

# Tentamen i Vektorfält och elektromagnetisk fältteori, EEN190

- Tid:** 2024-03-11, kl. 8:30-13:30
- Hjälpmedel:** Physics Handbook  
Beta Mathematics Handbook  
Typgodkänd kalkylator  
Formelsamlingar i vektorfält och elektromagnetisk fältteori med egna formler skrivna på sista sidan.  
Inga andra anteckningar eller lösta tal är tillåtna.
- Förfrågningar:** Andreas Fhager
- Lösningar:** Anslås på kursens hemsida senast första vardagen efter tentan
- Resultatet:** Distribueras via LADOK
- Granskning:** Plats och tid annonseras på kurshemsidan
- Om rättningen:** Svar och lösningar skall motiveras och förklaras.  
Skriv tydligt och förklara vad ni gör i er lösning och vilken metod som används.  
Poängavdrag görs för otydliga figurer och lösningar samt lösningar som inte förklaras eller motiveras.  
Mindre allvarliga fel och rena räknefel leder till mindre avdrag.  
Mer allvarliga, principiella fel och metodfel leder till större avdrag.  
Poängavdrag görs även för utelämnade referensriktningar, dimensionsfel och uppenbart orimliga svar.
- Betygsgränser:** Betyg 3: Totalt 36, varav  $\geq 21$  på problemdelen och  $\geq 8$  på teorin  
Betyg 4: Totalt 48, varav  $\geq 26$  på problemdelen och  $\geq 10$  på teorin  
Betyg 5: Totalt 60, varav  $\geq 31$  på problemdelen och  $\geq 12$  på teorin

***Svaren på teoridelen skall ges på tesen som lämnas in.***

Teorifrågorna besvaras genom att markera en av rutorna efter varje påstående. En och endast en ruta på varje rad skall markeras. De tre svarsalternativen är *Ja*, *Vet ej* och *Nej*. Alternativet *Vet ej* är markerat med "?" på tesen. För varje påstående ger korrekt svar +0,2 poäng och inkorrekt svar -0,2 poäng. *Vet ej* är neutralt och ger 0 poäng. Förståelseuppgifterna ger maximalt 1 poäng och lägst -1 poäng och man kan därför få 1 poäng även med ett *Vet ej* svar.

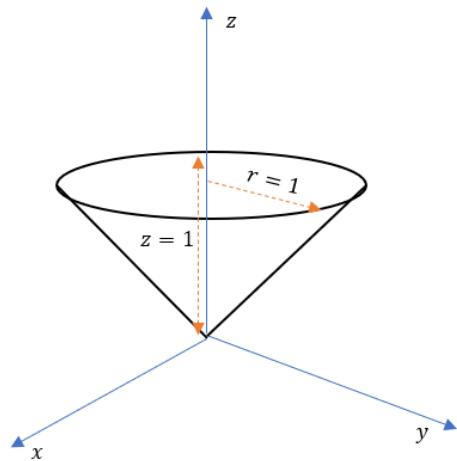
**Anonym kod:** \_\_\_\_\_

**Lycka till!**

# 1

## Problemlösningsdel (12 poäng)

- a) Ett vektorfält definieras som  $\mathbf{F} = (2x \cos y - 2z^3, 3 + 2y e^z - x^2 \sin y, y^2 e^z - 6xz^2)$ . Göra en beräkning för att avgöra om  $\mathbf{F}$  är ett konservativt fält. Om så är fallet bestäm också en potential till fältet. (4 poäng)
- b) Visa (till exempel med hjälp av indexnotation) att  $\nabla(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = \mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{v}) + \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{u}) + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{u}$ . ( $\mathbf{u}$  och  $\mathbf{v}$  är vektorfält) (4 poäng)
- c) Vektorfältet  $\mathbf{A} = \sin(\phi/2) \mathbf{a}_\phi$  är givet i sfäriska koordinater. Använd fältet för att verifiera Stokes sats över ett konformat skal. Den bredaste cirkelformade delen (toppen) av konen har radie  $r = 1$  och ligger centrerad i  $z = 1$  samt är parallell med  $xy$ -planet, (se figuren). Visa att Stokes sats gäller genom att explicit beräkna en ytintegral och motsvarande linjeintegral. (4 poäng).



## 2 (Elektrostatik)

### Problemlösningsdel (8 poäng)

En kondensator består av två koaxiala metalldrövar med radierna  $R_i = 8$  mm respektive  $R_o = 13$  mm. Man kan anta att cylindrarna är mycket långa och raka. Mellan cylindrarna finns ett dielektriskt material med en relativ permittivitet som varierar som funktion av radien enligt  $\epsilon_r(r) = 2 + 4/r$ , där  $r$  är radien angiven i millimeter.

- a) Beräkna kapacitansen per längdenhet hos kondensatorn.  
 b) Bestäm systemets totala elektrostatiske energi per längdenhet.

