

Tentamen i Vektorfält och elektromagnetisk fältteori, EEN190

- Tid:** 2023-08-17, kl. 8:30-13:30
- Hjälpmedel:** Physics Handbook
Beta Mathematics Handbook
Typgodkänd kalkylator
Formelsamlingar i vektorfält och elektromagnetisk fältteori med egna formler skrivna på sista sidan.
Inga andra anteckningar eller lösta tal är tillåtna.
- Förfrågningar:** Andreas Fhager
- Lösningar:** Anslås på kursens hemsida senast första vardagen efter tentan
- Resultatet:** Distribueras via LADOK
- Granskning:** Plats och tid annonseras på kurshemsidan
- Om rättningen:** Svar och lösningar skall motiveras och förklaras.
Skriv tydligt och förklara vad ni gör i er lösning och vilken metod som används.
Poängavdrag görs för otydliga figurer och lösningar samt lösningar som inte förklaras eller motiveras.
Mindre allvarliga fel och rena räknefel leder till mindre avdrag.
Mer allvarliga, principiella fel och metodfel leder till större avdrag.
Poängavdrag görs även för utelämnade referensriktningar, dimensionsfel och uppenbart orimliga svar.
- Betygsgränser:** Betyg 3: Totalt 36, varav ≥ 21 på problemdelen och ≥ 8 på teorin
Betyg 4: Totalt 48, varav ≥ 26 på problemdelen och ≥ 10 på teorin
Betyg 5: Totalt 60, varav ≥ 31 på problemdelen och ≥ 12 på teorin

Svaren på teoridelen skall ges på tesen som lämnas in.

Teorifrågorna besvaras genom att markera en av rutorna efter varje påstående. En och endast en ruta på varje rad skall markeras. De tre svarsalternativen är *Ja*, *Vet ej* och *Nej*. Alternativet *Vet ej* är markerat med "?" på tesen. För varje påstående ger korrekt svar +0,2 poäng och inkorrekt svar -0,2 poäng. *Vet ej* är neutralt och ger 0 poäng. Förståelseuppgifterna ger maximalt 1 poäng och lägst -1 poäng och man kan därför få 1 poäng även med ett *Vet ej* svar.

Anonym kod: _____

Lycka till!

1

Problemlösningsdel (12 poäng)

- a) Ett vektorfält i kartesiska koordinater ges av uttrycket

$$\mathbf{F} = (x^2, y^2, z^2)$$

Beräkna linjeintegralen av fältet längs en rät linje från punkten $P_1 = (1, 1, 0)$ till punkten $P_2 = (4, -2, 0)$. (4 poäng)

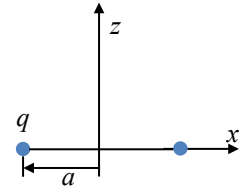
- b) Visa (till exempel med hjälp av indexnotation) att $\nabla \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = (\nabla \times \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} - (\nabla \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{u}$. (\mathbf{u} och \mathbf{v} är vektorfält) (4 poäng).

- c) Antag att en sfär med radie a har en rumsberoende densitet som ges av uttrycket $\rho = \rho_0(1 - r/a)$ där ρ_0 är en konstant. Av uttrycket förstår vi också att sfären är placerad med sitt centrum i origo så att r i uttrycket anger avståndet från origo. Beräkna den totala massan hos den del av sfären som befinner sig ovanför x-y-planet. (4 poäng)

2

Problemlösningsdel (8 poäng)

En tunn tråd påförs en linjeladdning och formas till en cirkulär ring med radie a . Ringen placeras i x - y planet, vid $z=0$. Antag att ringens totala laddning är q , och att trådens diameter, d , är mycket liten jämfört med ringens radie, a . Se även figur som visar ett tvärsnitt av ringen.



- a) Gör nödvändiga antaganden och beräkna potentialen på z -axeln. (Talet måste lösas genom en beräkning utgående från ringens linjeladdningstäthet, direkt användning av eventuell färdig formel kommer inte ge några poäng på uppgiften.) (6 p)
- b) Använd resultatet i del a) för att beräkna E -fältet på z -axeln. (2 p)

Teoridel (4 poäng)

c) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

	ja ?	nej
För att fullständigt beskriva den grundläggande fysiken i <i>elektrostatiken</i> räcker ett av Maxwells postulat.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
För att fullständigt beskriva den grundläggande fysiken i <i>elektrostatiken</i> behövs två av Maxwells postulat.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Den grundläggande fysiken i <i>elektrostatiken</i> bygger bland annat på att B -fältet är divergensfritt.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Den grundläggande fysiken i <i>elektrostatiken</i> bygger bland annat på att E -fältet är divergensfritt.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Den grundläggande fysiken i <i>elektrostatiken</i> bygger bland annat på att B -fältet är rotationsfritt.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Den grundläggande fysiken i <i>elektrostatiken</i> bygger bland annat på att E -fältet är rotationsfritt.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

