Tentamen i Vektorfält och elektromagnetisk fältteori, EEN190

Tid:	2024-06-05, kl. 8:30-13:30
Hjälpmedel:	Physics Handbook Beta Mathematics Handbook Typgodkänd kalkylator Formelsamlingar i vektorfält och elektromagnetisk fältteori med egna formler skrivna på sista sidan. Inga andra anteckningar eller lösta tal är tillåtna.
Förfrågningar:	Andreas Fhager
Lösningar:	Anslås på kursens hemsida senast första vardagen efter tentan.
Resultatet:	Distribueras via LADOK.
Granskning:	Plats och tid annonseras på kurshemsidan.
Om rättningen:	Svar och lösningar skall motiveras och förklaras. Skriv tydligt och förklara vad ni gör i er lösning och vilken metod som används. Poängavdrag görs för otydliga figurer och lösningar samt lösningar som inte förklaras eller motiveras. Mindre allvarliga fel och rena räknefel leder till mindre avdrag. Mer allvarliga, principiella fel och metodfel leder till större avdrag. Poängavdrag görs även för utelämnade referensriktningar, dimensionsfel och uppenbart orimliga svar.
Betygsgränser:	Betyg 3: Totalt 36, varav $\geq$ 21 på problemdelen och $\geq$ 8 på teorin Betyg 4: Totalt 48, varav $\geq$ 26 på problemdelen och $\geq$ 10 på teorin Betyg 5: Totalt 60, varav $\geq$ 31 på problemdelen och $\geq$ 12 på teorin

Svaren på teoridelen skall ges på tesen som lämnas in.

Teorifrågorna besvaras genom att markera en av rutorna efter varje påstående. En och endast en ruta på varje rad skall markeras. De tre svarsalternativen är *Ja*, *Vet ej* och *Nej*. Alternativet *Vet ej* är markerat med ”?” på tesen. För varje påstående ger korrekt svar +0,2 poäng och inkorrekt svar -0,2 poäng. *Vet ej* är neutralt och ger 0 poäng. Förståelseuppgifterna ger maximalt 1 poäng och lägst -1 poäng och man kan därför få 1 poäng även med ett *Vet ej* svar.

Anonym kod: ______________________________

Lycka till!

1

Problemlösningsdel (12 poäng)

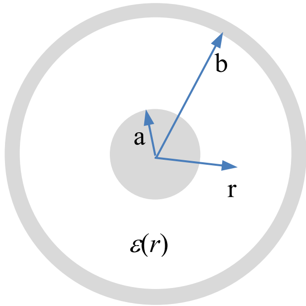
a. Beräkna linjeintegralen $\oint_C r \times dr$, där kurvan C utgörs av ellipsen som beskrivs av ekvationen $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Beräkningen längs C skall utföras i moturs riktning. (4p)

b. Använd Stokes teorem för att visa att $\oint_C f\nabla g \cdot dr = -\oint_C g\nabla f \cdot dr$ för en godtycklig sluten kurva C. De skalära fälten f och g kan antas vara deriverbara. (4p)

c. Utför en beräkning för att hitta skalfaktorerna och därmed volymelementet för koordinatsystemet (u, v, θ), vilket definieras av ekvationerna
$x_1 = uv\cos(\theta)$, $x_2 = uv\sin(\theta)$, $x_3 = (u^2 - v^2)/2$
där u och v antar positiva värden och $0 < \theta < 2\pi$.
Beräkna därefter volymen av området som innesluts innanför de krökta ytorna $u = 1$ och $v = 1$ (4p).

2 (Elektrostatik)

Problemlösningsdel (8 poäng)



Inner- respektive ytterradien hos ledarna i en koaxialkabel är a respektive b, se figur. Utrymmet mellan ledarna är fyllt med ett inhomogent medium där permittiviteten ε är en funktion av radien, r. Ytterledaren är jordad och innerledaren har potentialen U_0.

a) Visa genom en beräkning hur permittivitetens beroende av radien r måste se ut för att E-fältet ska bli konstant mellan ytter- och innerledarna.

b) Beräkna polarisationsladdningstätheten ρ_v och ytpolarisationsladdningstätheten ρ_s för samma område, dvs det område där E-fältet är konstant.

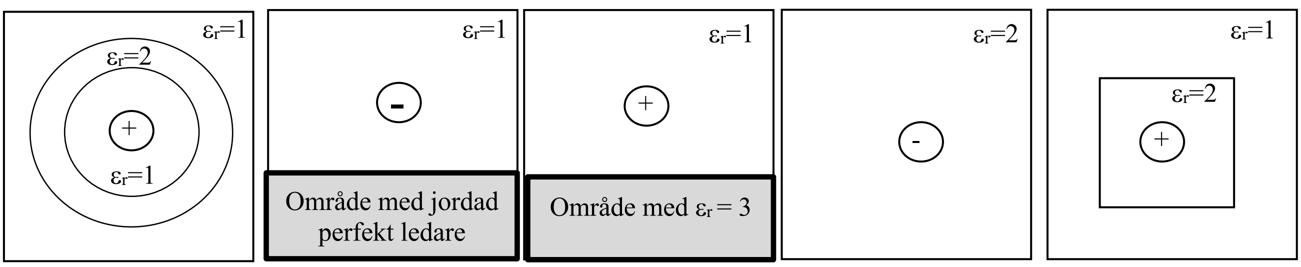
Teoridel (4 poäng)

c) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?	**ja**	**?**	**nej**
För att fullständigt beskriva den grundläggande fysiken i ***elektrostatiken*** räcker ett av Maxwells postulat.	❑	❑	❑
För att fullständigt beskriva den grundläggande fysiken i ***elektrostatiken*** behövs två av Maxwells postulat.	❑	❑	❑
I ***elektrostatiken*** är E-fältet virvelfritt.	❑	❑	❑
I ***elektrostatiken*** är E-fältet konservativt.	❑	❑	❑
Den grundläggande fysiken i ***elektrostatiken*** bygger **bland annat** på att D-fältet är källfritt.	❑	❑	❑
Den grundläggande fysiken i ***elektrostatiken*** bygger **bland annat** på att E-fältet är källfritt.	❑	❑	❑

d) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?	**ja**	**?**	**nej**
Det statiska E-fältet i vacuum är alltid E = 0.	❑	❑	❑
Fältet utanför ett dielektriskt skal med, $\varepsilon_r = 2$, med en sfäriskt formad laddningsfördelning centrerad i håligheten är lika stort som fältet från enbart laddningsfördelningenen om man tar bort det dielektriska skalet.	❑	❑	❑
Fältet utanför ett metallskal, med en sfäriskt formad laddningsfördelning centrerad i håligheten är lika stort som fältet från enbart laddningsfördelningenen om man tar bort metallskalet.	❑	❑	❑
E-fältet, ***E***, har enheten C/m.	❑	❑	❑
Speglingsmetoden kan användas för att lösa Poissons ekvation i godtycklig geometri.	❑	❑	❑
Speglingsmetoden kan användas för att lösa Poissons ekvation i vissa geometrier med lämplig symmetri.	❑	❑	❑

e) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga? (Frågan gäller elektostatik)	**ja**	**?**	**nej**
På litet avstånd från en elektrisk dipol avtar E-fältet som $1/R^3$.	❑	❑	❑
På stort avstånd från en elektrisk dipol avtar E-fältet som $1/R^3$.	❑	❑	❑
Elektriska dipoler används för att modellera den materialegenskap som kallas *permittivitet*.	❑	❑	❑
Elektriska dipoler används för att modellera den materialegenskap som kallas *konduktivitet*.	❑	❑	❑
Exakt resistansberäkning kan göras om de exakta strömbanorna är kända.	❑	❑	❑
Exakt resistansberäkning kan göras om de exakta ekvipotentialytorna är kända.	❑	❑	❑

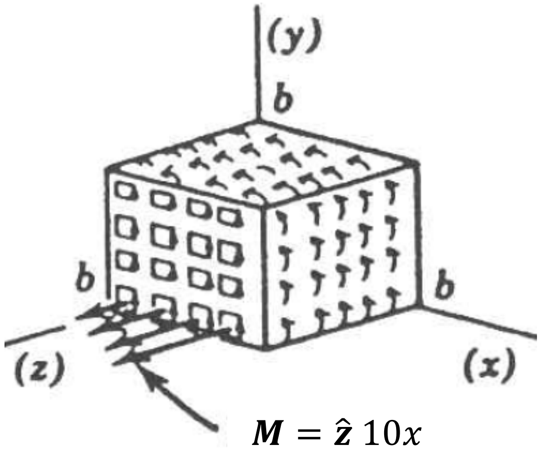
f) I följande figurer visas ett antal exempel med laddningsfördelningar som befinner sig inneslutna eller i närheten av olika material. Markera var det uppstår **yt-polarisationsladdning**. Alla bilder visar tvärsnitt av olika konfigurationer av positiva och negativa små sfäriska laddningar, som utgör sk fria laddningar. Laddningarna befinner sig i omgivning av material som beskrivs i figurera. För poäng ska det principiella utseendet vara korrekt i det markerade kvadratiska området för respektive konfiguration. (Korrekt svar ger +0,2p och felaktigt svar ger -0,2p på samma sätt som övriga teorifrågor) (1 poäng)



3 (Magnetostatik)

Problemlösningsdel (8 poäng)

En kub, med sidlängderna, b, är orienterad med sina kanter längs med de kartesiska koordinataxlarna och består av ett magnetiskt material, se figuren. Kuben placeras i ett statiskt magnetfält så att en magnetisering uppstår i kuben. Magnetiseringsfältet som uppstår beskrivs av uttrycket $\boldsymbol{M} = \hat{\boldsymbol{z}}\, 10x$ A/m.



a) Finns det någon magnetiseringsströmtäthet i kuben? I så fall, beräkna denna.

b) Finns det någon yt-magnetiseringsströmtäthet på kuben? I så fall, beräkna dessa.

