrow \Phi_1 = (\xi_{\mathrm{I}} + \Phi_3 R_{\mathrm{II}}) / R''$$

$$\Rightarrow (**) \Rightarrow \Phi_3 R'' - (\xi_{\mathrm{I}} + \Phi_3 R_{\mathrm{II}}) \frac{R_{\mathrm{II}}}{R''} = \xi_{\mathrm{II}}$$

$$\Phi_3 \frac{R''^2 + R_{\mathrm{II}}^2}{R''} = \xi_{\mathrm{II}} + \frac{R_{\mathrm{II}}^2}{R''} \xi_{\mathrm{I}}$$

$$\Rightarrow \Phi_3 = \left(\xi_{\mathrm{II}} + \frac{R_{\mathrm{II}}^2}{R''} \xi_{\mathrm{I}}\right) \frac{R''}{R''^2 + R_{\mathrm{II}}^2}$$

With $\xi_{\mathrm{I}} = N_1 I_1 - N_2 I_2$, $\xi_{\mathrm{II}} = N_2 I_2$

$R_{\mathrm{II}} = R_7 = \frac{1}{\mu} \frac{l}{b^2}$

$R'' = R' + R_{\mathrm{II}}$, $R' = \frac{1}{\mu}\left(\frac{l}{a^2} + 2\frac{l + a + b/2}{b^2}\right)$

4

Från frågan får vi att

$$B(t) \; = \; B_0 \; * \; sin(\omega t).$$

Vi använder formeln för magnetisk flöde i ledaren:

$$\Phi(t) = \int \boldsymbol{B} \; \cdot d\boldsymbol{S} = B(t) * \pi \, R^2$$

där R är radien hos den cirkulära slingan.

Faraday's lag ger då att den inducerade spänningen är

$$V_{ind}(\mathrm{t}) \; = \; -\frac{\partial \Phi}{\partial \mathrm{t}} = \; - \; \pi R^2 B_0 \omega \cos{(\omega t)}$$

vilket resulterar i en maximal momentan inducerad spänning (amplitud V_0)

$$\mathrm{V}_0 \; = \; \pi R^2 B_0 \omega$$

$$\therefore \;\; \mathrm{R} = \left(\frac{\mathrm{V}_0}{\pi B_0 \omega}\right)^{1/2}$$

Den minsta spänning vi kan mäta är 0.5 mV, vilket betyder att vi behöver säkerställa att radien är tillräckligt stor för att kunna uppfatta den minsta spänningen. Med andra ord, vi vill ha $V_0 \geq 0.5 \; mV$. Gör nu beräkningen vid $V_0 = 0.5 \; mV$:

För $B_0 = 0.2 \; T \;\; \rightarrow R \; = \; \left(\frac{0.5*10^{-3}}{\pi*0.2*300*10^6}\right)^{1/2} \; \mathrm{m} = 1{,}63 \; \mu\mathrm{m}$

För $B_0 = 3 \; T \;\; \rightarrow R \; = \; \left(\frac{0.5*10^{-3}}{\pi*3*300*10^6}\right)^{1/2} \; \mathrm{m} = \; 0{,}42 \; \mu\mathrm{m}$

Vi noterar att radien är mindre för det högre magnetfältet B.

För att uppfylla kraven att kunna mäta alla B_0 med samma utrustning krävs då att vi använder oss utav radien som gavs av det svagaste B-fältet, alltså slingan med den största radien.

Uppmätt spänning, V, i intervallet $0.2 < B_{max} < 3$ med den största spolen (med radie $1{,}63 \; \mu\mathrm{m}$) blir således: $0.5 \; \mathrm{mV} < V_0 < 7.5 \; \mathrm{mV}$.