### Teoridel (4 poäng)

c) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

- |   | ja                       | ?                        | nej                      |
|---|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| För att fullständigt beskriva den grundläggande fysiken i <i>elektrostatiken</i> räcker ett av Maxwells postulat. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| För att fullständigt beskriva den grundläggande fysiken i <i>elektrostatiken</i> behövs två av Maxwells postulat. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| I <i>elektrostatiken</i> är D-fältet är konservativt.   | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| I <i>elektrostatiken</i> är E-fältet är konservativt.   | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| Den grundläggande fysiken i <i>elektrostatiken</i> bygger <b>bland annat</b> på att B-fältet är källfritt.        | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| Den grundläggande fysiken i <i>elektrostatiken</i> bygger <b>bland annat</b> på att E-fältet är källfritt.        | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

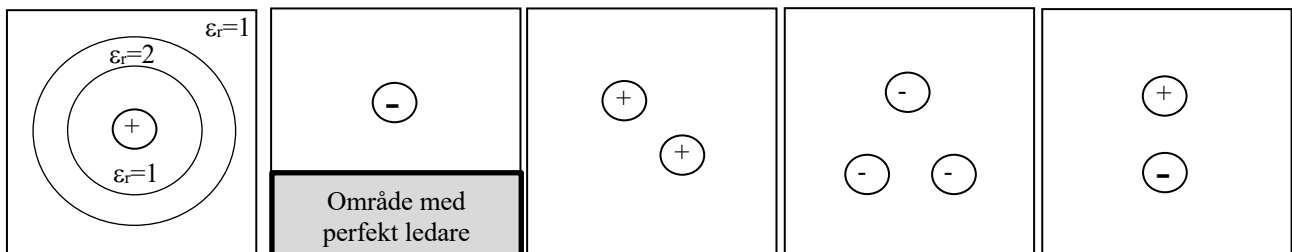
d) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

- |   | ja                       | ?                        | nej                      |
|---|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| Det statiska E-fältet inuti en perfekt ledande metall är alltid $E = 0$ .   | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| Fältet utanför ett oladdat metallskal med en punktladdning i centrum av håligheten är lika stort som fältet från enbart metallskalet om man tar bort punktladdningen.                   | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| Fältet utanför ett oladdat metallskal med en punktladdning i centrum av håligheten är lika stort som fältet från enbart punktladdningen om man tar bort metallskalet.                   | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| D-fältet, $\mathbf{D}$ , har enheten $C/m^2$ .  | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| Poissons ekvation kan lösas numeriskt, och lösningen beräknas därmed i ett antal gridpunkter. De numeriska värdena på potentialen som beräknas i respektive gridpunkt är exakta värden. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| Speglingsmetoden kan användas för att lösa Poissons ekvation i vissa geometrier med lämplig symmetri.   | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

e) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga? (Frågan gäller elektostatik)

- |  | ja                       | ?                        | nej                      |
|--|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| På litet avstånd från en ändligt lång linjeladdning så avtar E-fältet som $1/R^2$ .                      | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| På stort avstånd från en ändligt lång linjeladdning så avtar E-fältet som $1/R^2$ .                      | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| På stort avstånd från en elektrisk dipol avtar potentialen som $1/R$ .                                   | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| Exakt resistansberäkning kan göras om att man känner exakt potential- eller strömfördelningen i ledaren. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| Vid resistansberäkning ger antagande om approximativ potentialfördelning en övre gräns på resistansen.   | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| Vid resistansberäkning ger antagande om approximativ strömfördelning en övre gräns på resistansen.       | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

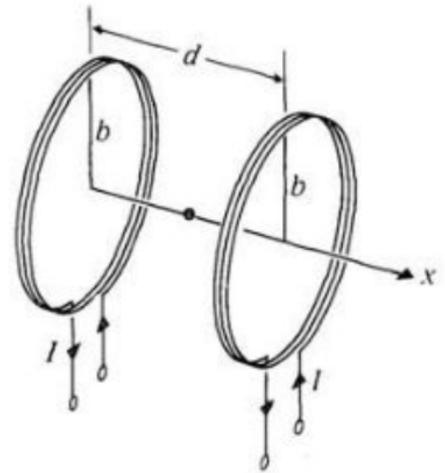
f) Skissa **ekvipotentialytorna** i planet runt följande laddningsfördelningar. Alla bilder visar tvärsnitt av olika konfigurationer av positiva och negativa små sfäriska laddningar. Antag att laddningarna befinner sig ensamma i vacuum (om inget annat anges). För poäng ska det principiella utseendet vara korrekt i det markerade kvadratiske området för respektive konfiguration. (Korrekt svar ger +0,2p och felaktigt svar ger -0,2p på samma sätt som övriga teorifrågor) (1 poäng)



# 3 (Magnetostatik)

## Problemlösningsdel (8 poäng)

Två identiska, koaxiala spolar, var och en med  $N$  varv och radie  $b$ , är åtskilda av ett avstånd  $d$ , som visas i figuren. Ett sådant par spolar används för att skapa ett magnetfält som är approximativt konstant i rummet i mittpunktsområdet. En sådan anordning kallas för en Helmholtz-spole. Antag att strömmen  $I$  flyter i respektive spole i samma riktning, se figuren.



- a) Beräkna den magnetiska flödestätheten  $\mathbf{B} = B_x \mathbf{a}_x$  vid en punkt mitt emellan spolarna.
- b) Visa att  $dB_x/dx$  försvinner vid mittpunkten.
- c) Bestäm ett samband mellan  $b$  och  $d$  så att  $d^2 B_x/dx^2$  också försvinner i mittpunkten mellan spolarna.