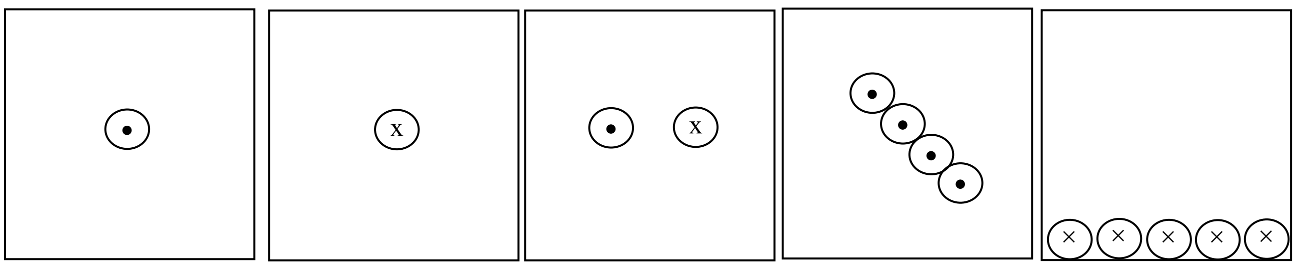
Teoridel (4 poäng)

c) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?	**ja**	**?**	**nej**
För att fullständigt beskriva den grundläggande fysiken ***i magnetostatiken*** räcker ett av Maxwells postulat.	❑	❑	❑
För att fullständigt beskriva den grundläggande fysiken ***i magnetostatiken*** behövs två av Maxwells postulat.	❑	❑	❑
I ***magnetostatiken*** är B-fältet är virvelfritt.	❑	❑	❑
I ***magnetostatiken*** är H-fältet är virvelfritt.	❑	❑	❑
Den grundläggande fysiken ***i magnetostatiken*** bygger **bl.a.** på att B-fältet alltid måste ha en nollskild divergens för att några B-fält ska existera.	❑	❑	❑
I ***magnetostatiken*** kan H-fältet under vissa förutsättningar ha en nollskild divergens.	❑	❑	❑

d) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga? (Frågan gäller magnetostatik)	**ja**	**?**	**nej**
Strömtäthetsfältet, $\boldsymbol{J}$, har enheten A/m^2.	❑	❑	❑
Kontinuitetsekvationen formuleras som $\nabla \cdot \mathbf{E} = \mathbf{0}$ i statiken.	❑	❑	❑
$\boldsymbol{H}$-fältets roll i magnetostatiken påminner om $\boldsymbol{D}$-fältets roll i elektrostatiken.	❑	❑	❑
Ohms lag gäller för en konvektionsström.	❑	❑	❑
Ohms lag gäller för en konduktionsström.	❑	❑	❑
Ett blixtnedslag är ett exempel på en konvektionsström.	❑	❑	❑

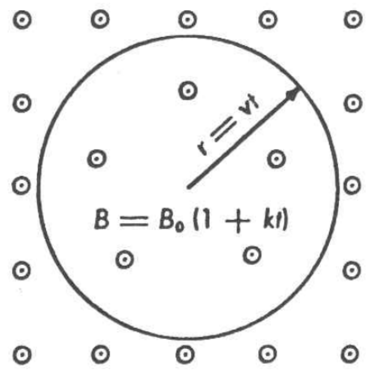
e) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?	**ja**	**?**	**nej**
Normalkomponenten av strömtäthetsfältet, $\boldsymbol{J}$, är alltid kontinuerlig i gränsen mellan två material.	❑	❑	❑
Tangentialkomponenten av strömtäthetsfältet, $\boldsymbol{J}$, är alltid kontinuerlig i gränsen mellan två material.	❑	❑	❑
En förutsättning för att använda Amperes lag för fältberäkning är bland annat att man med symmetri-argument kan hitta en s.k. Amperesslinga, där B-fältet är riktat i samma riktning som Amperesslingan.	❑	❑	❑
En förutsättning för att använda Amperes lag för fältberäkning är bland annat att man med symmetri-argument kan hitta en s.k. Amperesslinga, där B-fältet har konstant belopp på Amperesslingan.	❑	❑	❑
Biot-Savarts lag kan alltid användas vid beräkningar av B-fält.	❑	❑	❑
Amperes lag kan alltid användas i stället för Biot-Savarts lag vid fältberäkningar.	❑	❑	❑

f) Skissa **B-fältet** runt följande strömmar. Alla bilder visar tvärsnitt av olika konfigurationer av strömmar som går in eller ut ur papperets plan, antag att strömmarna befinner sig ensamma i vakuum (om inget annat anges). För poäng ska det principiella utseendet vara korrekt i hela det markerade kvadratiska området för respektive konfiguration. (Korrekt svar ger +0,2p och felaktigt svar ger -0,2p på samma sätt som övriga teorifrågor) (1 poäng)



4

Problemlösningsdel (8 poäng)



En cirkulär ledare har radien *r.* Antag att ledaren värms upp, vilket resulterar i att metallen i ledaren expanderar. Radien ökar därför som funktion av tiden och kan uttryckas som $r = vt$, där v är en konstant hastighet. Antag vidare att ledaren placeras i ett tidsvarierande magnetfält, där B-fältets belopp beskrivs av uttrycket $B = B_0(1 + kt)$.
B_0 och k är konstanter. B-fältets riktning är vinkelrätt ut ur papperets plan, och ledaren ligger också placerad i papperets plan, se figuren.
a) Beräkna den inducerade emk'n (spänningen) i slingan.

