Tentamen i Vektorfält och elektromagnetisk fältteori, EEN190

Tid:	2024-08-22, kl. 8:30-13:30
Hjälpmedel:	Physics Handbook Beta Mathematics Handbook Typgodkänd kalkylator Formelsamlingar i vektorfält och elektromagnetisk fältteori med egna formler skrivna på sista sidan. Inga andra anteckningar eller lösta tal är tillåtna.
Förfrågningar:	Andreas Fhager
Lösningar:	Anslås på kursens hemsida senast första vardagen efter tentan.
Resultatet:	Distribueras via LADOK.
Granskning:	Plats och tid annonseras på kurshemsidan.
Om rättningen:	Svar och lösningar skall motiveras och förklaras. Skriv tydligt och förklara vad ni gör i er lösning och vilken metod som används. Poängavdrag görs för otydliga figurer och lösningar samt lösningar som inte förklaras eller motiveras. Mindre allvarliga fel och rena räknefel leder till mindre avdrag. Mer allvarliga, principiella fel och metodfel leder till större avdrag. Poängavdrag görs även för utelämnade referensriktningar, dimensionsfel och uppenbart orimliga svar.
Betygsgränser:	Betyg 3: Totalt 36, varav ≥ 21 på problemdelen och ≥ 8 på teorin Betyg 4: Totalt 48, varav ≥ 26 på problemdelen och ≥ 10 på teorin Betyg 5: Totalt 60, varav ≥ 31 på problemdelen och ≥ 12 på teorin

Svaren på teoridelen skall ges på tesen som lämnas in.

Teorifrågorna besvaras genom att markera en av rutorna efter varje påstående. En och endast en ruta på varje rad skall markeras. De tre svarsalternativen är *Ja*, *Vet ej* och *Nej*. Alternativet *Vet ej* är markerat med ”?” på tesen. För varje påstående ger korrekt svar +0,2 poäng och inkorrekt svar -0,2 poäng. *Vet ej* är neutralt och ger 0 poäng. Förståelseuppgifterna ger maximalt 1 poäng och lägst -1 poäng och man kan därför få 1 poäng även med ett *Vet ej* svar.

Anonym kod: ______________________________

Lycka till!

1
Problemlösningsdel (12 poäng)

a. Beräkna ytintegralen av fältet $\boldsymbol{u} = (x^2y, x^2, x+y)$ över ytan S som definieras av $0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 2, z = 0$, och där ytnormalen $\hat{\boldsymbol{n}}$ är riktad i positiv z-led. (4p)

b. Skriv följande vektoruttryck eller ekvationer på indexform. (Ni behöver alltså inte visa likheterna, enbart skriva motsvarande uttryck på indexform.) (4p)
   1. $(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})\ (\boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{d})$
   2. $\boldsymbol{u} + (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})\boldsymbol{v} = |\boldsymbol{a}|^2(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{v})\boldsymbol{a}$
   3. $\boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla} u) = \boldsymbol{0}$
   4. $\boldsymbol{\nabla} \cdot \nabla^2 \boldsymbol{u} = \nabla^2 \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{u}$

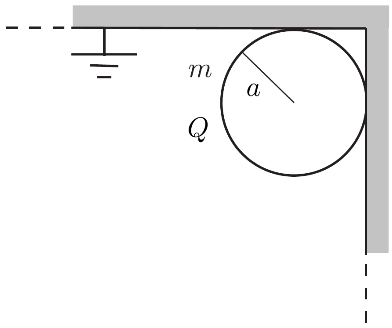
c. Ett vektorfält ges i sfäriska koordinater av uttrycket $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = A_r \hat{\boldsymbol{r}} + A_\varphi \hat{\boldsymbol{\varphi}}$
   För de två fallen nedan, ge ett exempel på komponenter A_r och A_φ (som inte båda är noll) som medför att
   1. Fältet är både konservativt och divergensfritt.
   2. Fältet är virvelfritt, men har en konstant källtäthet $\rho(\boldsymbol{r}) = 2$

   Svaren ska motiveras med beräkningar. (4p)

2 (Elektrostatik)

Problemlösningsdel (8 poäng)

A) En sfärisk ballong med radien *a* och massa *m* har blivit uppladdad genom att den gnidits mot håret. Den har fastnat i taket vid hörnet av en vägg enligt figur. Hur stor laddning, *Q*, på ballongen krävs för att den ska hållas uppe och inte falla mot marken?
Taket och väggen kan antas ha potentialen noll och ballongens laddning antas vara jämnt fördelad över dess yta. Eventuella friktionskrafter kan försummas.



