

Tentamen i Vektorfält och elektromagnetisk fältteori, EEN190

- Tid:** 2023-06-08, kl. 8:30-13:30
- Hjälpmedel:** Physics Handbook
Beta Mathematics Handbook
Typgodkänd kalkylator
Formelsamlingar i vektorfält och elektromagnetisk fältteori med egna formler skrivna på sista sidan.
Inga andra anteckningar eller lösta tal är tillåtna.
- Förfrågningar:** Andreas Fhager
- Lösningar:** Anslås på kursens hemsida senast första vardagen efter duggan
- Resultatet:** Distribueras via LADOK
- Granskning:** Plats och tid annonseras på kurshemsidan
- Om rättningen:** Svar och lösningar skall motiveras och förklaras.
Skriv tydligt och förklara vad ni gör i er lösning och vilken metod som används.
Poängavdrag görs för otydliga figurer och lösningar samt lösningar som inte förklaras eller motiveras.
Mindre allvarliga fel och rena räknefel leder till mindre avdrag.
Mer allvarliga, principiella fel och metodfel leder till större avdrag.
Poängavdrag görs även för utelämnade referensriktningar, dimensionsfel och uppenbart orimliga svar.
- Betygsgränser:** Betyg 3: Totalt 36, varav ≥ 21 på problemdelen och ≥ 8 på teorin
Betyg 4: Totalt 48, varav ≥ 26 på problemdelen och ≥ 10 på teorin
Betyg 5: Totalt 60, varav ≥ 31 på problemdelen och ≥ 12 på teorin

Svaren på teoridelen skall ges på tesen som lämnas in.

Teorifrågorna besvaras genom att markera en av rutorna efter varje påstående. En och endast en ruta på varje rad skall markeras. De tre svarsalternativen är *Ja*, *Vet ej* och *Nej*. Alternativet *Vet ej* är markerat med "?" på tesen. För varje påstående ger korrekt svar +0,2 poäng och inkorrekt svar -0,2 poäng. *Vet ej* är neutralt och ger 0 poäng. Förståelseuppgifterna ger maximalt 1 poäng och lägst -1 poäng och man kan därför få 1 poäng även med ett *Vet ej* svar.

Anonym kod: _____

Lycka till!

1

Problemlösningsdel (12 poäng)

- a) Visa för vilka värden på a and b samt på vilket plan vektorfältet
$$\mathbf{F} = (2az + y, bz^2 + x, ay - 3bx)$$
är rotationsfritt? Fältet är givet i kartesiska koordinater. (3 poäng)
- b) Beräkna $\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}$, där vektorfältet \mathbf{u} beskrivs i cylindriska koordinatsystemet (ρ, φ, z) som $\mathbf{u} = \hat{a}_\varphi$. (3 poäng)
- c) Beräkna linjeintegralen $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ där $\mathbf{F} = -\hat{a}_\rho + \hat{a}_z$ är ett vektorfält beskrivet i cylindriska koordinater och kurvan C ges av parametriseringen $x = \sin(t)$, $y = \cos(t)$, $z = t$ där $0 < t < \pi$ (3 poäng).
- d) Visa med hjälp av indexnotation att $\nabla \cdot \nabla^2 \mathbf{u} = \nabla^2 \nabla \cdot \mathbf{u}$. (\mathbf{u} är ett vektorfält) (3 poäng).

2

Problemlösningsdel (8 poäng)

En perfekt ledande sfär med radie $R_0 = 1$ cm påförs laddningen q . Metallsfären är i sin tur omsluten av ett sfäriskt skal med innerradie R_0 , ytterradie $R_1 = 5$ cm och relativ dielektricitetskonstant $\epsilon_r = 4$.