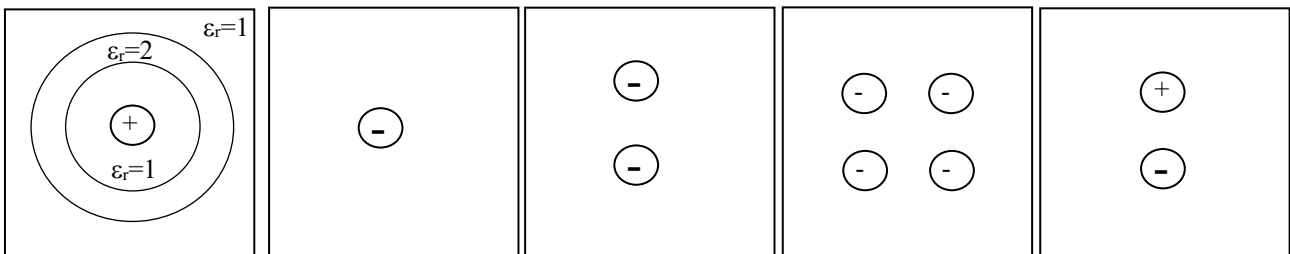
d) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

	ja ?	nej
Perfekt ledande metall har alltid potentialen $V = 0$.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
E -fältet, E definieras direkt utifrån den kraft som kan mätas upp på en testladdning.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
E -fältet, E , har enheten V/m .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
D -fältet, D , har enheten V/m^2 .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Om man specificerar randvillkor så har Poissons ekvation en entydig lösning.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Speglingsmetoden kan alltid användas för att lösa Poissons ekvation i godtyckliga geometrier.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

e) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga? (Frågan gäller elektostatik)

	ja ?	nej
Källan till förskjutningsfältet D är de fria laddningarna.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Sambandet $D = \epsilon E$ beskriver alltid att D är direkt proportionellt av E för alla material.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Polarisationsfältet beskriver i princip hur mycket och hur många dipoler som orienterat sig längs de externt pålagda D -fältslinjerna.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
D -fältslinjerna är alltid riktade åt samma håll som E -fältslinjerna.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Naturligt existerande material kan ha en relativ permittivitet som är mindre än 1,0.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Den relativa permittiviteten är definierad baserat på den elektriska susceptibiliteten.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

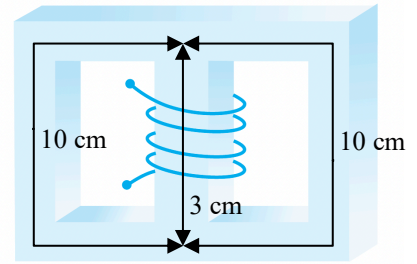
f) Skissa D -fältslinjer runt följande laddningsfördelningar. Alla bilder visar tvärsnitt av olika konfigurationer av positiva och negativa små sfäriska laddningar, antag att laddningarna befinner sig ensamma i vacuum (om inget annat anges). För poäng ska det principiella utseendet vara korrekt i det markerade kvadratiske området för respektive konfiguration. (Korrekt svar ger +0,2p och felaktigt svar ger -0,2p på samma sätt som övriga teorifrågor) (1 poäng)



3

Problemlösningsdel (8 poäng)

För värdet på B-fältet under “knäet” i magnetiseringskurvan (dvs där magnetiseringskurvan planar ut) kan man anta att B- och H-fältet beror linjärt av varandra med ett konstant värde på permeabiliteten på $\mu = 5 \text{ mH/m}$. Järnkärnan i den magnetiska kretsen i figuren har antas ha tvärsnittsarean $1,6 \text{ cm}^2$ och längden 10 cm hos var och ett av de yttre benen. Centrumbenets tvärsnittsarea kan antas vara $2,5 \text{ cm}^2$ och ha längden 3 cm . En spole med 1200 varv är lindad runt centrumbenet och leder strömmen 12 mA . Se figuren.



a) Gör nödvändiga antaganden och beräkna B-fältet i centrumbenet.

Teoridel (4 poäng)

b) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

- | | ja | ? | nej |
|---|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| För att fullständigt beskriva den grundläggande fysiken <i>i magnetostatiken</i> räcker ett av Maxwells postulat. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| För att fullständigt beskriva den grundläggande fysiken <i>i magnetostatiken</i> behövs två av Maxwells postulat. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| Den grundläggande fysiken <i>i magnetostatiken</i> bygger bland annat på att B-fältet är divergensfritt. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| Den grundläggande fysiken <i>i magnetostatiken</i> bygger bland annat på att E-fältet är divergensfritt. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| Den grundläggande fysiken <i>i magnetostatiken</i> bygger bland annat på att B-fältet är rotationsfritt. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| Den grundläggande fysiken <i>i magnetostatiken</i> bygger bland annat på att E-fältet är rotationsfritt. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