Uppgift 5

$\mu_r = 1$

$\varepsilon_r = 9$

$\sigma = 1$

$$\mathbb{H} = 7 \sin(2\pi \cdot 10^9 t - \beta x + \tfrac{\pi}{2}) e^{-\alpha x} \hat{y}$$

a. Börja med att skriva om $\mathbb{H}$-fältet

$$\mathbb{H} = 7 \sin(2\pi \cdot 10^9 t - \beta x + \tfrac{\pi}{2}) e^{-\alpha x} \hat{y} =$$

$$= 7 \cos(2\pi \cdot 10^9 t - \beta x) e^{-\alpha x} \hat{y} =$$

$$= \mathrm{Re}\left\{ 7 e^{-(\alpha + j\beta)x} e^{j 2\pi \cdot 10^9 t} \hat{y} \right\}$$

$$\Longrightarrow \bar{\mathbb{H}} = 7 e^{-(\alpha + j\beta)x} \hat{y}$$

Vågekvationen:

$$\nabla^2 \bar{\mathbb{E}} - \gamma^2 \bar{\mathbb{E}} = 0$$

Maxwells ekvationer:

$$\nabla \times \mathbb{H} = \mathbb{J} + \frac{\partial \mathbb{D}}{\partial t}, \quad \mathbb{J} = \sigma \mathbb{E} \quad \text{(Ohms lag)}$$

$$\mathbb{D} = \varepsilon \mathbb{E}$$

I phasor-notation:

$$\nabla \times \bar{\mathbb{H}} = \sigma \bar{\mathbb{E}} + j\omega\varepsilon \bar{\mathbb{E}}$$

$$\Longrightarrow \bar{\mathbb{E}} = \frac{1}{\sigma + j\omega\varepsilon} \nabla \times \bar{\mathbb{H}} = \frac{1}{\sigma + j\omega\varepsilon} \frac{\partial}{\partial x}\left(7 e^{-(\alpha + j\beta)x} \hat{z}\right) =$$

$$= \frac{1}{\sigma + j\omega\varepsilon} \cdot -7(\alpha + j\beta) e^{-(\alpha + j\beta)x} \hat{z}$$

Skriv om vågekvationen

$$\nabla^2 \bar{E} - \gamma^2 \bar{E} = -\nabla \times \nabla \times \bar{E} - \gamma^2 \bar{E} =$$

$$= \left\{ \text{Maxwell } \nabla \times \bar{E} = -j\omega\mu \bar{H} \right\} =$$

$$= j\omega\mu \, \nabla \times \bar{H} - \gamma^2 \bar{E} = j\omega\mu(\sigma + j\omega\varepsilon)\bar{E} - \gamma^2 \bar{E}$$

$$\Longrightarrow \quad j\omega\mu(\sigma + j\omega\varepsilon)\bar{E} = \gamma^2 \bar{E}$$

$$j\omega\mu(\sigma + j\omega\varepsilon) = (\alpha + j\beta)^2$$

$$\underbrace{j\omega\mu(\sigma + j\omega\varepsilon)}_{= -\omega^2\mu\varepsilon\left(1 - j\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)} = \alpha^2 - \beta^2 + 2j\alpha\beta \qquad (*)$$

Re $\{(*)\}$ ger en relation för α o β

$$\Longrightarrow \quad \alpha^2 - \beta^2 = -\omega^2\mu\varepsilon$$

Absolutbeloppet $|(*)|$ ger en andra relation för α o β

$$\Longrightarrow \quad \alpha^2 + \beta^2 = \omega^2\mu\varepsilon\sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\omega^2\varepsilon^2}}$$

Adderas ekvationerna fås till slut

$$\alpha = \omega\sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2}\left[\sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\omega^2\varepsilon^2}} - 1\right]}$$

$$\beta = \omega\sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2}\left[\sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\omega^2\varepsilon^2}} + 1\right]}$$

Insättning av värden ger numeriskt

$$\alpha \approx 53{,}8$$

$$\beta \approx 87{,}1$$

b. Tidsmedelvärdet av Poyntingvektorn ges av

$$S_{av} = \frac{1}{2} \mathrm{Re}\{ \bar{E} \times \bar{H}^* \} =$$

$$= \frac{1}{2} \mathrm{Re}\left\{ - \frac{7(\alpha + j\beta)}{\sigma + j\omega\varepsilon} e^{-(\alpha+j\beta)x} \hat{z} \times \hat{y}\, 7 e^{(-\alpha+j\beta)x} \right\} =$$