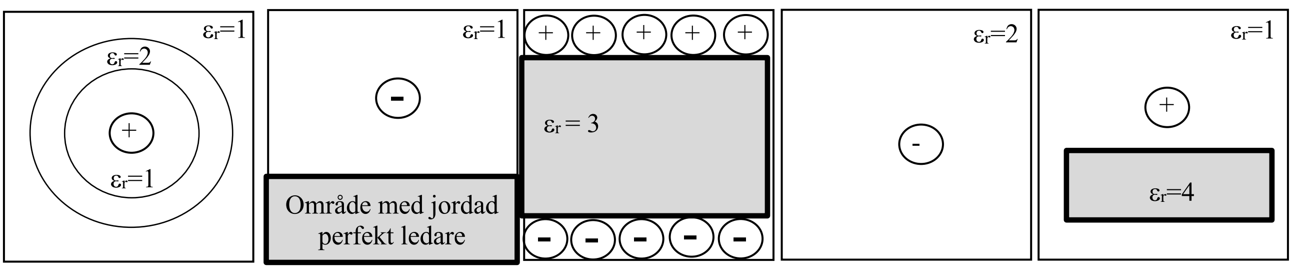
Teoridel (4 poäng)

b) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?	**ja**	**?**	**nej**
För att fullständigt beskriva den grundläggande fysiken i ***elektrostatiken*** räcker ett av Maxwells postulat.	❑	❑	❑
För att fullständigt beskriva den grundläggande fysiken i ***elektrostatiken*** behövs två av Maxwells postulat.	❑	❑	❑
I ***elektrostatiken*** är E-fältet virvelfritt.	❑	❑	❑
I ***elektrostatiken*** är E-fältet konservativt.	❑	❑	❑
Den grundläggande fysiken i ***elektrostatiken*** bygger **bland annat** på att D-fältet är källfritt.	❑	❑	❑
Den grundläggande fysiken i ***elektrostatiken*** bygger **bland annat** på att E-fältet är källfritt.	❑	❑	❑

c) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?	**ja**	**?**	**nej**
Även om inga laddningar är närvarande är det statiska E-fältet i vacuum är alltid nollskilt.	❑	❑	❑
Fältet INNANFÖR ett dielektriskt skal med, $\varepsilon_r = 2$, med en sfäriskt formad laddningsfördelning centrerad i håligheten är lika stort som fältet från enbart laddningsfördelningenen om man tar bort det dielektriska skalet.	❑	❑	❑
Fältet INNANFÖR ett metallskal, med en sfäriskt formad laddningsfördelning centrerad i håligheten är lika stort som fältet från enbart laddningsfördelningenen om man tar bort metallskalet.	❑	❑	❑
E-fältet, ***E***, har enheten V/m.	❑	❑	❑
Speglingsmetoden kan användas för att lösa Laplace's ekvation i godtycklig geometri.	❑	❑	❑
Speglingsmetoden kan användas för att lösa Laplace's ekvation i vissa geometrier med lämplig symmetri.	❑	❑	❑

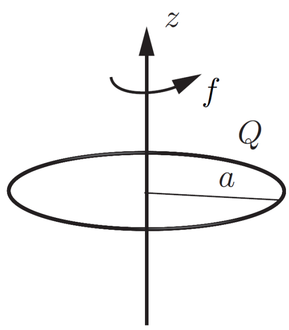
d) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga? (Frågan gäller elektostatik)	**ja**	**?**	**nej**
Randvillkoret för E-fältets tangentialkomponent härleds från postulatet om divergensen av E-fältet.	❑	❑	❑
Randvillkoret för E-fältets normalkomponent härleds från postulatet om divergensen av E-fältet.	❑	❑	❑
E-fältets tangentialkomponent är alltid kontinuerlig i gränsen mellan två material med olika permittivitet.	❑	❑	❑
E-fältets normalkomponent är alltid kontinuerlig i gränsen mellan två material med olika permittivitet.	❑	❑	❑
D-fältets tangentialkomponent är alltid kontinuerlig i gränsen mellan två material med olika permittivitet.	❑	❑	❑
D-fältets normalkomponent är alltid kontinuerlig i gränsen mellan två material med olika permittivitet.	❑	❑	❑

e) I följande figurer visas ett antal exempel med laddningsfördelningar som befinner sig inneslutna eller i närheten av olika material. Markera var det uppstår **P-fält**. Alla bilder visar tvärsnitt av olika konfigurationer av positiva och negativa små sfäriska laddningar, som utgör sk fria laddningar. Laddningarna befinner sig i omgivning av material som beskrivs i figurerna. För poäng ska det principiella utseendet vara korrekt i det markerade kvadratiska området för respektive konfiguration. (Korrekt svar ger +0,2p och felaktigt svar ger -0,2p på samma sätt som övriga teorifrågor) (1 poäng)



3 (Magnetostatik)

Problemlösningsdel (8 poäng)



A) En tunn cirkulär ring med radie a är jämnt uppladdad med total laddning Q. Ringen roterar med konstant rotationsfrekvens f kring z-axeln. Använd Biot-Savarts lag för att bestämma den magnetiska flödestätheten längs z-axeln, alltså $\boldsymbol{B}(z)$.