## Teoridel (4 poäng)

d) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

- |  |                          |                          |                          |
|--|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| För att fullständigt beskriva den grundläggande fysiken i magnetostatiken räcker ett av Maxwells postulat. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| För att fullständigt beskriva den grundläggande fysiken i magnetostatiken behövs två av Maxwells postulat. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| I magnetostatiken är B-fältet är källfritt.  | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| I magnetostatiken är H-fältet är källfritt.  | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| Den grundläggande fysiken i magnetostatiken bygger bland annat på att B-fältet är rotationsfritt.          | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| Den grundläggande fysiken i magnetostatiken bygger bland annat på att E-fältet är rotationsfritt.          | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

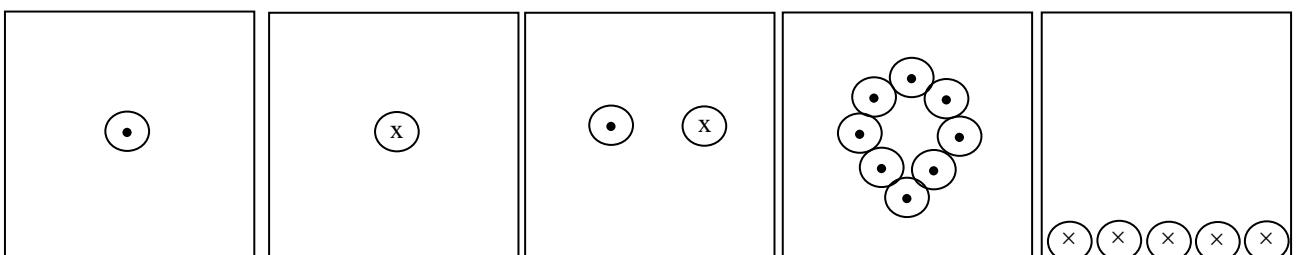
e) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga? (Frågan gäller magnetostatik)

- |   |                          |                          |                          |
|---|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| Strömstäthetsfältet, $\mathbf{J}$ , har enheten $A/m^3$ .                       | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| Kontinuitetsekvationen formuleras som $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$ i statiken. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| $\mathbf{J}$ -fältet är riktat åt samma håll som $\mathbf{A}$ -fältet.          | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| Ohms lag gäller för en konvektionsström.  | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| Ohms lag gäller för en konduktionsström..                                       | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| Ett blixtnedslag är ett exempel på en konduktionsström.                         | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

f) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

- |   |                          |                          |                          |
|---|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| B-fältets normalkomponent är kontinuerlig i gränsen mellan två material om det går en ytström i gränsytan.                                  | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| B-fältets tangentialkomponent är kontinuerlig i gränsen mellan två material om det går en ytström i gränsytan.                              | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| Randvillkoren för B-fältet härleds från kontinuitetsekvationen.   | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| Magnetiska dipoler används för att modellera magnetiska egenskaper.   | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| En stark permanentmagnet har ett linjärt samband mellan B- och H-fältet.  | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| Om ett material har konstant magnetisering, dvs $\mathbf{M}$ är konstant i rummet, är magnetiseringsströmstätheten också konstant i rummet. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

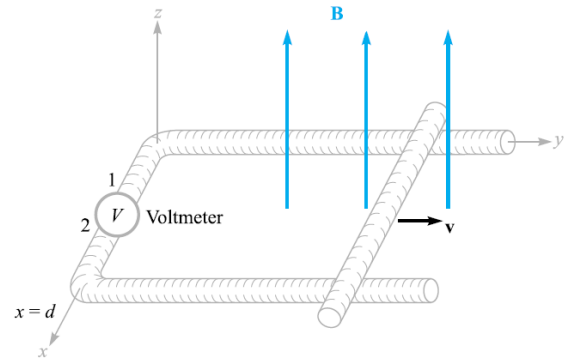
g) Skissa vektorpotentialerna ( $\mathbf{A}$ ) runt följande strömmar. Alla bilder visar tvärsnitt av olika konfigurationer av strömmar som går in eller ut ur papperets plan, antag att strömmarna befinner sig ensamma i vakuum (om inget annat anges). För poäng ska det principiella utseendet vara korrekt i hela det markerade kvadratiska området för respektive konfiguration. (Korrekt svar ger +0,2p och felaktigt svar ger -0,2p på samma sätt som övriga teorifrågor) (1 poäng)



# 4

## Problemlösningsdel (8 poäng)

a) Figuren visar en sluten krets bestående av två parallella ledare som i ena änden är förbundna med en högresistansvoltmeter av försumbara dimensioner och i andra änden av en stav som glider med en hastighet  $v$  på ledarna. Låt  $\mathbf{B} = B_0 \sin \omega t \mathbf{a}_z$  samt antag att hastigheten  $v$  är konstant och staven är belägen i vid  $y = 0$  vid  $t = 0$ . Beräkna den inducerade emk'n (spänningen) i voltmeteren som funktion av tiden,  $t$ .