$$= \frac{1}{2} \mathrm{Re}\left\{ -(-\hat{x}) \frac{49(\alpha+j\beta)}{\sigma + j\omega\varepsilon} e^{-2\alpha x} \right\} =$$

$$= \frac{1}{2} \mathrm{Re}\left\{ \hat{x} \frac{49(\alpha + j\beta)(\sigma + j\omega\varepsilon)}{\sigma^2 - (\omega\varepsilon)^2} e^{-2\alpha x} \right\} =$$

$$= \frac{1}{2} \mathrm{Re}\left\{ \hat{x} \frac{49(\alpha\sigma + j\alpha\omega\varepsilon + j\beta\sigma - \beta\omega\varepsilon) e^{-2\alpha x}}{\sigma^2 - (\omega\varepsilon)^2} \right\} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{49(\alpha\sigma - \beta\omega\varepsilon)}{\sigma^2 - (\omega\varepsilon)^2} e^{-2\alpha x} \hat{x} =$$

$$\approx 333\, e^{-107{,}6x} \hat{x}$$

c. En plan våg kräver att E-fältet är riktat ortogonalt mot vågens färdriktning.

Vågens färdriktning bestäms av exponenten

$$e^{-(\alpha+j\beta)x} = e^{-\gamma x} = e^{-\gamma \hat{k} \cdot \vec{R}}$$

där $\vec{R} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$, dvs. vågen har propagationsriktning i $\hat{x}$-led. Från a-uppgiften ser vi att E-fältet är riktat i $\hat{z}$-led.

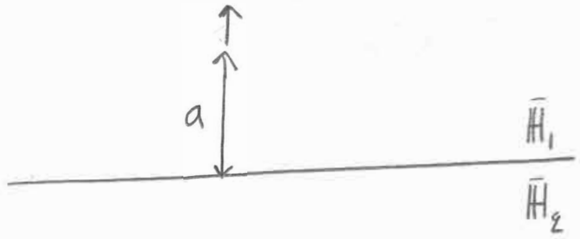
$\Rightarrow E \cdot \hat{k} = \hat{z} \cdot \hat{x} = 0$

$\Rightarrow$ Vågen är en plan våg.

Uppgift 6

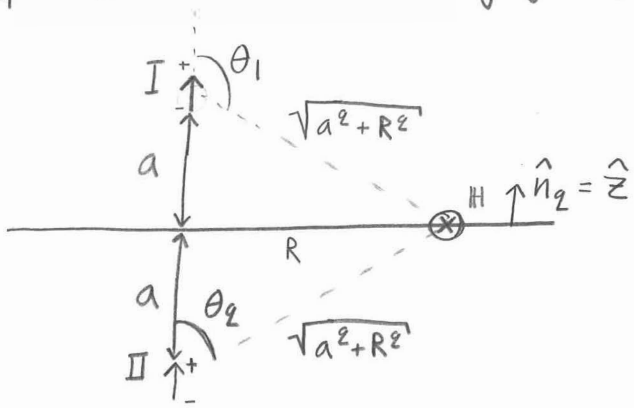
Ytströmtätheten kan beräknas mha randvillkoret för H-fältet

$$\bar{J}_s = \hat{n}_2 \times (\bar{H}_1 - \bar{H}_2)$$



På andra sidan det ledande planet, sett från dipolen, är H-fältet $\bar{H}_2 = 0$

$\bar{H}_1$ beräknas mha speglingsmetoden



$$\sin(\theta_1) = \sin(\pi - \theta_2) = \\ = \sin(\theta_2)$$

$$\sin\theta_2 = \frac{R}{\sqrt{a^2+R^2}}$$

Generellt ges H-fältet för en Hertz-dipol av

$$\bar{H} = j\frac{\bar{I}\, l\, e^{-j\beta R}}{4\pi R}\beta \sin\theta \; \hat{\phi} \quad \text{där} \quad \bar{p} = -j\bar{p}_0 = \frac{\bar{I}\, l}{j\omega}$$

$$\Rightarrow \bar{I}\, l = \omega p_0$$

Dipolen o den speglade dipolen har samma riktning

$$\Rightarrow \bar{H}_{tot} = \frac{2 \cdot j p_0 \omega e^{-j\beta\sqrt{a^2+R^2}} \beta \frac{R}{\sqrt{a^2+R^2}}}{4\pi\sqrt{a^2+R^2}} \hat{\phi} =$$