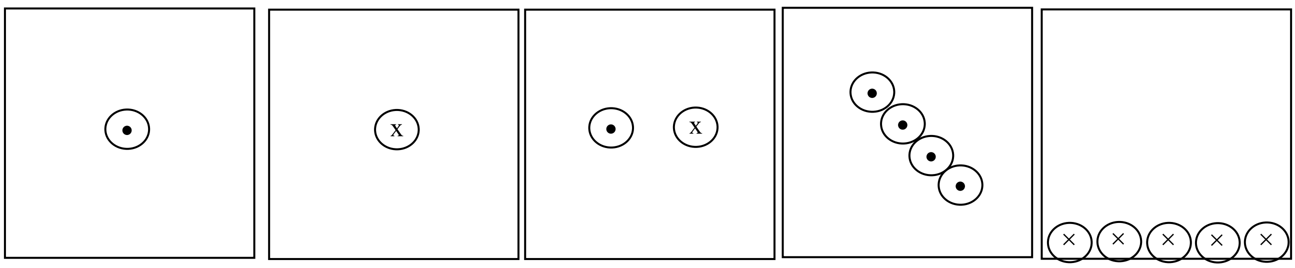
Teoridel (4 poäng)

b) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?	**ja**	**?**	**nej**
För att fullständigt beskriva den grundläggande fysiken ***i magnetostatiken*** räcker ett av Maxwells postulat.	❑	❑	❑
För att fullständigt beskriva den grundläggande fysiken ***i magnetostatiken*** behövs två av Maxwells postulat.	❑	❑	❑
I ***magnetostatiken*** är B-fältet är virvelfritt.	❑	❑	❑
I ***magnetostatiken*** är H-fältet är virvelfritt.	❑	❑	❑
Den grundläggande fysiken ***i magnetostatiken*** bygger **bl.a.** på att B-fältet alltid måste ha en nollskild divergens för att några B-fält ska existera.	❑	❑	❑
I ***magnetostatiken*** kan H-fältet under vissa förutsättningar ha en nollskild divergens.	❑	❑	❑

c) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga? (Frågan gäller magnetostatik)	**ja**	**?**	**nej**
Strömtäthetsfältet, $\boldsymbol{J}$, har enheten A/m^3.	❑	❑	❑
Kontinuitetsekvationen formuleras som $\nabla \cdot \boldsymbol{J} = \sigma \boldsymbol{E}$ i statiken.	❑	❑	❑
Experimentellt kan ***H***-fältet kan mätas direkt med lämplig mätutrustning.	❑	❑	❑
Kontinuitetsekvationen för likström gäller för konvektionsström.	❑	❑	❑
Kontinuitetsekvationen för likström gäller för konduktionsström.	❑	❑	❑
Ström i en kopparledning är ett exempel på en konduktionsström.	❑	❑	❑

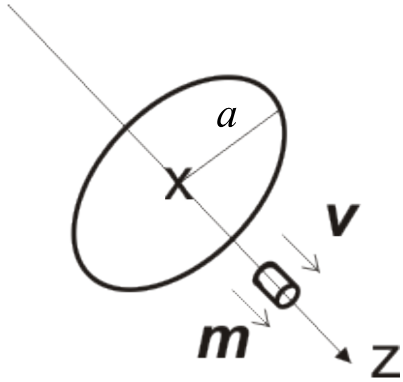
d) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?	**ja**	**?**	**nej**
B-fältets tangentialkomponent är alltid kontinuerlig i gränsen mellan två material med olika permittivitet.	❑	❑	❑
H-fältets tangentialkomponent är alltid kontinuerlig i gränsen mellan två material med olika permittivitet.	❑	❑	❑
B-fältets normalkomponent är alltid kontinuerlig i gränsen mellan två material med olika permittivitet.	❑	❑	❑
H-fältets normalkomponent är alltid kontinuerlig i gränsen mellan två material med olika permittivitet.	❑	❑	❑
Ett stycke homogent magnetiserat material har en magnetiseringsströmtäthet.	❑	❑	❑
Ett stycke homogent magnetiserat material har en ytmagnetiseringsströmtäthet.	❑	❑	❑

e) Skissa **A-fältet** runt följande strömmar. Alla bilder visar tvärsnitt av olika konfigurationer av strömmar som går in eller ut ur papperets plan, antag att strömmarna befinner sig ensamma i vakuum (om inget annat anges). För poäng ska det principiella utseendet (riktningen) vara korrekt i hela det markerade kvadratiska området för respektive konfiguration. (Korrekt svar ger +0,2p och felaktigt svar ger -0,2p på samma sätt som övriga teorifrågor) (1 poäng)



4

Problemlösningsdel (8 poäng)



En magnetisk dipol med det magnetiska dipolmomentet $\mathbf{m} = m\hat{\mathbf{z}}$ kan röra sig fritt längs z-axeln. I xy planet finns en tunn ledande ring med radie *a* och centrum i origo. Ringen har resistans R och försumbar självinduktans. Den magnetiska dipolen rör sig med konstant hastighet $\mathbf{v} = m\hat{\mathbf{z}}$ längs positiva z-axeln, se figuren.
A) Beräkna den inducerade strömmen *I(t)* i ringen till belopp och riktning om dipolen passerar origo, O, vid tiden $t = 0$.