Teoridel (4 poäng)

b) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?	**ja**	**?**	**nej**
För att fullständigt beskriva den grundläggande fysiken i ***tidsvarierande fältproblem*** räcker det med två av Maxwells postulat.	❑	❑	❑
För att fullständigt beskriva den grundläggande fysiken i ***tidsvarierande fältproblem*** krävs alla fyra Maxwells postulat.	❑	❑	❑
Den grundläggande fysiken i ***problemlösningsdelen ovan*** bygger **bl.a.** på att B-fältet är källfritt.	❑	❑	❑
Den grundläggande fysiken i ***problemlösningsdelen ovan*** bygger **bl.a.** på att E-fältet är källfritt.	❑	❑	❑
Den grundläggande fysiken i ***problemlösningsdelen ovan*** bygger **bl.a.** på att B-fältet är virvelfritt.	❑	❑	❑
Den grundläggande fysiken i ***problemlösningsdelen ovan*** bygger **bl.a.** på att E-fältet är virvelfritt.	❑	❑	❑

c) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?	**ja**	**?**	**nej**
I elektromagnetismen (dynamik) är E-fältets tangentialkomponent kontinuerlig i gränsen mellan två material med olika permittivitet.	❑	❑	❑
I elektromagnetismen (dynamik) är E-fältets normalkomponent kontinuerlig i gränsen mellan två material med olika permittivitet.	❑	❑	❑
I elektromagnetismen (dynamik) är H-fältets tangentialkomponent kontinuerlig i gränsen mellan två material med olika permeabilitet.	❑	❑	❑
I elektromagnetismen (dynamik) är H-fältets normalkomponent kontinuerlig i gränsen mellan två material med olika permeabilitet.	❑	❑	❑
E-fältets tangentialkomponent på en perfekt ledande yta är alltid noll för tidsvarierande fält.	❑	❑	❑
E-fältets normalkomponent på en perfekt ledande yta är alltid noll för tidsvarierande fält.	❑	❑	❑

d) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?	**ja**	**?**	**nej**
Om alla konstanter i problemlösningstalet ovan är positiva och tiden ökar kommer den inducerade spänningen att driva en ström som cirkulerar **motsols** i slingan.	❑	❑	❑
Om konstanterna v och k i problemlösningstalet ovan är negativa, B_0 är positiv och tiden ökar kommer den inducerade spänningen att driva en ström som cirkulerar **motsols** i slingan.	❑	❑	❑
Om $v = 0$ och $k > 0$ i problemlösningstalet ovan, $B_0 > 0$ och tiden ökar kommer den inducerade spänningen att driva en ström som cirkulerar **medsols** i slingan.	❑	❑	❑
Om $v > 0$ och $k = 0$ i problemlösningstalet ovan, $B_0 > 0$ och tiden ökar kommer den inducerade spänningen att driva en ström som cirkulerar **medsols** i slingan.	❑	❑	❑
Den magnetiska vektorpotentialen relateras till magnetfältet som $\nabla \cdot \boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$.	❑	❑	❑
Den magnetiska vektorpotentialen relateras till magnetfältet som $\nabla \times \boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$.	❑	❑	❑

e) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?	**ja**	**?**	**nej**
Man kan välja rotationen av den magnetiska vektorpotentialen fritt i dynamiken.	❑	❑	❑
Man kan välja divergensen av den magnetiska vektorpotentialen fritt i dynamiken.	❑	❑	❑
Det länkade flödet används då man beräknar egeninduktansen hos en spole.	❑	❑	❑
En spoles egeninduktans beror bland annat på hur stor strömmen är i spolen.	❑	❑	❑
En spoles egeninduktans beror bland annat på antalet lindningsvarv.	❑	❑	❑
En cylindrisk spoles egeninduktans beror bland annat på om det finns ett material med magnetiska egenskaper inuti spolen.	❑	❑	❑

5

Problemlösningsdel (8 poäng)

En våg med ett sinusformat tidsberoende beskrivs av det komplexa E-fältet

$$\overline{\boldsymbol{E}} = (12\hat{\boldsymbol{x}} + 9\hat{\boldsymbol{y}})e^{-j(3x-4y)}e^{-(3x-4y)}\ V/m$$

a) I vilken riktning utbreder sig vågen?
b) Beskriver uttrycket en plan våg? Motivera ditt svar.
c) Bestäm tillhörande komplexa H-fält.