## Teoridel (4 poäng)

b) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

För att fullständigt beskriva den grundläggande fysiken i *tidsvarierande fältproblem* krävs två av Maxwells postulat.

ja ? nej

För att fullständigt beskriva den grundläggande fysiken i *tidsvarierande fältproblem* krävs fyra av Maxwells postulat.

Den grundläggande fysiken i *problemlösningsdelen ovan* bygger bl.a. på att B-fältet är källfritt.

Den grundläggande fysiken i *problemlösningsdelen ovan* bygger bl.a. på att E-fältet är källfritt.

Den grundläggande fysiken i *problemlösningsdelen ovan* bygger bl.a. på att B-fältet är virvelfritt.

Den grundläggande fysiken i *problemlösningsdelen ovan* bygger bl.a. på att E-fältet är virvelfritt.

c) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

ja ? nej

I elektromagnetismen (dynamik) är E-fältets tangentialkomponent kontinuerlig i gränsen mellan två material med olika permittivitet.

I elektromagnetismen (dynamik) är E-fältets normalkomponent kontinuerlig i gränsen mellan två material med olika permittivitet.

I elektromagnetismen (dynamik) är H-fältets tangentialkomponent kontinuerlig i gränsen mellan två material med olika permeabilitet.

I elektromagnetismen (dynamik) är H-fältets normalkomponent kontinuerlig i gränsen mellan två material med olika permeabilitet.

E-fältets tangentialkomponent på en perfekt ledande yta är alltid noll för tidsvarierande fält.

E-fältets normalkomponent på en perfekt ledande yta är alltid noll för tidsvarierande fält.

d) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

ja ? nej

Generellt kan tidsberoende fältproblem lösas mha Laplace's ekvation.

För tidsberoende fält ger Laplace's ekvation upphov till lösningar som beskrivs som retarderade potentialer.

Begreppet retarderade potentialer speglar det faktum att ingen kan färdas snabbare än ljuset.

En tidsvarierande ström i en ledare ger enbart upphov till ett tidsvarierande B-fält i området runt ledaren.

Den magnetiska vektorpotentialen relateras till magnetfältet som  $\nabla \cdot \mathbf{A} = \mathbf{B}$ .

Den magnetiska vektorpotentialen relateras till magnetfältet som  $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}$ .

e) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

ja ? nej

Lentz lag är ett av Maxwell's postulat.

Lentz lag säger att inducerade strömmar förstärker förändringarna i det pålagda magnetfältet.

Enligt Lentz lag så induceras strömmar i en metallskiva som ligger stilla i ett statiskt magnetfält.

Den magnetiska energin i ett system är lika med den energi som försvinner i Ohmska förluster i den strömkrets som används för att generera magnetfältet.

Den lagrade energin hos en spole har ett kvadratisk beroende av strömmen i spolen.

Den lagrade energin hos två spolar som är magnetiskt kopplade till varandra fås genom att summera uttrycken på energin hos respektive spole.

# 5

## Problemlösningsdel (8 poäng)

En sinusformad plan våg har det komplexa E-fältet

$$\vec{E} = 10e^{-j(6x-8z)}\hat{y} \text{ (V/m)}$$

och propagerar i vakuum in mot ett perfekt ledande plan beläget vid  $z = 0$ .

a) Vad är frekvensen och propagationsriktningen hos vågen?

b) Beräkna E- och H-fälten för den reflekterade vågen.

### Teoridel (4 poäng)

c) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

ja ? nej

För att fullständigt beskriva den grundläggande fysiken i uppgiften ovan räcker två av Maxwells postulat.

För att fullständigt beskriva den grundläggande fysiken i uppgiften ovan behövs alla fyra Maxwells postulat.

Den grundläggande fysiken i uppgiften ovan bygger **endast** på att rotationen av E-fältet är lika med minus tidsderivatan av B-fältet.

Den grundläggande fysiken i uppgiften ovan bygger **endast** på att B-fältet är divergensfritt.

Den grundläggande fysiken i uppgiften ovan bygger **endast** på att B-fältet är rotationsfritt.

Den grundläggande fysiken i uppgiften ovan bygger **endast** på att divergensen av D-fältet är lika med volym-laddningstätheten av fria laddningar.

d) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

ja ? nej

Beräkning med komplexa fält,  $j\omega$ -metoden, bygger på att man kan anta att fälten varierar cosinusformat (eller sinusformat) i tiden.

Beräkning med komplexa fält,  $j\omega$ -metoden, kan endas användas för beräkningar på plana vågor.

Det skulle vara möjligt att definiera tidsberoendet för komplexa fält som  $e^{-i\omega t}$ .

Att ett material är anisotrop betyder att det har olika materialegenskaper i olika riktningar.

Att ett material är dispersivt betyder att ljushastigheten varierar med frekvensen.

Att ett material är homogent betyder att materialegenskaperna är konstanta i rummet.

e) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

ja ? nej

I verkligheten existerar inga plana vågor enligt den strikta definitionen av en plan våg (uniform plane wave) som vi använt i kursen.

En plan våg (benämnd uniform plane wave i kursboken) kan ha en B-fältsvektor riktad i utbredningsriktningen.