Teoridel (4 poäng)

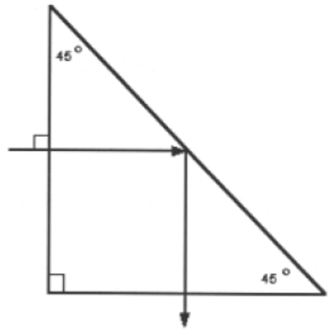
b) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?	**ja**	**?**	**nej**
För att fullständigt beskriva den grundläggande fysiken i ***tidsvarierande fältproblem*** räcker det med två av Maxwells postulat.	❑	❑	❑
För att fullständigt beskriva den grundläggande fysiken i ***tidsvarierande fältproblem*** krävs alla fyra Maxwells postulat.	❑	❑	❑
Den grundläggande fysiken i ***problemlösningsdelen ovan*** bygger **bl.a.** på att B-fältet är källfritt.	❑	❑	❑
Den grundläggande fysiken i ***problemlösningsdelen ovan*** bygger **bl.a.** på att E-fältet är källfritt.	❑	❑	❑
Den grundläggande fysiken i ***problemlösningsdelen ovan*** bygger **bl.a.** på att B-fältet är virvelfritt.	❑	❑	❑
Den grundläggande fysiken i ***problemlösningsdelen ovan*** bygger **bl.a.** på att E-fältet är virvelfritt.	❑	❑	❑

c) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?	**ja**	**?**	**nej**
D-fältets tangentialkomponent för tidsvarierande fält *kan vara* kontinuerlig i gränsen mellan två material med olika permittivitet.	❑	❑	❑
D-fältets normalkomponent för tidsvarierande fält *kan vara* kontinuerlig i gränsen mellan två material med olika permittivitet.	❑	❑	❑
H-fältets tangentialkomponent för tidsvarierande fält *kan vara* kontinuerlig i gränsen mellan två material med olika permeabilitet.	❑	❑	❑
H-fältets normalkomponent för tidsvarierande fält *kan vara* kontinuerlig i gränsen mellan två material med olika permeabilitet.	❑	❑	❑
Randvillkoret för D-fältets normalkomponent förändras då man går från statik till tidsvarierande fält.	❑	❑	❑
Randvillkoret för H-fältets normalkomponent förändras då man går från statik till tidsvarierande fält.	❑	❑	❑

d) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?	**ja**	**?**	**nej**
Den retarderade potentialen uppkommer som en lösning till vågekvationen.	❑	❑	❑
Den retarderade potentialen beskriver att ljushastigheten avtar med avståndet från källan.	❑	❑	❑
Vågekvationen för vektorpotentialen **A** kan härledas från Maxwells fyra ekvationer och sambandet mellan ***A*** och ***B***-fält.	❑	❑	❑
En tidsvarierande ström i en ledare ger enbart upphov till ett tidsvarierande B-fält i området runt ledaren.	❑	❑	❑
Den magnetiska vektorpotentialen relateras till magnetfältet som $\nabla \cdot \boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$.	❑	❑	❑
Den magnetiska vektorpotentialen relateras till magnetfältet som $\nabla \times \boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$.	❑	❑	❑

e) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?	**ja**	**?**	**nej**
Det är möjligt att inducera en spänning i en ledare trots att -dB/dt termen i Faradays lag är noll.	❑	❑	❑
Faradays induktionslag uttrycker att ett elektriskt fält kan genereras utan närvara av laddningar.	❑	❑	❑
Lenz lag säger att en inducerad spänning är sådan att den motverkar förändring i det externt pålagda magnetfältet.	❑	❑	❑
Lenz lag följer som en konsekvens av Faraday's lag.	❑	❑	❑
En spoles egeninduktans beror bland annat på antalet lindningsvarv.	❑	❑	❑
En cylindrisk spoles egeninduktans beror bland annat på om det finns ett material med magnetiska egenskaper inuti spolen.	❑	❑	❑

Problemlösningsdel (8 poäng)



En ljusstråle med våglängden 450 nm sänds in mot ett prisma enligt figuren. Strålen totalreflekteras enligt figuren, vinkeln mellan infallande stråle och reflekterad stråle är 90 grader. Prismat har brytningsindex n=1,6.
A) Antag att E-fältet är polariserat vinkelrätt mot infallsplanet. Hur mycket kan man sänka brytningsindex i prismat för att totalreflektion ändå ska ske vid de givna vinklarna. (6 poäng)
B) Förändras ditt svar i uppgift A om E-fältet istället är polariserat parallellt med infallsplanet? Motivera ditt svar. (2 poäng)