Teoridel (4 poäng)

d) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?	**ja**	**?**	**nej**
För att fullständigt beskriva den grundläggande fysiken i problemlösningsdelen ovan räcker två av Maxwells postulat.	❑	❑	❑
För att fullständigt beskriva den grundläggande fysiken i problemlösningsdelen ovan krävs alla fyra Maxwells postulat.	❑	❑	❑
Den grundläggande fysiken i problemlösningsdelen ovan bygger **bl.a.** på att rotationen av E-fältet är lika med minus tidsderivatan av B-fältet.	❑	❑	❑
Den grundläggande fysiken i problemlösningsdelen ovan bygger **bl.a.** på att B-fältet är divergensfritt.	❑	❑	❑
Den grundläggande fysiken i problemlösningsdelen ovan bygger **bl.a.** på att rotationen av B-fältet är lika med permeabilitetskonstanten i vakuum gånger strömtäthetsfältet.	❑	❑	❑
Den grundläggande fysiken i problemlösningsdelen ovan bygger **bl.a.** på att divergensen av E-fältet är lika med volymladdningstätheten av laddningarna dividerat med permittivitetskonstanten i vakuum.	❑	❑	❑

e) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?	**ja**	**?**	**nej**
Beräkning med komplexa fält, jω–metoden, bygger på att man kan anta att fälten varierar cosinusformat (eller sinusformat) i tiden.	❑	❑	❑
Beräkning med komplexa fält, jω–metoden, kan endas användas för beräkningar på plana vågor.	❑	❑	❑
Plana vågor kan endast existera om fälten varierar cosinusformat (eller sinusformat) i tiden	❑	❑	❑
E-fältet som utbreder sig runt en punktladdning, vars laddning är konstant i tiden, är ett exempel på en plan våg.	❑	❑	❑
E-fältet som utbreder sig runt en punktladdning vars laddning varierar sinusformat i tiden är ett exempel på en plan våg.	❑	❑	❑
Potentialfältet, *V*, som utbreder sig runt en punktladdning vars laddning varierar sinusformat i tiden är ett exempel på en retarderad potential.	❑	❑	❑

f) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?	**ja**	**?**	**nej**
Snells lag gäller i gränsytor med olika permittivitet men samma permeabilitet på var sida om gränsytan.	❑	❑	❑
Snells lag gäller i gränsytor med samma permittivitet men olika permeabilitet på var sida om gränsytan.	❑	❑	❑
Snells brytningslag relaterar infallsvinkel till utfallsvinkeln hos den transmitterade vågen.	❑	❑	❑
Snells brytningslag kan härledas genom att betrakta randvillkoren för normalkomponenterna av E- och H-fälten i gränsytan.	❑	❑	❑
Snells lag säger att när infallsvinkeln är mindre än kritiska vinkeln uppstår totalreflektion.	❑	❑	❑
Totalreflektion kan användas för att beskriva funktionen hos en vanlig spegel.	❑	❑	❑

g) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?	**ja**	**?**	**nej**
Beräkning med Snells lag förutsätter att den infallande vågen är en plan våg.	❑	❑	❑
Beräkningar med Fresnells ekvationer förutsätter att den infallande vågen är en plan våg.	❑	❑	❑
Beräkningar med Fresnells ekvationer förutsätter att den infallande vågen varierar sinusformigt i tiden.	❑	❑	❑
Brewstervinkeln definieras både för vågor med polarisering parallellt och vinkelrätt mot infallsplanet.	❑	❑	❑
Brewstervinkeln är densamma som den kritiska vinkeln, vilken beräknas ur Snells lag.	❑	❑	❑
Vinkeln vid vilken Brewstervinkeln inträffar härleds från Fresnell’s ekvationer	❑	❑	❑

6

Problemlösningsdel (8 poäng)

En Hertzdipol som beskrivs med det komplexa dipolmomentet $\boldsymbol{p} = p_0\hat{z}$ är placerad i origo.
a) Bestäm tidsmedelvärdet av Poyntingvektorn som funktion av de sfäriska koordinaterna r och θ i dipolens fjärrfältszon. (4p)
b) Beräkna hur stor andel av den totala utstrålade effekten som utstrålas inuti en kon som beskrivs av uttrycket $0 < \theta < \frac{\pi}{3}$. (4p)
Ledning 1: Uppgift "b" kan lösas med hjälp av integrationsberäkningar vid godtyckligt avstånd från dipolen.
Ledning 2: $\int \sin^3(x)\,dx = \frac{1}{3}\cos^3(x) - \cos(x) + k$, *där k är en (integrations)konstant.*

Teoridel (4 poäng)

c) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?	**ja**	**?**	**nej**
För att fullständigt beskriva den grundläggande fysiken i problemlösningsdelen ovan räcker två av Maxwells postulat.	❑	❑	❑
För att fullständigt beskriva den grundläggande fysiken i problemlösningsdelen ovan krävs alla fyra Maxwells postulat.	❑	❑	❑
Den grundläggande fysiken i problemlösningsdelen ovan bygger **bl.a.** på att rotationen av E-fältet är lika med minus tidsderivatan av B-fältet.	❑	❑	❑
Den grundläggande fysiken i problemlösningsdelen ovan bygger **bl.a.** på att B-fältet är divergensfritt.	❑	❑	❑
Den grundläggande fysiken i problemlösningsdelen ovan bygger **bl.a.** på att rotationen av B-fältet är lika med permeabilitetskonstanten i vakuum gånger strömtäthetsfältet.	❑	❑	❑
Den grundläggande fysiken i problemlösningsdelen ovan bygger **bl.a.** på att divergensen av E-fältet är lika med volymladdningstätheten av laddningarna dividerat med permittivitetskonstanten i vakuum.	❑	❑	❑

d) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?	**ja**	**?**	**nej**
En dipol, som är en kvarts våglängd lång, har ett isotropt strålningsdiagram, dvs den strålar lika mycket i alla riktningar.	❑	❑	❑
En halvvågsdipol har ett isotropt strålningsdiagram, dvs den strålar lika mycket i alla riktningar.	❑	❑	❑
En Hertzdipol har ett isotropt strålningsdiagram, dvs den strålar lika mycket i alla riktningar.	❑	❑	❑
Hertzdipolen har högre strålningsresistans även en halvvågsdipol.	❑	❑	❑
En bra och effektiv sändarantenn karakteriseras av att dess strålningsresistans är hög.	❑	❑	❑
En bra och effektiv mottagarantenn karakteriseras av att dess strålningsresistans är hög.	❑	❑	❑

e) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?	**ja**	**?**	**nej**
Ett strålningsdiagram säger något om hur en antennens riktningsberoende ser ut.	❑	❑	❑
Antennförstärkningen säger något om hur en antennens riktningsberoende ser ut.	❑	❑	❑
Direktiviteten säger något om hur en antennens riktningsberoende ser ut.	❑	❑	❑
Två halvvågsdipoler kan arrangeras bredvid varandra så att antennanordningens direktivitet är högre än den för en ensam halvvågsdipol.	❑	❑	❑
Två halvvågsdipoler kan arrangeras bredvid varandra så att antennanordningens strålningsdiagram blir isotropt.	❑	❑	❑
Fälten som sänds ut från en antenn är exempel på retarderade potentialer.	❑	❑	❑

f) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?	**ja**	**?**	**nej**
För goda ledare gäller $\sigma/\omega\varepsilon >> 1$.	❑	❑	❑
I en god ledare är $\alpha = \beta$.	❑	❑	❑
Summan av reflektionskoefficienten r och transmissionskoefficienten t för E-fältet är lika med ett, dvs $r + t = 1$	❑	❑	❑
Summan av reflektionskoefficienten R och transmissionskoefficienten T för effekt är lika med ett, dvs $R + T = 1$	❑	❑	❑
Reflektionskoefficienten för effekt hos E-fältet är lika med reflektionskoefficienten för E-fältet i kvadrat.	❑	❑	❑
Reflektionskoefficienten för effekt hos E-fältet kan vara ett komplext tal.	❑	❑	❑

1

a) The parametric form of the ellipse is $x = a\cos(\theta)$, $y = b sin(\theta)$, $z = 0$, $0 < \theta < 2\pi$, so $\boldsymbol{dr} = (-a\sin(\theta), b cos(\theta), 0)d\theta$ and $\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{dr} = (0,0,ab)d\theta$. This means that the integral $\oint \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{dr}$ only has a component in the z direction and the magnitude of the integral is $2\pi ab$. Note that this is twice the area of the ellipse.

b) Applying Stokes's theorem

$$\oint f\nabla g \cdot dr = \iint \nabla \times (f\nabla g) \cdot \boldsymbol{n} dS$$
$$= \iint \nabla f \times \nabla g + f\nabla \times (\nabla g) \cdot \boldsymbol{n} dS$$
$$= \iint \nabla f \times \nabla g \cdot \boldsymbol{n} dS$$

Similarly,

$$\oint g\nabla f \cdot dr = \iint \nabla \times (g\nabla f) \cdot \boldsymbol{n} dS$$
$$= \iint \nabla g \times \nabla f + g\nabla \times (\nabla f) \cdot \boldsymbol{n} dS$$
$$= \iint \nabla g \times \nabla f \cdot \boldsymbol{n} dS = -\iint \nabla f \times \nabla g \cdot \boldsymbol{n} dS$$

Therefore,

$$\oint f\nabla g \cdot dr = -\oint g\nabla f \cdot dr$$

c) The scale factors are

$$h_u = \left|\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial u}\right| = |(v\cos\theta, v\sin\theta, u)| = (u^2 + v^2)^{1/2}$$
$$h_v = \left|\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial v}\right| = |(u\cos\theta, u\sin\theta, v)| = (v^2 + u^2)^{1/2}$$
$$h_\theta = \left|\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \theta}\right| = |-uv\sin\theta, uv\cos\theta, 0| = uv$$

So, the volume element is $dV = (u^2 + v^2)uv$. The volume V between the surfaces $u = 1$ and $v = 1$ is therefore

$$V = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^{2\pi} (u^2 + v^2)uv \, d\theta du dv = 2\pi \int_0^1 u^4 \, {}^{v}/_{4} + u^2 \, {}^{v^3}/_{2} \, dv = {}^{\pi}/_{2}$$