En plan våg (uniform plane wave) kan enbart uttryckas på komplex form om det har ett harmoniskt varierande tidsberoende, (med andra ord ett cosinusformat / sinusformat tidsberoende).

En plan våg (uniform plane wave) har alltid en B-fältsvektor riktad vinkelrätt mot utbredningsriktningen.

En plan våg (uniform plane wave) kan ha en E-fältsvektor som riktad parallellt med B-fältsvektorn.

En plan våg (uniform plane wave) som transmitteras genom en gränsyta bryts enligt Snells lag om den propagerar in snett mot gränsytan.

f) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

ja ? nej

Vid beräkning med Fresnell's ekvationer behöver man inte ta hänsyn till vågens polarisering.

Vid beräkning av reflektion och transmission vid vinkelrätt infall behöver man inte ta hänsyn till vågens polarisering.

Vid beräkningar med Fresnell's ekvationer definieras infallsplanet som det plan som skiljer de två områdena med olika materialparametrar åt.

Brewstervinkeln definieras både för vågor med polarisering parallellt och vinkelrätt mot infallsplanet.

Att ljus som propagerar inuti en optisk fiber "stannar kvar" inuti fibern kan förklaras med att ljuset som reflekteras i fiberväggen inuti fibern reflekteras vid Brewstervinkeln.

Vinkeln vid vilken Brewstervinkeln inträffar härleds från Fresnell's ekvationer

# 6

## Problemlösningsdel (8 poäng)

a) En Hertzdipol med längden  $dl$  ligger orienterad i  $+y$ -riktningen och är placerad på avstånd  $d$  ovanför ett perfekt ledande plan. Hertzdipolen drivs av en harmoniskt varierande (sinusformad) ström. Beräkna och skissa E-fältets vinkelberoende i  $xz$ -planet om  $d = \lambda/4$ .

(Ett annat sätt att formulera samma fråga: Skissa strålningsdiagrammet i  $xz$ -planet)

Ledning: I uttrycken i formelsamlingen ligger Hertzdipolen orienterad längs  $z$ -axeln. Om dipolen i stället är orienterad i godtycklig riktning,  $k$ -riktningen, så kan elementfaktorn i uttrycket i stället beräknas som  $|\hat{a}_R \times \hat{k}|$ .

## Teoridel (4 poäng)

b) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

ja ? nej

För att fullständigt beskriva den grundläggande fysiken i uppgiften ovan räcker två av Maxwells postulat.

För att fullständigt beskriva den grundläggande fysiken i uppgiften ovan behövs alla fyra Maxwells postulat.

Den grundläggande fysiken i uppgiften ovan bygger **bland annat** på att rotationen av E-fältet är lika med minus tidsderivatan av B-fältet.

Den grundläggande fysiken i uppgiften ovan bygger **bland annat** på att B-fältet är källfritt.

Den grundläggande fysiken i uppgiften ovan bygger **bland annat** på att rotationen av B-fältet är lika med minus tidsderivatan av E-fältet plus strömtäthetsfältet.

Den grundläggande fysiken i uppgiften ovan bygger **bland annat** på att divergensen av D-fältet är lika med volymladdningstätheten av fria laddningar.

c) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

ja ? nej

Vågimpedansen kan vara ett komplext tal.

Vågimpedansen för vakuum är ett reellt tal.

Vågimpedansen för ett material med förluster, dvs  $\sigma > 0$ , är ett reellt tal.

För en mycket god ledare gäller normalt att  $\sigma/\omega\mu \gg 1$

För en mycket god ledare gäller normalt att  $\sigma/\omega\epsilon \ll 0$

Inträngningsdjupet ökar med ökande frekvens.

d) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

ja ? nej

Ett strålningsdiagram säger något om hur en antennens riktningsberoende ser ut.

Antennförstärkningen säger något om hur en antennens riktningsberoende ser ut.

Direktiviteten säger något om hur en antennens riktningsberoende ser ut.

Strålningsresistansen säger något om hur en antennens riktningsberoende ser ut.

En bra och effektiv sändarantenn karakteriseras av att dess strålningsresistans är hög.

Fälten som sänds ut från en antenn är exempel på retarderade potentialer.

e) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

ja ? nej

En Hertzdipol är en våglängd lång.

Strömmen i antennen är konstant längs en Hertzdipol i varje given tidpunkt.

Strömmen i en Hertzdipol är konstant i tiden.

Strålningsresistansen hos en Hertzdipol är större än för en halv vågsdipol.

Hertzdipolen har ett isotropt strålningsdiagram, dvs lika mycket effekt strålar ut i alla riktningar.

Fältet från en Hertzdipol kan härledas mha Biot-Savarts lag.