Teoridel (4 poäng)

c) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?	**ja**	**?**	**nej**
För att fullständigt beskriva den grundläggande fysiken i problemlösningsdelen ovan räcker två av Maxwells postulat.	❑	❑	❑
För att fullständigt beskriva den grundläggande fysiken i problemlösningsdelen ovan krävs alla fyra Maxwells postulat.	❑	❑	❑
Den grundläggande fysiken i problemlösningsdelen ovan bygger **bl.a.** på att rotationen av E-fältet är lika med minus tidsderivatan av B-fältet.	❑	❑	❑
Den grundläggande fysiken i problemlösningsdelen ovan bygger **bl.a.** på att B-fältet är divergensfritt.	❑	❑	❑
Den grundläggande fysiken i problemlösningsdelen ovan bygger **bl.a.** på att rotationen av B-fältet är lika med permeabilitetskonstanten i vakuum gånger strömtäthetsfältet.	❑	❑	❑
Den grundläggande fysiken i problemlösningsdelen ovan bygger **bl.a.** på att divergensen av E-fältet är lika med volymladdningstätheten av laddningarna dividerat med permittivitetskonstanten i vakuum.	❑	❑	❑

d) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?	**ja**	**?**	**nej**
En plan våg (uniform plane wave) kan ha en utbredningsriktning som varierar i rummet.	❑	❑	❑
En plan våg (uniform plane wave) har alltid en E-fältsvektor riktad vinkelrätt mot utbredningsriktningen.	❑	❑	❑
En plan våg (uniform plane wave) har alltid en B-fältsvektor riktad vinkelrätt mot utbredningsriktningen.	❑	❑	❑
En plan våg (uniform plane wave) kan ha E- och H-fältsvektorer som är rumsberoende över ett plan som är vinkelrätt mot utbredningsriktningen.	❑	❑	❑
En plan våg (uniform plane wave) kan ha en E-fältsvektor riktad i utbredningsriktningen.	❑	❑	❑
En plan våg (uniform plane wave) kan ha en B-fältsvektor riktad i utbredningsriktningen.	❑	❑	❑

e) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?	**ja**	**?**	**nej**
jω–metoden för fältberäkningar bygger på antagande om fält som varierar sinusformigt (eller cosinus) i tiden.	❑	❑	❑
Tidsderivata i Maxwells ekvationer övergår i jω–metoden till multiplikation med jω.	❑	❑	❑
Ett komplext uttryck på E-fältet kan innehålla ett tidsberoende.	❑	❑	❑
För att konvertera från komplext till reellt fält multiplicerar man med $e^{\omega t}$ och tar imaginärdelen.	❑	❑	❑
Plana vågor som har ett sinusformat tidsberoende kan uttryckas mha komplexa fält.	❑	❑	❑
Vektorfält kan utryckas på komplex form men skalära fält kan enbart uttryckas med reella fält.	❑	❑	❑

f) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?	**ja**	**?**	**nej**
Beräkning med Snells lag förutsätter att den infallande vågen är en plan våg.	❑	❑	❑
Beräkningar med Fresnells ekvationer förutsätter att den infallande vågen är en plan våg.	❑	❑	❑
Beräkningar med Fresnells ekvationer förutsätter att den infallande vågen varierar sinusformigt i tiden.	❑	❑	❑
Brewstervinkeln definieras både för vågor med polarisering parallellt och vinkelrätt mot infallsplanet.	❑	❑	❑
Brewstervinkeln är densamma som den kritiska vinkeln, vilken beräknas ur Snells lag.	❑	❑	❑
Vinkeln vid vilken Brewstervinkeln inträffar härleds från Fresnell’s ekvationer	❑	❑	❑

6

Problemlösningsdel (8 poäng)

En antenn strålar med intensitetsfördelningen

$$S = \frac{P_0}{R^2}\cos^3\theta\sin^2\varphi$$

för $0<\theta<\pi/2$ och $0<\varphi<2\pi$, dvs i övre halvrymden. I den undre halvrymden ($\pi/2< \theta <\pi$) utstrålas ingen effekt alls, dvs $S = 0$.
A) Beräkna antennförstärkningen och direktiviteten.

Teoridel (4 poäng)

b) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?	**ja**	**?**	**nej**
För att fullständigt beskriva den grundläggande fysiken i problemlösningsdelen ovan räcker två av Maxwells postulat.	❑	❑	❑
För att fullständigt beskriva den grundläggande fysiken i problemlösningsdelen ovan krävs alla fyra Maxwells postulat.	❑	❑	❑
Den grundläggande fysiken i problemlösningsdelen ovan bygger **bl.a.** på att rotationen av E-fältet är lika med minus tidsderivatan av B-fältet.	❑	❑	❑
Den grundläggande fysiken i problemlösningsdelen ovan bygger **bl.a.** på att B-fältet är divergensfritt.	❑	❑	❑
Den grundläggande fysiken i problemlösningsdelen ovan bygger **bl.a.** på att rotationen av B-fältet är lika med permeabilitetskonstanten i vakuum gånger strömtäthetsfältet.	❑	❑	❑
Den grundläggande fysiken i problemlösningsdelen ovan bygger **bl.a.** på att divergensen av E-fältet är lika med volymladdningstätheten av laddningarna dividerat med permittivitetskonstanten i vakuum.	❑	❑	❑

c) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?	**ja**	**?**	**nej**
En dipol, som är en kvarts våglängd lång, har ett isotropt strålningsdiagram, dvs den strålar lika mycket i alla riktningar.	❑	❑	❑
En halvvågsdipol har ett isotropt strålningsdiagram, dvs den strålar lika mycket i alla riktningar.	❑	❑	❑
En Hertzdipol har ett isotropt strålningsdiagram, dvs den strålar lika mycket i alla riktningar.	❑	❑	❑
Hertzdipolen har högre strålningsresistans även en halvvågsdipol.	❑	❑	❑
En bra och effektiv sändarantenn karakteriseras av att dess strålningsresistans är hög.	❑	❑	❑
En bra och effektiv mottagarantenn karakteriseras av att dess strålningsresistans är hög.	❑	❑	❑

d) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?	**ja**	**?**	**nej**
En halvvågsdipol är ett exempel på en antenn med mycket hög direktivitet.	❑	❑	❑
En parabolantenn är ett exempel på en antenn med mycket hög direktivitet.	❑	❑	❑
En halvvågsantenn har högre strålningsresistans än en Hertzdipol.	❑	❑	❑
Grupphastigheten i vakuum skiljer sig från fashastigheten i vakuum.	❑	❑	❑
Grupphastigheten i vatten skiljer sig från fashastigheten i vatten.	❑	❑	❑
Grupphasigheten kan definieras för en monokromatisk våg, dvs en våg med en frekvens.	❑	❑	❑

e) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?	**ja**	**?**	**nej**
Ett material som har en permittivitet som varierar med frekvensen sägs vara dispersivt.	❑	❑	❑
Vakuum är dispersionsfritt.	❑	❑	❑
Om grupphastigheten är samma som fashastigheten är materialet dispersionsfritt.	❑	❑	❑
Att ett material är dispersivt betyder att ljushastigheten varierar med frekvens.	❑	❑	❑
Inträngningsdjupet är mindre för höga frekvenser än för låga frekvenser.	❑	❑	❑
Inträngningsdjupet är mindre i metaller med högre konduktivitet än i metaller med lägre konduktivitet.	❑	❑	❑

1a) Ytan ligger alltså i z-planet ($z=0$)

Ytnormalen $\hat{n} = (0,0,1)$

$$\mathbb{u} \cdot \hat{n} = (x^2y, x^2, x+y) \cdot (0,0,1) = x+y$$

Integralen beräknas

$$\int\int_S \mathbb{u} \cdot \hat{n} \, dS = \int_0^1 \int_0^2 x+y \, dy dx = \int_0^1 \left[xy + y^2/2\right]_0^2 dx$$

$$= \int_0^1 2x + 2 \, dx = \left[x^2 + 2x\right]_0^1 = 3$$

b)

1. $(\mathbb{a} \cdot \mathbb{b})(\mathbb{c} \cdot \mathbb{d}) = a_j b_j c_k d_k$

2. $\mathbb{u} + (\mathbb{a} \cdot \mathbb{b}) \mathbb{v} = |\mathbb{a}|^2 (\mathbb{b} \cdot \mathbb{v}) \mathbb{a}$

Introducera först fritt index

$$u_i + (\mathbb{a} \cdot \mathbb{b}) v_i = (\mathbb{a} \cdot \mathbb{a})(\mathbb{b} \cdot \mathbb{v}) a_i$$

Introducera därefter summationsindex

$$u_i + a_j b_j v_i = a_j a_j b_k v_k a_i$$

3. $\nabla \times (\nabla u) = 0$

$$\left.\begin{aligned} &\text{Gradient: } [\nabla u]_i = \frac{\partial u}{\partial x_i} \\ &\text{Rotation: } [\nabla \times \mathbb{u}]_i = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \end{aligned}\right\} \text{Formelblad}$$

$$\Rightarrow [\nabla \times \nabla u]_i = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_k} u$$

Alltså $\varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_k} u = 0$

4.
$$\left.\begin{aligned} \nabla \cdot \nabla^2 \mathbb{u} &= \frac{\partial}{\partial x_i} \nabla^2 \mathbb{u}_i = \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_j} u_i \\ \nabla^2 \nabla \cdot \mathbb{u} &= \frac{\partial^2 \, \nabla \cdot \mathbb{u}}{\partial x_j \partial x_j} = \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_j} u_i = \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i} u_i$$

c) $\mathbb{A}(r) = A_r \hat{r} + A_\varphi \hat{\varphi}$ (således $A_\theta = 0$)

1. Ett konservativt och divergensfritt fält ska ha

$\nabla \times \mathbb{A} = 0$

$\nabla \cdot \mathbb{A} = 0$

Beräkna

$$\nabla \times \mathbb{A} = \frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta A_\varphi\right)\hat{r} + \frac{1}{r}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\varphi} - \frac{\partial}{\partial r}(r A_\varphi)\right)\hat{\theta}$$
$$+ \frac{1}{r}\left(-\frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right)\hat{\varphi}$$

$$\nabla \cdot \mathbb{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 A_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}$$