2 — ELECTROSTATICS

a) $\nabla \cdot \vec{D} = 0 \quad (\rho_v = 0)$

$$\nabla \cdot (\epsilon \vec{E}) = 0 \Rightarrow \epsilon \nabla \vec{E} + \vec{E} \nabla \epsilon = 0$$

$$\epsilon \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot E_r) + \vec{E} \; r \cdot \frac{\partial \epsilon}{\partial r} = 0$$

$$\epsilon \frac{1}{r} \left[E_r + r \frac{\partial E_r}{\partial r} \right] + E_r \frac{\partial \epsilon}{\partial r} = 0$$

$\Rightarrow \vec{E}$ CONSTANT, SO: $\frac{\partial E}{\partial r} = 0$

$$\rightarrow \frac{\epsilon}{r} E_r + E_r \frac{\partial \epsilon}{\partial r} = 0 \Rightarrow \epsilon = \frac{k}{r} \quad (k = \text{constant})$$

b) $E_r = \frac{U_0}{b-a}$

$$\vec{P} = \vec{D} - \epsilon_0 \vec{E} = (\epsilon - \epsilon_0) \vec{E}$$

$$\rho_{pv} = -\nabla \cdot \vec{P} = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r (\epsilon - \epsilon_0) E_r \right] = -\frac{E_r}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r(\epsilon - \epsilon_0) \right] =$$

$$= -\frac{E_r}{r} \left[(\epsilon - \epsilon_0) + r \frac{\partial \epsilon}{\partial r} \right] = -\frac{E_r}{r} \left[\left(\frac{k}{r} - \epsilon_0 \right) + r \left(-\frac{k}{r^2} \right) \right] =$$

$$= \frac{E_r}{r} \epsilon_0 = \frac{U_0 \epsilon_0}{(b-a) r} .$$

$$\rho_{ps} = \vec{P} \cdot \vec{a}_n$$

$\Rightarrow r = b$

$$\rho_{ps}(r=b) = \left(\frac{k}{b} - \epsilon_0 \right) E_r \hat{r} \cdot \hat{r} = \left(\frac{k}{b} - \epsilon_0 \right) \frac{U_0}{b-a}$$

$\Rightarrow r = a$

$$\rho_{ps}(r=a) = \left(\frac{k}{a} - \epsilon_0 \right) E_r \cdot \hat{r} (-\hat{r}) = \left(\epsilon_0 - \frac{k}{a} \right) E_r =$$

$$= \left(\epsilon_0 - \frac{k}{a} \right) \frac{U_0}{b-a} .$$

3

a) Magnetiseringsströmtätheten beräknas som

$$\mathbf{J}_m = \nabla \times \mathbf{M} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & 10x \end{vmatrix} = -\hat{y}\,10 \quad \mathrm{A/m^2}$$

Alltså konstant magnetiseringsströmtäthet riktad i negativ y-led.

b) Yt-magnetiseringsström beräknas som $\mathbf{J}_{ms} = \mathbf{M} \times \hat{n}$ där $\hat{n}$ är en ytnormal

Blocket har 6 ytor som potentiellt kan ha yt-magnetiseringsströmmar.

$\underline{x=0}$ $\quad \mathbf{J}_{ms} = \mathbf{M} \times (-\hat{x})\big|_{x=0} = 10 \cdot 0\,\hat{z} \times (-\hat{x}) = 0$

$\underline{x=b}$ $\quad \mathbf{J}_{ms} = \mathbf{M} \times \hat{x}\big|_{x=b} = 10 \cdot b\,\hat{z} \times \hat{x} = \hat{y}\,10b \quad \mathrm{A/m}$

$\underline{y=0}$ $\quad \mathbf{J}_{ms} = \mathbf{M} \times (-\hat{y})\big|_{y=0} = 10x\,\hat{z} \times (-\hat{y}) = \hat{x}\,10x \quad \mathrm{A/m}$

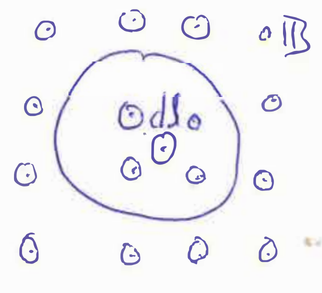
$\underline{y=b}$ $\quad \mathbf{J}_{ms} = \mathbf{M} \times (\hat{y})\big|_{y=b} = 10x\,\hat{z} \times (\hat{y}) = -\hat{x}\,10x \quad \mathrm{A/m}$

$\underline{z=0}$ $\quad \mathbf{J}_{ms} = \mathbf{M} \times (-\hat{z})\big|_{z=0} = 10x\,\hat{z} \times (-\hat{z}) = 0$

$\underline{z=b}$ $\quad \mathbf{J}_{ms} = \mathbf{M} \times \hat{z}\big|_{z=b} = 10x\,\hat{z} \times \hat{z} = 0$

4

a) Flödet i slingan kan beräknas som



$$\phi = \iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$$

då B inte är rumsberoende kan vi skriva ϕ som fältet gånger arean

$$\phi = \pi r^2 B$$ där vi även antagit att $\mathbf{B} \parallel d\mathbf{S}$

I uttrycket är både r & B tidsberoende.