$$= \frac{j\rho_0 \omega^2 e^{-j\omega\frac{\sqrt{a^2+R^2}}{c}} R}{2\pi c\,(a^2+R^2)}\,\hat{\phi}$$

$$\Rightarrow \bar{J}_s = \hat{z}\times\hat{\phi}\,\frac{j\rho_0 \omega^2 e^{-j\omega\frac{\sqrt{a^2+R^2}}{c}} R}{2\pi c\,(a^2+R^2)} =$$

$$= -\hat{r}\,\frac{j\rho_0 \omega^2 e^{-j\omega\frac{\sqrt{a^2+R^2}}{c}} R}{2\pi c\,(a^2+R^2)}$$

På reell form

$$J_s = -\hat{r}\,\frac{\rho_0 \omega^2 R}{2\pi c\,(a^2+R^2)}\sin\left(\omega t - \frac{\omega}{c}\sqrt{a^2+R^2}\right)$$

7

Elektrostatik

1. Symmetrin måste vara sådan att man kan hitta en yta där E-fältet har konstant amplitud.
2. All laddning som påförs en ledare kommer repellera varandra och därmed fördela sig i kraftbalans så långt som möjligt från varandra. De kommer inte längre än till ytan. Det kan alltså finnas ytladdningstäthet på metalliska föremål, ingen volymladdningstäthet.
3. P-fältet beskriver polariseringen hos ett polariserbart material. P uttrycker dipolmoment per volymsenhet.
4. Elvipotentialytorna är vinkelräta mot E-fältslinjerna. Detta förstås ur sambandet $\boldsymbol{E} = -\nabla V$

Magnetostatik

5. B-fältet definieras utifrån att man kan mäta upp krafter som på laddningar som rör sig i nämnda B-fält. B-fältet fås ur sambandet $\boldsymbol{F} = q(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{B})$.
6. $\nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{J}$ och $\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$.
7. Tangentialkomponenterna vid en gränsyta mellan magnetiska material är
$$H_{1t} - H_{2t} = J_{fri,s}$$
8. Definitionen av den magnetiska vektorpotentialen $\nabla \times \boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$. Endast rotationen av vektorpotentialen spelar roll. Divergensen saknar betydelse och kan därför väljas godtyckligt till något som ger enklast möjliga uttryck.

Dynamik

9. En makroskopisk modell tar inte hänsyn till att all laddning egentligen är diskret. Istället introducerar man medelvärdesbildade laddningsfördelningar där man betraktar små volymer Δv, och där man antar att laddningsfördelningen är konstant i volymen.
10. B-fältet är källfritt i betydelsen att $\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$ även i dynamiken.
11. Det beskriver hur flödet som skapas av strömmen i kretsen återkopplar till den egna kretsen.
12. Lentz lag säger att inducerade spänningar har sådan riktning att den vill motverka förändringarna i pålagt B-fält.
13. $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{R}, t) = Re\{\overline{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{R})e^{j\omega t}\}$
14. En plan vår har en konstant propagationsriktning, E och H fälten är vinkelrätt polariserade mot propagationsriktningen, och fälten har samma amplitud i plan som är vinkelräta mot propagationsriktningen.
15. Det används för vågor som består av fler än en frekvens. När man slår ihop vågor av minst två frekvenser kommer summan ge en envelopp, modulation av vågen. Denna envelopp propagerar med grupphastigheten.
16. Förhållandet mellan E och H-fälten.

17. Fresnells ekvationer härleds genom att studera randvillkoren och vad som gäller för att de ska vara uppfyllda så att en snett infallande plana våg reflekteras och transmitteras i gränsytan.
18. En infallsvinkel där reflektionskoefficienten är noll. Den kan beräknas ur Fresnells ekvationer.
19. Hertz-dipolen är mycket kort i förhållande till våglängden.
    Hetzdipolen har i varje ögonblick konstant ström längs antennelementet.
20. Med ett strålningsdiagram kan man illustrera en antenns riktningsberoende.