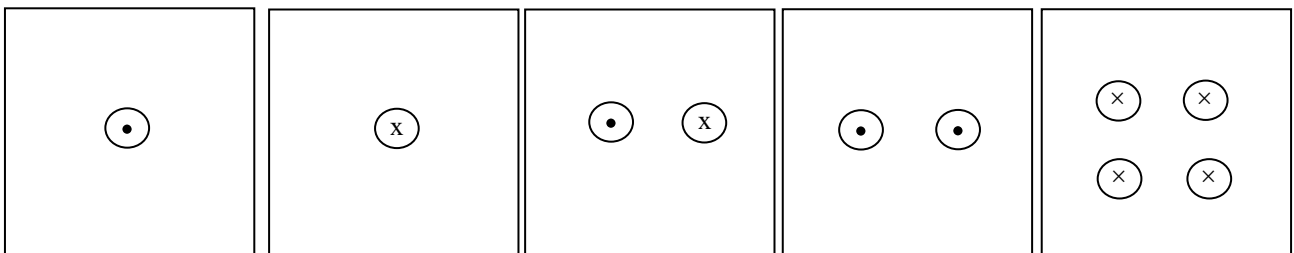
c) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga? (Frågan gäller magnetostatik)

- | | ja | ? | nej |
|--|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| Strömtäthetsfältet, \mathbf{J} , har enheten A/m^2 . | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| Kontinuitetsekvationen formuleras som $\nabla \cdot \mathbf{J} = \mathbf{B}$ i statiken. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| \mathbf{J} -fältet är riktat åt samma håll som \mathbf{H} -fältet. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| Den magnetiska vektorpotentialen kan definieras tack vare att \mathbf{B} -fältet har en rotation som är lika med noll. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| Den magnetiska vektorpotentialen är riktad åt samma håll som \mathbf{J} -fältet. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| \mathbf{H} -fältets roll i magnetostatiken påminner om \mathbf{D} -fältets roll i elektrostatiken. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

d) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

- | | ja | ? | nej |
|---|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| Normalkomponenten av strömtäthetsfältet, \mathbf{J} , är alltid kontinuerlig i gränsen mellan två material. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| Tangentialkomponenten av strömtäthetsfältet, \mathbf{J} , är alltid kontinuerlig i gränsen mellan två material. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| Amperes lag kan användas för fältberäkning om man med symmetriargument kan hitta en s.k. Ampereslinga, där B-fältet har konstant riktning. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| Amperes lag kan användas för fältberäkning om man med symmetriargument kan hitta en s.k. Ampereslinga, där B-fältet har konstant belopp. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| Amperes lag kan användas för fältberäkning om man med symmetriargument kan hitta en s.k. Ampereslinga, där B-fältet har konstant belopp och riktning. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| Amperes lag kan alltid användas istället för Biot-Savarts lag vid fältberäkningar. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

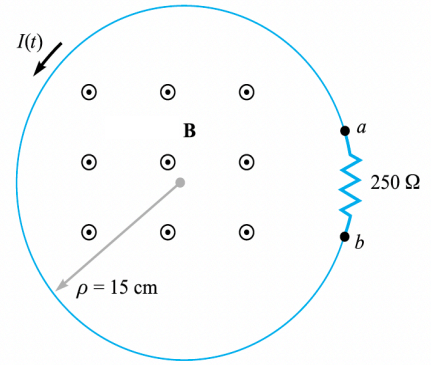
e) Skissa **B-fältslinjerna** runt följande strömmar. Alla bilder visar tvärsnitt av olika konfigurationer av strömmar som går in eller ut ur papperets plan, antag att strömmarna befinner sig ensamma i vakuum (om inget annat anges). För poäng ska det principiella utseendet vara korrekt i hela det markerade kvadratiska området för respektive konfiguration. (Korrekt svar ger +0,2p och felaktigt svar ger -0,2p på samma sätt som övriga teorifrågor) (1 poäng)



4

Problemlösningsdel (8 poäng)

En cirkulär slinga med radie 15 cm är placerad i ett i rummet konstant B-fält enligt figuren till höger. B-fältet beskrivs av uttrycket $\mathbf{B} = 0.2 \cos(120\pi t) \mathbf{T}$. Antag vidare att den cirkulära delen av ledaren som kopplar ihop punkt a med punkt b är en perfekt ledare, och att resistansen mellan a - b är 250 Ohm, (se figuren). Antag att B-fältet som genereras av det tidsberoende $I(t)$ är försumbar.