Vi beräkna därför

$$V_{ind} = -\frac{d\phi}{dt} = -\pi B \left(2r \frac{dr}{dt}\right) - \pi r^2 \frac{dB}{dt}$$

med $r = vt \Rightarrow \frac{dr}{dt} = v$

med $B = B_0(1+kt) \Rightarrow \frac{dB}{dt} = B_0 k$

Detta ger $V_{ind} = -vB(2\pi r) - B_0 k \pi r^2 =$

$$= -v B_0 (1+kt) 2\pi vt - B_0 k \pi (vt)^2$$

$$= -B_0 2\pi v^2 t - k B_0 3\pi (vt)^2$$

5 WAVES

$$\vec{E} = (12\hat{x} + 9\hat{y})\, e^{-(3x-4y)} \quad e^{-j(3x-4y)}$$

a) $$\vec{E} = (12\hat{x} + 9\hat{y})\, e^{-\alpha\hat{k}\cdot\hat{r}} \quad e^{-j\beta\hat{k}\hat{r}}$$

$$\alpha\hat{k} = \beta\hat{k} = (3,-4,0)$$

$$\hat{r} = (x, y, z)$$

$\Rightarrow$ we know that $|\hat{k}| = 1$, so:

$$\alpha = \beta = \sqrt{x^2+y^2+z^2} = \sqrt{9+16} = 5$$

$$\Rightarrow \hat{k} = \frac{1}{5}(3,-4,0)$$

$\Rightarrow$ wave propagates in $(x, y, z) = (3,-4,0)$

b) $$\vec{E}\cdot\hat{k} = \frac{1}{5}(E_x k_x + E_y k_y) = \frac{1}{5}(12\cdot 3 - 9\cdot 4) = 0$$

$\Rightarrow$ $\vec{E} \perp \hat{k}$ $\Rightarrow$ plane wave.

c) $$\vec{H} = \frac{1}{Z}\hat{k}\times\vec{E} = \frac{1}{Z\cdot 5}\begin{vmatrix} x & y & z \\ 3 & -4 & 0 \\ 12e^{-\gamma\hat{k}\hat{r}} & 9e^{-\gamma\hat{k}\hat{r}} & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{5\cdot Z}\left(\hat{z}\cdot 75\, e^{-\gamma\hat{k}\hat{r}}\right) =$$

$$= \hat{z}\,\frac{15}{Z}\, e^{-\gamma\hat{k}\hat{r}}$$ where $\gamma = \alpha + j\beta$

$$Z = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma}}$$

The Poynting's vector is given as:

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}^*$$

And its average value is:

$$\vec{S}_{med} = \frac{1}{2} Re\{\vec{S}\}$$

For a TEM wave propagating in the r direction in vacuum we have

$$\vec{H} = \frac{1}{Z_0} \hat{r} \times \vec{E}$$

Which gives:

$$\vec{S}_{med} = \frac{1}{2} Re\{\vec{E} \times \vec{H}^*\} = \frac{1}{2} Re\left\{\vec{E} \times \left(\frac{1}{Z_0} \hat{r} \times \vec{E}\right)^*\right\} = \frac{1}{2Z_0} |\vec{E}|^2 \hat{r}$$

For a Hertzian dipole in the far field we have

$$\vec{E} = \hat{\theta} Z_0 \frac{j\omega l I \sin\theta}{4\pi c r} e^{-j\omega r/c}$$

The dipole momentum is $\vec{p} = p_0 \hat{z}$ and $p_0 = \frac{lI}{j\omega}$

Therefore,

$$\vec{E} = -\hat{\theta} Z_0 \frac{\omega^2 p_0 \sin\theta}{4\pi c r} e^{-j\omega r/c}$$

And finally, we have

$$\vec{S}_{med} = Z_0 \frac{\omega^4 p_0^2 \sin^2\theta}{32\pi^2 c^2 r^2} \hat{r}$$

b) The power radiated from a surface is given as:

$$P = \iint \vec{S}_{med} \cdot \boldsymbol{n} dS = \iint Z_0 \frac{\omega^4 p_0^2 \sin^2\theta}{32\pi^2 c^2 r^2} \hat{r} \cdot \hat{r}\, r^2 \sin\theta\, d\theta d\varphi$$

$$= Z_0 \frac{\omega^4 p_0^2}{16\pi c^2} \int \sin^3\theta\, d\theta$$

The ratio between the total power radiated in the cone to the total power radiated from the antenna is

$$\frac{P_{cone}}{P_{total}} = \frac{\int_0^{\pi/3} \sin^3\theta\, d\theta}{\int_0^{\pi} \sin^3\theta\, d\theta} = \frac{\left[\frac{1}{3}\cos^3\theta - \cos\theta\right]_0^{\pi/3}}{\left[\frac{1}{3}\cos^3\theta - \cos\theta\right]_0^{\pi}} = \frac{5/24}{4/3} = \frac{5}{32} = 0.15625$$