Antag $A_\varphi = 0$

Vi testar $0 = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 A_r)$ vilket uppfylls tex om $A_r = \frac{1}{r^2}$

Insättning ger att även $\nabla \times \mathbb{A} = 0$ om $\boxed{A_\varphi = 0 \,;\, A_r = \frac{1}{r^2}}$

2. Vi kräver här att $\nabla \times \mathbb{A} = 0$ och $\nabla \cdot \mathbb{A} = 2$

Testa $2 = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 A_r)$ under samma antagande att $A_\varphi = 0$

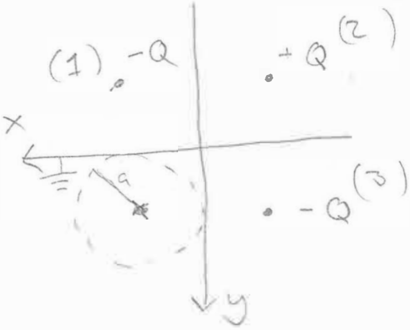
Inses att detta uppfylls för tex $A_r = \frac{2r}{3}$

Insättning ger att $\nabla \times \mathbb{A} = 0$ även i detta fall.

Alltså $A_\varphi = 0$ $A_r = \frac{2r}{3}$

2

Kraften på sfären är densamma som på en punktladdning Q i sfärens centrum.



P.g.a. att tak och vägg är jordat behöver vi införa spegelladdningar som ger potentialen noll, se figur

Kraften på ballongen från spegelladdningarna beräknas med Coulombs lag.

$$\mathbb{F}_{12} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_{12}^2}\hat{\mathbb{R}}_{12} \qquad \mathbb{R}_{12} = \mathbb{R}_2 - \mathbb{R}_1$$

$\mathbb{R}_{12}$ för (1), (2) och (3) är

$$(1): \mathbb{R}_{12}^{(1)}: a\hat{x} - a\hat{y} - (a\hat{x} + a\hat{y}) = 2a\hat{y}$$

$$(2): \mathbb{R}_{12}^{(2)}: -a\hat{x} - a\hat{y} - (a\hat{x} + a\hat{y}) = 2a\hat{x} + 2a\hat{y}$$

$$(3): \mathbb{R}_{12}^{(3)}: -a\hat{x} + a\hat{y} - (a\hat{x} + a\hat{y}) = 2a\hat{x}$$

Totala kraften från laddningarna ges nu av

$$\mathbb{F}_Q = -\underbrace{\frac{Q^2\, 2a}{4\pi\varepsilon_0 (2a)^3}\hat{y}}_{(1)} - \underbrace{\frac{Q^2\, 2a}{4\pi\varepsilon_0 (2a)^3}\hat{x}}_{(3)} + \underbrace{\frac{Q^2\, 2a}{4\pi\varepsilon_0 (2\sqrt{2}a)^3}(\hat{x}+\hat{y})}_{(2)}$$

$$= -\frac{Q^2}{16\pi\varepsilon_0 a^2}\left(1 - \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)(\hat{x}+\hat{y})$$

$\hat{y}$ - komponenten är uppåt riktad oavsett laddning på Q. För att ballongen ska hållas uppe krävs att den är större eller lika stor som tyngdkraften

$$F_{mg} = mg\,\hat{y}.$$

alltså

$$mg \leq \frac{Q^2}{16\pi\varepsilon_0 a^2}\left(1 - \frac{1}{2\sqrt{2}}\right) = \frac{Q^2}{16\pi\varepsilon_0 a^2}\,\frac{4-\sqrt{2}}{4}$$

eller

$$\boxed{|Q| \geq \frac{8a\sqrt{mg\pi\varepsilon_0}}{\sqrt{4-\sqrt{2}}}}$$

3 Vi bestämmer strömmen som uppstår av rotationen.
Laddningstätheten per längdenhet ges av $\rho_\ell = \frac{Q}{2\pi a}$. Rotationen har vinkelhastigheten $\omega = 2\pi f$.
Detta ger strömmen

$$I = \omega a \rho_\ell = \frac{Q\omega}{2\pi} = Qf.$$

Biot-Savarts lag evaluerad längs z-axeln, $\bar{r} = z\hat{z}$, är

$$\mathbb{B}(z) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \oint_\ell \frac{d\bar{r}' \times (z\hat{z} - \bar{r}')}{|z\hat{z} - \bar{r}'|^3}$$

Linjeelementet $d\bar{r}' = a\hat{\phi}\,d\phi$ och källpunkt $\bar{r}' = a\hat{r}_c$ ger

$$\mathbb{B}(z) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_0^{2\pi} \frac{a\hat{\phi} \times (z\hat{z} - a\hat{r}_c)\,d\phi}{(z^2 + a^2)^{3/2}}$$

Symmetri ger att endast z-komponent är nollskild:

$$\mathbb{B}(z) = \hat{z}\,\frac{\mu_0}{4\pi} I \int_0^{2\pi} \frac{a^2\,d\phi}{(z^2+a^2)^{3/2}} = \hat{z}\,\frac{\mu_0 I a^2}{2(z^2+a^2)^{3/2}}$$