1

Solution to the vector field problem:

a)

$$\mathbf{F} = (2xz \cos y - 2z^3, 3 + 2ye^z - x^2 \sin y, y^2 e^z - 6xz^2)$$

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{F} &= \left( \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}, \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}, \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) = \\ &= (2ye^z - 2ye^z, -6z^2 + 6z^2, -2x \sin(y) + 2x \sin(y)) = (0, 0, 0) \end{aligned}$$

thus  $\mathbf{F}$  is irrotational and therefore conservative.

$$\nabla \phi = \left( \frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y}, \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) = \mathbf{F}$$

Integrating the first component with respect to x:

$$\phi = \int 2xz \cos y - 2z^3 dx = x^2 \cos y - 2xz^3 + g(y, z).$$

Equating the second component:

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = -x^2 \sin y + \frac{\partial g(y, z)}{\partial y} = 3 + 2ye^z - x^2 \sin y \Rightarrow \frac{\partial g(y, z)}{\partial y} = 3 + 2ye^z$$

$$\Rightarrow g(y, z) = \int 3 + 2ye^z dy = 3y + y^2 e^z + h(z)$$

Equating the third component:

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = -6xz^2 + y^2 e^z + \frac{dh(z)}{dz} = y^2 e^z - 6xz^2 \Rightarrow \frac{dh(z)}{dz} = 0 \Rightarrow h(z) = c.$$

$$\phi = x^2 \cos y - 2xz^3 + 3y + y^2 e^z + c.$$

b)

Prove  $\nabla(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = \mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{v}) + \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{u}) + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{u}$

Starting from the right-hand side in suffix notation:

$$\begin{aligned} (\mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{v}))_i &= \epsilon_{ijk} u_j (\nabla \times \mathbf{v})_k = \epsilon_{ijk} u_j \epsilon_{klm} \frac{\partial v_m}{\partial x_l} = \epsilon_{ijk} \epsilon_{lmn} u_j \frac{\partial v_m}{\partial x_l} = (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) u_j \frac{\partial v_m}{\partial x_l} \\ &= u_m \frac{\partial v_m}{\partial x_i} - u_l \frac{\partial v_l}{\partial x_i} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{u}))_i &= \epsilon_{ijk} v_j (\nabla \times \mathbf{u})_k = \epsilon_{ijk} v_j \epsilon_{klm} \frac{\partial u_m}{\partial x_l} = \epsilon_{ijk} \epsilon_{lmn} v_j \frac{\partial u_m}{\partial x_l} = (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) v_j \frac{\partial u_m}{\partial x_l} \\ &= v_m \frac{\partial u_m}{\partial x_i} - v_l \frac{\partial u_l}{\partial x_i} \end{aligned}$$

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{v})_i = u_l \frac{\partial v_l}{\partial x_i}$$

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{u})_i = v_l \frac{\partial u_l}{\partial x_i}$$



Summing up equations I to IV:

$$u_m \frac{\partial v_m}{\partial x_i} - u_l \frac{\partial v_i}{\partial x_l} + v_m \frac{\partial u_m}{\partial x_i} - v_l \frac{\partial u_i}{\partial x_l} + u_l \frac{\partial v_i}{\partial x_l} + v_l \frac{\partial u_i}{\partial x_l} = u_m \frac{\partial v_m}{\partial x_i} + v_m \frac{\partial u_m}{\partial x_i}$$

The left-hand side in suffix notation:

$$(\nabla(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}))_i = \frac{\partial}{\partial x_i} (u_m v_m) = u_m \frac{\partial v_m}{\partial x_i} + v_m \frac{\partial u_m}{\partial x_i} \text{ which is equal to the right-hand side.}$$

c)

Stoke's theorem:

$$\int_S \nabla \times \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = \oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$$

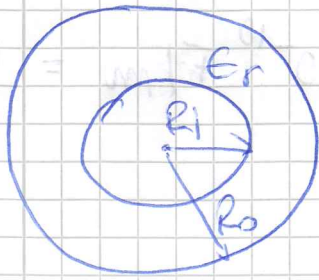
If  $S$  is the cone's surface and  $C$  the circle at  $z=1$  we have for the left-hand side:

$$\begin{aligned} \int_S \nabla \times \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} &= \iint \frac{1}{R \sin(\theta)} (\cos(\theta) \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \hat{\mathbf{a}}_R - \sin(\theta) \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \hat{\mathbf{a}}_\theta) \cdot R \sin(\theta) dR d\phi \hat{\mathbf{a}}_\theta \\ &= -\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \int_0^{\sqrt{2}} \int_0^{2\pi} \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) dR d\phi = -\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{2} 2 (-\cos(\pi) + \cos(0)) = 4 \end{aligned}$$

$$\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \int_0^{2\pi} \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \hat{\mathbf{a}}_\phi \cdot r d\phi \hat{\mathbf{a}}_\phi = 2(-\cos(\pi) + \cos(0)) = 4$$

# ELECTROSTATICS

2



$$\begin{cases} R_1 = 8 \text{ mm} \\ R_0 = 13 \text{ mm} \\ \epsilon_r = 2 + 4/r \end{cases}$$

a) calculate capacitance per length

=> Apply Gauss' law to a cylindrical surface

$$Q = \int_{\mathcal{S}} \vec{D} \cdot d\vec{S}$$

$$\text{where } \vec{D} = \epsilon_0 \left(2 + \frac{4}{r}\right) \vec{E} = \epsilon_0 \left(2 + \frac{4}{r}\right) \bar{E} \hat{r}$$