- Beräkna polarisationsladdningstätheten, överallt. (4 poäng)
- Beräkna systemets elektrostatiske energi. (4 poäng)

Teoridel (4 poäng)

c) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

	ja	?	nej
För att fullständigt beskriva den grundläggande fysiken i <i>elektrostatiken</i> räcker ett av Maxwells postulat.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
För att fullständigt beskriva den grundläggande fysiken i <i>elektrostatiken</i> behövs två av Maxwells postulat.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Den grundläggande fysiken i <i>elektrostatiken</i> bygger bland annat på att B-fältet är divergensfritt.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Den grundläggande fysiken i <i>elektrostatiken</i> bygger bland annat på att E-fältet är divergensfritt.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Den grundläggande fysiken i <i>elektrostatiken</i> bygger bland annat på att B-fältet är rotationsfritt.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Den grundläggande fysiken i <i>elektrostatiken</i> bygger bland annat på att E-fältet är rotationsfritt.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>




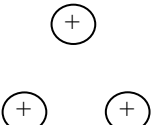

d) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

	ja	?	nej
Perfekt ledande metall har konstant potential.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Polarisationsfältet, \mathbf{P} definieras direkt utifrån den kraft som kan mätas upp på en testladdning.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Förskjutningsfältet, \mathbf{D} , har enheten A/m.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Polarisationsfältet, \mathbf{P} , har enheten A/m.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Om man specificerar randvillkor så har Poissons ekvation en entydig lösning.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Speglingsmetoden kan alltid användas för att lösa Poissons ekvation i godtyckliga geometrier.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

e) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga? (Frågan gäller elektostatik)

	ja	?	nej
D-fältslinjerna är alltid riktade åt samma håll som E-fältslinjerna.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
P-fältslinjerna är alltid riktade åt samma håll som E-fältslinjerna.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
D-fältets tangentialkomponent är kontinuerlig i gränsen mellan två material med olika permittivitet.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
D-fältets normalkomponent är kontinuerlig i gränsen mellan två material med olika permittivitet.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
E-fältets tangentialkomponent är kontinuerlig i gränsen mellan två material med olika permittivitet.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
E-fältets normalkomponent är kontinuerlig i gränsen mellan två material med olika permittivitet.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

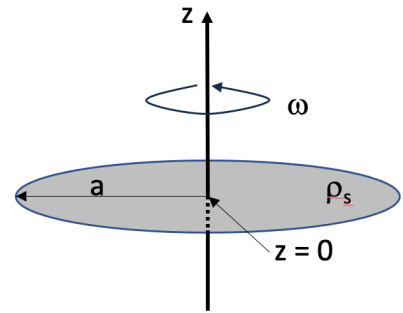
f) Skissa **ekvipotentialytorna** runt följande laddningsfördelningar. Alla bilder visar tvärsnitt av olika konfigurationer av positiva och negativa små sfäriska laddningar, antag att laddningarna befinner sig ensamma i vacuum (om inget annat anges). För poäng ska det principiella utseendet vara korrekt i det markerade kvadratiske området för respektive konfiguration. (Korrekt svar ger +0,2p och felaktigt svar ger -0,2p på samma sätt som övriga teorifrågor) (1 poäng)

				
Jordad, perfekt ledande metall	Jordad, perfekt ledande metall			

3

Problemlösningsdel (8 poäng)

En cirkulär skiva med radien a ligger placerad i xy -planet, med sitt centrum på z -axeln. På skivan ligger en jämnt fördelad ytladdningstäthet ρ_s och skivan roterar runt z -axeln med konstant vinkelhastighet ω . Beräkna det resulterande H -fältet på z -axeln.



Teoridel (4 poäng)

b) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

- | | ja | ? | nej |
|--|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| För att fullständigt beskriva den grundläggande fysiken <i>i magnetostatiken</i> räcker ett av Maxwells postulat. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| För att fullständigt beskriva den grundläggande fysiken <i>i magnetostatiken</i> behövs två av Maxwells postulat. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| Den grundläggande fysiken <i>i magnetostatiken</i> bygger bland annat på att B -fältet är divergensfritt. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| Den grundläggande fysiken <i>i magnetostatiken</i> bygger bland annat på att E -fältet är divergensfritt. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| Den grundläggande fysiken <i>i magnetostatiken</i> bygger bland annat på att B -fältet är rotationsfritt. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| Den grundläggande fysiken <i>i magnetostatiken</i> bygger bland annat på att E -fältet är rotationsfritt. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