Alltså:

$$\mathbb{B}(z) = \hat{z}\,\frac{\mu_0 Q f a^2}{2(z^2+a^2)^{3/2}}$$

4

Vektorpotentialen från en magnetisk dipol.

$$\mathbb{A}(\mathbb{R}_2) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbb{m} \times \mathbb{R}_{12}}{R_{12}^3}$$

Källpunkt $\mathbb{R}_1 = z\vec{z}$

Fältpunkt $\mathbb{R}_2 = a\hat{r}$ (På ringen)

Då fås $\mathbb{A}(\mathbb{R}_2) = \frac{m\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{z} \times (a\hat{r} - z\vec{z})}{(a^2+z^2)^{3/2}} = \frac{ma\mu_0}{4\pi} \frac{\hat{\phi}}{(a^2+z^2)^{3/2}}$

Flödet genom ringen blir

$$\Phi = \oint_L \mathbb{A}(\mathbb{R}_2) \cdot d\mathbb{l} = \oint_0^{2\pi} \mathbb{A}(\mathbb{R}_2) \cdot a\hat{\phi}\, d\phi = \frac{ma^2\mu_0}{2(a^2+z^2)^{3/2}}$$

Med $z = z(t) = vt$

Inducerad spänning i slingan $V = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}\left(\frac{ma^2\mu_0}{2(a^2+z^2(t))^{3/2}}\right)$

$$= \frac{3z(t)vma^2\mu_0}{2(a^2+z^2(t))^{5/2}}$$

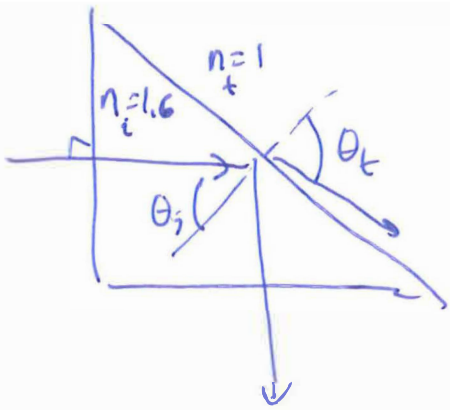
Strömmen i ringen fås nu som

$$I(t) = \frac{V}{R} = \frac{3v^2 t ma^2\mu_0}{2R(a^2+v^2t^2)^{5/2}}$$

Riktningen är $+\hat{\phi}$ för $t>0$ och $-\hat{\phi}$ för $t<0$

Fås t.ex. ur Lentz lag.

5



$\theta_i = 45^\circ$

$\theta_t = 90^\circ$

Enligt problembeskrivn. och vid totalreflektion

a) Snells lag ger

$$n_i = \sin\theta_i = n_t \sin\theta_t$$

$$\Rightarrow n_i = n_t \frac{\sin\theta_t}{\sin\theta_i}$$

Kritiska vinkeln kräver därför ett brytningsindex

$$n_i = 1 \cdot \frac{\sin 90^\circ}{\sin 45^\circ} = 1{,}41$$

Så brytningsindex kan alltså minska till 1,41 för att totalreflektion skall ske.

b) Snells lag gäller på samma sätt för parallell- och vinkelrät polarisering.

Det är amplituderna av fälten som påverkas inte vinklarna.

Framgår av härledningen av Snells lag.

Den totala utstrålade effekten fås genom att integrera upp intensitetsfördelningen över en sluten yta. Dock är $S=0$ för $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi$ så vi kan nöja oss med att integrera över den övre halvsfären.

$$P_{ut} = \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{P_0}{R^2} \cos^3\theta \cdot \sin\theta \cdot \sin^2\varphi \, R^2 \, d\theta \, d\varphi$$

skalfaktorer

$$= P_0 \int (\cos^3\theta \sin\theta) d\theta \cdot \int \sin^2\varphi \, d\varphi$$

$$= \begin{cases} u = \cos\theta \\ du = -\sin\theta \, d\theta \end{cases}$$

$$- \int_1^0 u^3 du = \left[\frac{u^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{4}$$

$$\int_0^{2\pi} \sin^2\varphi \, d\varphi = \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos 2\varphi}{2} d\varphi$$

$$= \pi - \cancel{\left[\frac{\sin 2\varphi}{4}\right]_0^{2\pi}}$$

$$\Rightarrow P_{ut} = P_0 \cdot \frac{\pi}{4}$$

Antennförstärkningen ges av intensiteten i riktningen delat med medelintensiteten.

$$G_D(\theta, \varphi) = \frac{S(R, \theta, \varphi)}{P_{ut} / 4\pi R^2} = \frac{\cancel{P_0} \cos^3\theta \sin^2\varphi / \cancel{R^2}}{\cancel{P_0} \cdot \frac{\cancel{\pi}}{4} / 4\cancel{\pi R^2}} = 16 \cos^3\theta \sin^2\varphi$$

och direktiviteten ges av

$$D = G_{D, max} = 16$$