- (a) Beräkna spänningen mellan punkt a och b , $V_{ab}(t)$. (6 poäng)
- (b) Beräkna $I(t)$, ange även riktningen på strömmen i förhållande till riktningen på B-fältet. (2 poäng)

Teoridel (4 poäng)

c) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

- | | | | | |
|--|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| För att fullständigt beskriva den grundläggande fysiken i <i>induktionsproblem</i> krävs två av Maxwells postulat. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | ja ? nej |
| För att fullständigt beskriva den grundläggande fysiken i <i>induktionsproblem</i> krävs fyra Maxwells postulat. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| Den grundläggande fysiken i <i>induktionsproblem</i> bygger bland annat på att B-fältet är divergensfritt. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| Den grundläggande fysiken i <i>induktionsproblem</i> bygger bland annat på att E-fältet är divergensfritt. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| Den grundläggande fysiken i <i>induktionsproblem</i> bygger bland annat på att B-fältet är rotationsfritt. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| Den grundläggande fysiken i <i>induktionsproblem</i> bygger bland annat på att E-fältet är rotationsfritt. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

d) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

- | | | | | |
|---|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| I elektromagnetismen är E-fältets tangentialkomponent kontinuerlig i gränsen mellan två material med olika permittivitet. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | ja ? nej |
| I elektromagnetismen är E-fältets normalkomponent kontinuerlig i gränsen mellan två material med olika permittivitet. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| Det är möjligt att inducera en spänning i en ledare trots att $-dB/dt$ termen i Faradays lag är noll. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| Faradays induktionslag uttrycker att ett elektriskt fält kan alstras utan hjälp av elektriska laddningar. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| Lenz lag säger att en inducerad spänning är sådan att den motverkar förändring i det externt pålagda magnetfältet. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| Lenz lag följer som en konsekvens av Faraday's lag. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

e) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

- | | | | | |
|---|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| Man kan välja rotationen av den magnetiska vektorpotentialen fritt i dynamiken. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | ja ? nej |
| Man kan välja divergensen av den magnetiska vektorpotentialen fritt i dynamiken. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| Det länkade flödet används aldrig då man beräknar egeninduktansen. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| En spoles egeninduktans beror bland annat på hur stor strömmen är i spolen. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| En spoles egeninduktans beror bland annat på antalet lindningsvarv. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| En cylindrisk spoles egeninduktans beror bland annat på om det finns ett material med magnetiska egenskaper inuti spolen. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

f) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

- | | | | | |
|--|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| Den elektostatiska potentialen ger upphov till elektriska fält som uppkommit från elektriska laddningar. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | ja ? nej |
| Den magnetiska vektorpotentialen ger upphov till elektriska fält som härrör sig från tidsvarierande strömmar. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| Egeninduktansen i en spole relaterar till hur mycket magnetisk energi som komponenten kan lagra. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| Det länkade flödet används vid induktionsberäkningar. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| Den lagrade energin hos en spole har ett kvadratisk beroende av strömmen i spolen. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| Den lagrade energin hos två spolar som är magnetiskt kopplade till varandra fås genom att summera de i strömmen kvadratiske uttrycken på energin hos respektive spole. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

5

Problemlösningsdel (8 poäng)

a) Antag att $\mu = 3 \times 10^{-5}$ H/m, $\epsilon = 1,2 \times 10^{-10}$ F/m och $\sigma = 0$ överallt. Om $\mathbf{H} = 2 \cos(10^{10}t - \beta x) \hat{\mathbf{z}}$ A/m bestäm motsvarande uttryck för \mathbf{B} , \mathbf{D} , \mathbf{E} , och β . Gör beräkningarna med fälten på reell form.

Teoridel (4 poäng)

b) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

- | | ja ? | nej |
|---|--------------------------|--------------------------|
| För att fullständigt beskriva den grundläggande fysiken i uppgiften ovan räcker två av Maxwells postulat. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| För att fullständigt beskriva den grundläggande fysiken i uppgiften ovan behövs alla fyra Maxwells postulat. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| Den grundläggande fysiken i uppgiften ovan bygger bland annat på att rotationen av E-fältet är lika med minus tidsderivatan av B-fältet. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| Den grundläggande fysiken i uppgiften ovan bygger bland annat på att B-fältet är divergensfritt. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| Den grundläggande fysiken i uppgiften ovan bygger bland annat på att B-fältet är rotationsfritt. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| Den grundläggande fysiken i uppgiften ovan bygger bland annat på att divergensen av D-fältet är lika med tätheten av fria laddningar. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

c) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

- | | ja ? | nej |
|--|--------------------------|--------------------------|
| $j\omega$ -metoden för fältberäkningar fungerar för fält med godtyckligt tidsberoende. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| Tidsderivata i Maxwells ekvationer övergår i komplexa metoden till multiplikation med $j\omega$. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| Enda sättet att definiera tidsberoendet för komplexa fält är $e^{i\omega t}$. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| Om β är direkt proportionellt mot ω är materialet dispersionsfritt. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| Att ett material är dispersivt betyder att ljushastigheten varierar med frekvensen. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| För att ett material ska vara dispersionsfritt måste gruppshastigheten vara skild från fashastigheten. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

d) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

- | | ja ? | nej |
|---|--------------------------|--------------------------|
| I verkligheten existerar inga plana vågor enligt den strikta definitionen av en plan våg (uniform plane wave) som vi använt i kursen. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| En plan våg (benämnd uniform plane wave i kursboken) kan ha en E-fältsvektor riktad i utbredningsriktningen. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| En plan våg (uniform plane wave) kan ha E- eller H-fältsvektorer som är rumsberoende över ett plan som är vinkelrätt mot utbredningsriktningen. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| En plan våg (uniform plane wave) har alltid en B-fältsvektor riktad vinkelrätt mot utbredningsriktningen. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| En plan våg (uniform plane wave) har alltid en E-fältsvektor riktad vinkelrätt mot utbredningsriktningen. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| En plan våg (uniform plane wave) kan ha en rumsberoende utbredningsriktning. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

e) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

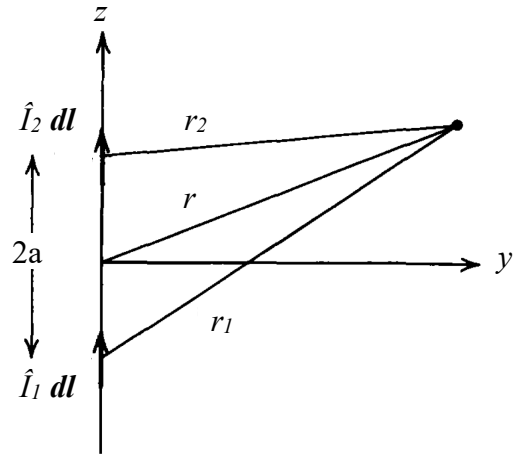
- | | ja ? | nej |
|---|--------------------------|--------------------------|
| Vid beräkning med Fresnell's ekvationer behöver man inte ta hänsyn till vågens polarisering. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| Transmissionskoefficienten för effekt är beloppet i kvadrat av transmissionskoefficienten för fält. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| Reflektionskoefficienten för effekt är beloppet i kvadrat av reflektionskoefficienten för fält. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| Brewstervinkeln definieras både för vågor med polarisering parallellt och vinkelrätt mot infallsplanet. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| Att ljus som propagerar inuti en optisk fiber "stannar kvar" inuti fibern kan förklaras med att ljuset som reflekteras i fiberväggen inuti fibern reflekteras vid den kritiska vinkeln och därmed aldrig transmittas ut ur fiberväggen. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| Vinkeln vid vilken totalreflektion inträffar härleds från Fresnell's ekvationer | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

6

Problemlösningsdel (8 poäng)

Två Hertzdipoler är placerade längs z-axeln med ett avstånd på $2a$. Dipolerna är lika långa och drivs med strömmar som har samma belopp men som har en fasskillnad ξ mellan sig.

- Bestäm E - och H -fälten i fjärrfältet. (4p)
- Bestäm tidsmedelvärdet av den utstrålade effekten. (2p)
- I vilka riktningar är den utstrålade effekten noll och i vilka riktningar har den utstrålade effekten ett maximum. (2p)



Teoridel (4 poäng)

d) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

- | | ja | ? | nej |
|---|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| För att fullständigt beskriva den grundläggande fysiken i uppgiften ovan räcker två av Maxwells postulat. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| För att fullständigt beskriva den grundläggande fysiken i uppgiften ovan behövs alla fyra Maxwells postulat. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| Den grundläggande fysiken i uppgiften ovan bygger bland annat på att rotationen av E-fältet är lika med minus tidsderivatan av B-fältet. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| Den grundläggande fysiken i uppgiften ovan bygger bland annat på att B-fältet är konservativt. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| Den grundläggande fysiken i uppgiften ovan bygger bland annat på att rotationen av B-fältet är lika med minus tidsderivatan av E-fältet plus strömtäthetsfältet. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| Den grundläggande fysiken i uppgiften ovan bygger bland annat på att divergensen av D-fältet är lika med tätheten av fria laddningar. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

e) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

- | | ja | ? | nej |
|---|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| Den retarderade potentialen kommer från lösning av vågekvationen. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| Den retarderade potentialen beskriver hur ljushastigheten avtar med avståndet från källan. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| Vågekvationen för vektorpotentialen \mathbf{A} kan härledas från Maxwells ekvationer. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| I elektrodynamiken (tidsvarierande fält) använder vi oss av samma uttryck för den magnetiska vektorpotentialen $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ som i elektrostatiken. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| Uttrycket för den magnetiska vektorpotentialen, $\nabla \cdot \mathbf{A}$, är <i>entydigt</i> givet av vågekvationen. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| Den magnetiska vektorpotentialen relateras till magnetfältet som $\nabla \cdot \mathbf{A} = \mathbf{B}$. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