$\vec{E} = \bar{E} \hat{r}$

$$Q = \int_{z=0}^{\ell} \int_{\theta=0}^{2\pi} \epsilon_0 \left(2 + \frac{4}{r}\right) \bar{E} \hat{r} \cdot (r d\theta dz \hat{r})$$

$$\Rightarrow Q = \epsilon_0 \left(2 + \frac{4}{r}\right) \bar{E} \cdot 2\pi r \ell$$

$$\Rightarrow \bar{E} = \frac{Q}{4\pi \ell \epsilon_0 (r+2)}$$

So,

$$V = - \int_{R_0}^{R_1} \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_{R_0}^{R_1} \frac{Q}{4\pi \ell \epsilon_0 (r+2)} \hat{r} \cdot \hat{r} dr =$$

$$= \frac{Q}{4\pi \ell \epsilon_0} \left[ \ln(r+2) \right]_{r=R_0}^{r=R_1} = \frac{Q}{4\pi \ell \epsilon_0} \ln \frac{R_0+2}{R_1+2}$$

$$= \frac{Q}{4\pi \ell \epsilon_0} \ln \frac{15}{10}$$

SUBSTITUTE  
NUMERICAL VALUES

FINALLY:

$$C = Q/V \Rightarrow C/\epsilon = \frac{Q/\ell}{V} = \frac{4\pi\epsilon_0}{\ln 1.5} \approx 27.4 \text{ nF/m}$$

b) ENERGY:

$$W_e = \frac{1}{2} \int_V \vec{E} \cdot \vec{D} \, dV \quad \epsilon = \epsilon_r \epsilon_0 = 1 \cdot \epsilon_0$$

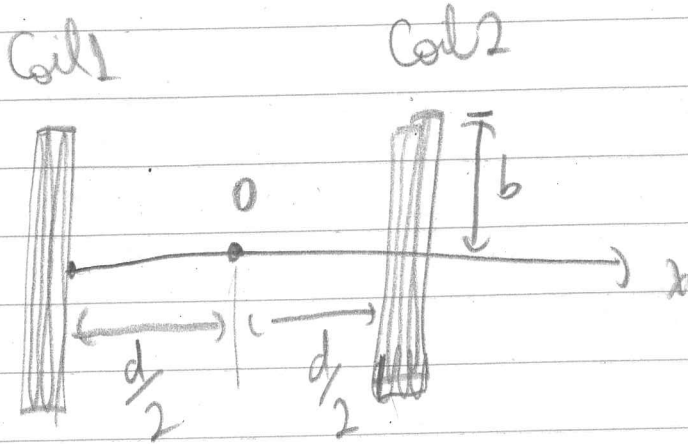
$$\text{with } \vec{E} = \frac{Q}{2\pi\epsilon r L} \hat{r} \quad \text{and } \vec{D} = \frac{Q}{2\pi r L} \hat{r}$$

$$\Rightarrow W_e = \frac{1}{2} \int_{R_i}^{R_o} \frac{1}{\epsilon} \left( \frac{Q}{2\pi r L} \right)^2 2\pi L \frac{1}{r^2} r \, dr$$

$$\Rightarrow W_e = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon L} \ln \frac{R_o}{R_i}$$

==

3



$$B = \frac{N \mu_0 I b^2}{2} \left\{ \frac{1}{\left[ \left( \frac{d}{2} + x \right)^2 + b^2 \right]^{3/2}} - \frac{1}{\left[ \left( \frac{d}{2} - x \right)^2 + b^2 \right]^{3/2}} \right\}$$

a)  $x = 0$

$$B = \frac{N \mu_0 I b^2}{\left[ \left( \frac{d}{2} \right)^2 + b^2 \right]^{3/2}}$$

b)  $\frac{dB}{dx} = \frac{N \mu_0 I b^2}{2} \left\{ - \frac{3 \left( \frac{d}{2} + x \right)}{\left[ \left( \frac{d}{2} + x \right)^2 + b^2 \right]^{5/2}} + \frac{3 \left( \frac{d}{2} - x \right)}{\left[ \left( \frac{d}{2} - x \right)^2 + b^2 \right]^{5/2}} \right\}$

b) At  $x=0$

$$\frac{dB_x}{dz} = 0$$

$$c) \frac{d^2 B_x}{dx^2} = - \frac{3 N \mu_0 I b^2}{2} \left\{ \frac{1}{[(d/2 + x)^2 + b^2]^{5/2}} \right.$$

$$\left. + \frac{1}{[(d/2 - x)^2 + b^2]^{5/2}} - \frac{5(d/2 - x)^2}{[(d/2 - x)^2 + b^2]^{7/2}} - \frac{5(d/2 + x)^2}{[(d/2 + x)^2 + b^2]^{7/2}} \right\}$$

$$x=0 \quad \frac{d^2 B_x}{dx^2} = - \frac{3 N \mu_0 I b^2}{2} \left\{ \frac{b^2 - 4(d/2)^2}{[(d/2)^2 + b^2]^{7/2}} \right\}$$

if  $b = d$  then  $\frac{d^2 B_x}{dx^2} = 0$   
at  $x=0$

4

the magnetic flux through Loop Area

$$\phi_m = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} =$$

$$= \int_0^{\omega t} \int_0^d B_0 \sin \omega t (\mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_z) dx dy$$

$$= B_0 \omega t d \sin \omega t$$

$$\text{emf} = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \frac{d\phi_m}{dt} = - B_0 d$$