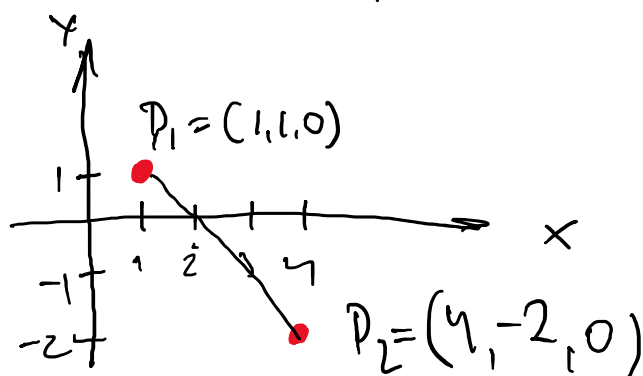
f) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

- | | ja | ? | nej |
|---|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| En halv vågsdipol har ett isotropt strålningsdiagram, dvs den strålar lika mycket i alla riktningar. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| En halv vågsdipol är ett exempel på en antenn med relativt låg direktivitet. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| En mobiltelefonantenn är ett exempel på en antenn med mycket hög direktivitet. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| En antenn med högre strålningsresistans är mer effektiv än en antenn med låg strålningsresistans att omvandla ström i antennen till utstrålad effekt. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| En bra och effektiv sändarantenn karakteriseras av att dess strålningsresistans är hög. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| En bra och effektiv mottagarantenn karakteriseras av att dess strålningsresistans är låg. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

g) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

- | | ja | ? | nej |
|---|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| En Hertzdipol är <i>mycket längre</i> än en våglängd. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| Strömmen i antennen är <i>konstant</i> längs en Hertzdipol i varje given tidpunkt. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| Strålningsresistansen hos en Hertzdipol är <i>oberoende</i> av strålningseffekten. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| Strålningsresistansen ökar med längden i kvadrat för en Hertzdipol. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| Då en Hertzdipol placeras ovanför ett perfekt ledande mycket stort plan (i övrigt antar vi att det bara finns luft ovanför planet) så kan fältproblem lösas med hjälp av spegling av Hertzdipolen i planet. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| Strömmen kan antas vara noll i änden av en Hertzdipol. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

① a) Integralen ska utväreras på en rät linje



Linjens ekvation är $y = -x + 2$

Sätt in i uttrycket \vec{r} i fältet,
z-komponenten kan försummas då integrationen
ska ske i x-y-planet och $z=0$

$$\vec{F} = x^2 \vec{x} + (-x+2)^2 \vec{y}$$

$$d\vec{l} = dx \vec{x} + dy \vec{y} + dz \vec{z} = \begin{cases} dz=0 \\ dy=-dx \end{cases}$$
$$= dx \vec{x} - dx \vec{y} = (\vec{x} - \vec{y}) dx$$

Sätt in i integralen

$$I = \int_{P_1}^{P_2} \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_1^4 (x^2 \vec{x} + (-x+2)^2 \vec{y}) \cdot (\vec{x} - \vec{y}) dx$$
$$= \int_1^4 (x^2 - (-x+2)^2) dx = \left[2x^2 - 4x \right]_1^4 = 18$$

b) Beräkna med indexnotation

$$\nabla \cdot (u \times v) = \frac{\partial}{\partial x_i} (\epsilon_{ijk} u_j v_k) =$$

$$= \epsilon_{ijk} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} v_k + \epsilon_{ijk} u_j \frac{\partial v_k}{\partial x_i} =$$

$$= \left(\epsilon_{kij} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) v_k + \left(\epsilon_{jik} \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right) u_j$$

$$= (\nabla \times u) \cdot v - (\nabla \times v) \cdot u$$

c). Den totala massan är lika med
 Volymintegralen av ρ
 Volymen som ska integreras är en halvsfär
 med radie a . Den har följande
 gränser i sfäriska koordinater

$$0 \leq r \leq a; \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}; \quad 0 \leq \phi \leq 2\pi$$

Volymelement i sfäriska koordinater
 $dV = r^2 \sin \theta \, dr \, d\theta \, d\phi$

Integrera:

$$\begin{aligned} M &= \iiint \rho_0 [1 - r/a] \, dV = \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \int_0^a \rho_0 [1 - r/a] r^2 \sin \theta \, dr \, d\theta \, d\phi \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \rho_0 \left[\frac{r^3}{3} - \frac{r^4}{4a} \right]_0^a \sin \theta \, d\theta \, d\phi \\ &= \int_0^{2\pi} \rho_0 \frac{a^3}{12} [-\cos \theta]_0^{\pi/2} \, d\phi \\ &= \int_0^{2\pi} \rho_0 \frac{a^3}{12} \, d\phi = \pi \rho_0 a^3 / 6 \end{aligned}$$

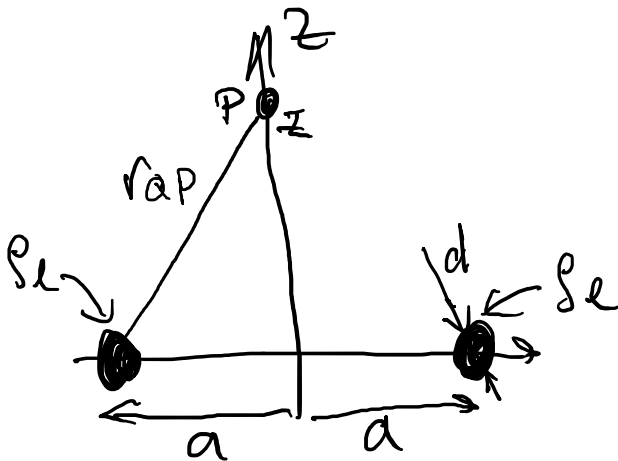
2 - EEN190 / 1 - EEF031

a) Antag jämnt fördelad linjeladdning. \Rightarrow
linjeladdningsstäthet $\rho_L = \frac{q}{2\pi a}$

Potentialen beräknas som

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_L \frac{\rho_L}{r_{QP}} dl \quad \text{där integralen utförs över ringens omkrets } L.$$

Och r_{QP} definieras enligt följande figur



$$r_{QP} = \sqrt{z^2 + a^2}$$

dl kan uttryckas som $dl = a d\phi$

$$\text{Integrera } V = \frac{\rho_L}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \frac{a d\phi}{\sqrt{z^2 + a^2}} = \frac{\rho_L}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\pi a}{\sqrt{z^2 + a^2}}$$

b) Symmetrin ger att E -fältet är riktad längs z -axeln.

$$E = -\nabla V = -\frac{dV}{dz} = \frac{\rho_L}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\pi a z}{(\sqrt{z^2 + a^2})^3}$$

3 - EEN 190 / 2 - EEF 031

Beräkna reluctanterna

Centrumkern
$$R_c = \frac{L_c}{\mu A_c} = \frac{3 \cdot 10^{-2}}{5 \cdot 10^{-3} \cdot 25 \cdot 10^{-4}} = 24 \cdot 10^4 \text{ H}$$

Yttre benen
$$R_o = \frac{L_o}{\mu A_o} = \frac{10 \cdot 10^{-2}}{5 \cdot 10^{-3} \cdot 46 \cdot 10^{-4}} = 1,25 \cdot 10^5 \text{ H}$$

Totala reluctansen sedd från spolens position består av centrumkern i serie med två parallellkopplade yttre ben:

Totala reluctansen $R_T = R_c + \frac{1}{2} R_o = 8,65 \cdot 10^4 \text{ H}$

Magnetiskt flöde i centrumkern

$$\Phi = \frac{NI}{R_T} = \frac{1200 \cdot 12 \cdot 10^{-3}}{8,65 \cdot 10^4} = 1,66 \cdot 10^{-4} \text{ Wb}$$

B-fältet här nu som

$$B = \frac{\Phi}{A} = \frac{1,66 \cdot 10^{-4}}{2,5 \cdot 10^{-4}} = 0,666 \text{ T}$$

4 - EEN 150 / 3 - EEF 631

a) Techna flödet: $\phi = \pi \cdot r^2 B = \pi \cdot 0,15^2 B =$
 $= 1,41 \cdot 10^{-2} \cos(120\pi t)$

Inducerad spänning

$$V_{ind} = -\frac{d\phi}{dt} = (1,41 \cdot 10^{-2}) \cdot 120\pi \sin(120\pi t)$$

$$\text{Så } V_{ba}(t) = V_{ind} = (1,41 \cdot 10^{-2}) \cdot 120\pi \sin(120\pi t)$$

b) $V_{ab} = -V_{ba}$
 $I(t) = \frac{V_{ba}(t)}{R} = \frac{5,33 \sin(120\pi t)}{250} = 21,3 \sin(120\pi t) \text{ mA}$

$I(t)$ har referensriktningen! t.z.w.

Alltså positiv ström motbåda i slingan

5 - EEN 190 / (4 - EEF031)

$$H = 2 \cos[10^{10}t - \beta x] \hat{z} \text{ A/m}$$

$$\bullet \Rightarrow B = \mu_0 H = 6 \cdot 10^{-5} \cos[10^{10}t - \beta x] \hat{z} \text{ T}$$

$$\bullet \nabla \times H = -\frac{\partial H}{\partial x} \hat{y} = 2\beta \sin[10^{10}t - \beta x] \hat{y} = \frac{\partial D}{\partial t}$$

$$\Rightarrow D = \int 2\beta \sin[10^{10}t - \beta x] dt + C = -\frac{2\beta}{10^{10}} \cos[10^{10}t - \beta x] \hat{y} \text{ C/m}^2$$

($C=0$ om vi antar inga statiska fält)