$$= - B_0 \omega d [\sin \omega t + \omega t \cos \omega t] V$$

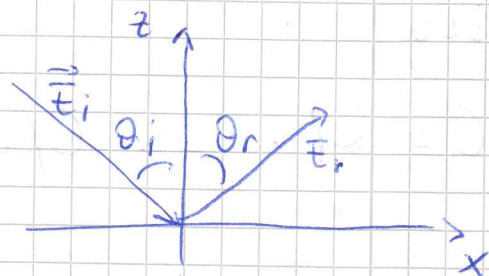


# WAVES

5

$$\vec{E}_i = 10 e^{-j(6x - 8z)} \hat{y}$$

$i$  = incident,  $r$  = reflected



a)  $\vec{k}_i = 6\hat{x} - 8\hat{z}$

$$|\vec{k}_i| = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$$

$$|\vec{k}_i|^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \Rightarrow f = \frac{|\vec{k}_i| \cdot c}{2\pi} = \frac{10 \cdot 3 \cdot 10^8}{2\pi} = \underline{4.8 \cdot 10^8 \text{ Hz}}$$

PROPAGATION DIRECTION:

$$\hat{e}_i = \frac{\vec{k}_i}{|\vec{k}_i|} = \frac{6\hat{x} - 8\hat{z}}{10} = \frac{3\hat{x} - 4\hat{z}}{5}$$

b) REFLECTED WAVE:

$$\hat{e}_r = \frac{\vec{k}_r}{k_r} = \frac{3\hat{x} + 4\hat{z}}{5}$$

$$\vec{E}_r = \rho \cdot 10 e^{-j(6x + 8z)} \hat{y}$$

$$\rho = -1 \quad \Big| \quad -\hat{y} 10 e^{-j(6x + 8z)}$$

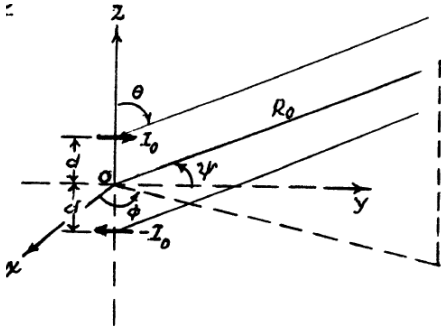
$$\vec{H}_r = \hat{e}_r \times \frac{\vec{E}_r}{j\omega}$$

$$\Big| \quad \frac{1}{j\omega} \left( \frac{3\hat{x} + 4\hat{z}}{5} \right) \times \left[ -10 e^{-j(6x + 8z)} \hat{y} \right]_s$$

$$= \frac{1}{j\omega} (-6\hat{z} + 8\hat{x}) e^{-j(6x + 8z)}$$

6

Solution to the antenna problem:



From Eq. (11-19b):

$$E_{\psi_1} = \frac{j I_0 d l \eta_0 \beta}{4 \pi R_0} e^{-j\beta(R_0 - d \cos\theta)} \sin\psi,$$

$$E_{\psi_2} = -\frac{j I_0 d l \eta_0 \beta}{4 \pi R_0} e^{-j\beta(R_0 + d \cos\theta)} \sin\psi,$$

where

$$\sin\psi = |\bar{a}_z \times \bar{a}_r|$$

$$= |(\bar{a}_x \sin\theta \cos\phi + \bar{a}_y \sin\theta \sin\phi + \bar{a}_z \cos\theta) \times \bar{a}_r|$$

$$= |\bar{a}_z \sin\theta \cos\phi - \bar{a}_x \cos\theta|$$

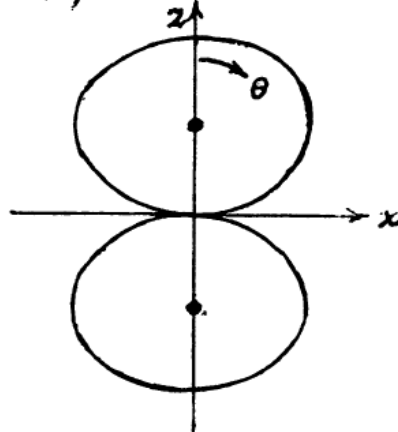
$$= \sqrt{1 - \sin^2\theta \sin^2\phi}.$$

$$E_{\psi} = E_{\psi_1} + E_{\psi_2} = j \frac{I_0 d l}{2\pi} \left( \frac{e^{-j\beta R_0}}{R_0} \right) \eta_0 \beta \sin(\beta d \cos\theta) \sqrt{1 - \sin^2\theta \sin^2\phi}.$$

$$\text{Pattern function } F(\theta, \phi) = |\sin(\beta d \cos\theta)| \sqrt{1 - \sin^2\theta \sin^2\phi}.$$

In the  $xz$ -plane:  $\phi = 0^\circ$ ,  $E_\theta = 0$ ,  $F_{xz}(\theta, 0^\circ) = |\sin(\beta d \cos\theta)|$ .

$$d = \lambda/4, \beta d = \pi/2:$$



$$F_{xz}(\theta, 0^\circ) = \left| \sin\left(\frac{\pi}{2} \cos\theta\right) \right|.$$