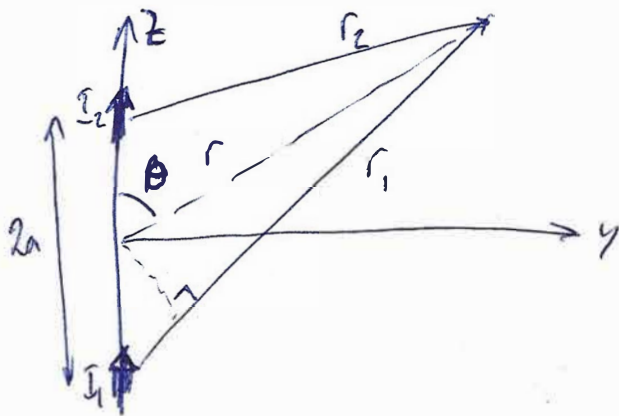
$$\bullet E = \frac{D}{\epsilon} = -\frac{2\beta}{(1.2 \cdot 10^{-10})(10^{10})} \cos[10^{10}t - \beta x] \hat{y} =$$
$$= -1.67\beta \cos[10^{10}t - \beta x] \hat{y} \text{ V/m}$$

$$\bullet \nabla \times E = \frac{\partial E_y}{\partial x} \hat{z} = 1.67\beta^2 \sin[10^{10}t - \beta x] \hat{z} = -\frac{\partial B}{\partial t}$$

$$\Rightarrow B = -\int 1.67\beta^2 \sin[10^{10}t - \beta x] \hat{z} dt =$$
$$= 1.67 \cdot 10^{-10} \beta^2 \cos[10^{10}t - \beta x] \hat{z}$$

Då detta ska vara samma som det ursprungliga B så här villkor på B :

$$(1.67 \cdot 10^{-10}) \beta^2 = 6 \cdot 10^{-5} \Rightarrow \beta = \pm 600 \text{ rad/m}$$



Fältet från en Hertzdipol

$$E_{\theta} = \frac{j\beta dI}{4\pi R} \frac{\sin\theta}{R} e^{-j\beta R} = j\bar{E}_0 \frac{\sin\theta}{R} e^{-j\beta R}$$

- a) Låt θ beteckna vinkeln mellan vektorn r och z -axeln
 Totala E -fältet fås genom att summera fältbidrag

$$E_{\theta} = E_{\theta_1} + E_{\theta_2} = j\bar{E}_{\theta_1} \frac{\sin\theta}{r_1} e^{-j\beta r_1} + j\bar{E}_{\theta_2} \frac{\sin\theta}{r_2} e^{-j\beta r_2}$$

Approximeras $r_1 \approx r + a\cos\theta$ $r_2 \approx r - a\cos\theta$

Vi kan även skriva $\bar{I}_1 = \bar{I}_2 e^{-j\beta}$

Därmed kan vi approximeras

$$\begin{aligned} E_{\theta} &\approx j\bar{E}_0 \frac{\sin\theta}{r} \left[e^{-j\beta r + j\beta a\cos\theta} + e^{-j\beta r - j\beta a\cos\theta - j\beta} \right] \\ &= j\bar{E}_0 \frac{\sin\theta}{r} e^{-j\beta r} \left[e^{-j\beta a\cos\theta} + e^{j\beta a\cos\theta - j\beta} \right] \\ &= j\bar{E}_0 \frac{\sin\theta}{r} e^{-j(\beta r - \frac{\pi}{2})} \left[e^{-j(\beta a\cos\theta - \frac{\pi}{2})} + e^{j(\beta a\cos\theta - \frac{\pi}{2})} \right] \\ &= j\bar{E}_0 \frac{\sin\theta}{r} e^{-j(\beta r - \frac{\pi}{2})} \left[2\cos(\beta a\cos\theta - \frac{\pi}{2}) \right] \end{aligned}$$

Mohrvarande H-fält.

$$H_{\phi} = \frac{E_{\theta}}{Z_0}$$

$$\begin{aligned}
 b) \quad P_{av} &= \frac{1}{2} |E_0| |H_0| = \frac{1}{2} \frac{|E_0|^2}{Z_0} = \\
 &= \frac{2 |E_0|^2}{Z_0} \frac{1}{r^2} \sin^2 \theta \cos^2 \left(\beta a \cos \theta - \frac{\pi}{2} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 c) \quad P_{av} = 0 \quad \text{d\u00e5} \quad \beta a \cos \theta - \frac{\pi}{2} &= \frac{\pi}{2} \quad (\text{eller en ommultippel av} \\
 &\quad \pi \text{ adderat till det}) \\
 \text{s\u00e5ledes} \quad \beta a \cos \theta - \frac{\pi}{2} &= (2n+1) \frac{\pi}{2} \quad (n \text{ \u00e4r ett heltal}) \\
 \Rightarrow \theta &= a \cos \left[\frac{(2n+1) \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}}{\beta a} \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P_{av} = \text{"maximum"} \quad \text{d\u00e5} \quad \beta a \cos \theta - \frac{\pi}{2} &= n\pi \quad (n \text{ \u00e4r ett heltal}) \\
 \Rightarrow \theta &= a \cos \left[\frac{n\pi + \frac{\pi}{2}}{\beta a} \right]
 \end{aligned}$$