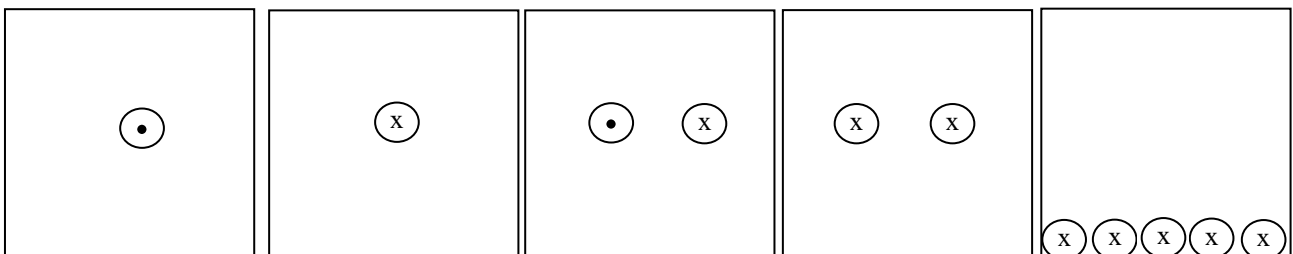
c) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga? (Frågan gäller magnetostatik)

- | | ja | ? | nej |
|---|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| Strömtäthetsfältet, \mathbf{J} , har enheten A/m. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| Kontinuitetsekvationen formuleras som $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$ i statiken. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| \mathbf{J} -fältet är riktat åt samma håll som \mathbf{B} -fältet. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| Den magnetiska vektorpotentialen kan definieras tack vare att \mathbf{B} -fältet har en nollskild rotation. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| Den magnetiska vektorpotentialen är riktad åt samma håll som \mathbf{H} -fältet. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| \mathbf{M} -fältets roll i magnetostatiken påminner om \mathbf{D} -fältets roll i elektrostатiken. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

d) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

- | | ja | ? | nej |
|--|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| Biot-Savarts lag används för att beräkna den magnetiska vektorpotentialen från en stömtäthetsfördelning. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| Man kan beräkna B -fältet mha Biot-Savarts lag för en godtycklig strömfördelning. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| Man kan beräkna B -fältet mha Biot-Savarts lag för en ytström. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| Man kan beräkna B -fältet mha Biot-Savarts lag för en strömförande tråd. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| Biot-Savarts lag kan endast användas för fältberäkning om vissa symmetrivillkor är uppfyllda för geometrin i problemet. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| Även om Amperes lag av symmetriskäl inte är användbar så kan Biot-Savarts lag alltid användas för att beräkna B -fältet från en ström. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

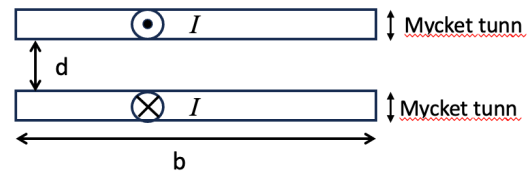
e) Skissa den **magnetiska vektorpotentialen** runt följande strömmar. Alla bilder visar tvärsnitt av olika konfigurationer av strömmar som går in eller ut ur papperets plan, antag att strömmarna befinner sig ensamma i vakuum (om inget annat anges). För poäng ska det principiella utseendet vara korrekt i hela det markerade kvadratiska området för respektive konfiguration. (Korrekt svar ger +0,2p och felaktigt svar ger -0,2p på samma sätt som övriga teorifrågor) (1 poäng)



4

Problemlösningsdel (8 poäng)

En transmissionsledning består av två parallella, mycket långa, tunna, plana ledare med bredd b . De två ledarna är separerade med avståndet d . Den ena ledaren fungerar som framledare, och den andra som återledare varför strömmen i båda ledarna är I , men i motsatta riktningar. Se figuren, (där även de olika strömriktningarna illustreras och i den ena ledaren går in i papperets plan, i den andra ut ur papperets plan). Gör nödvändiga antaganden och beräkna kraften per längdenhet som strömmen ger upphov till på ledarna. Antag att $b \gg d$.



Teoridel (4 poäng)

b) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

- | | | | | |
|--|--------------------------|--------------------------|--------------------------|----------|
| För att fullständigt beskriva den grundläggande fysiken i <i>induktionsproblem</i> krävs två av Maxwells postulat. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | ja ? nej |
| För att fullständigt beskriva den grundläggande fysiken i <i>induktionsproblem</i> krävs fyra Maxwells postulat. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | |
| Den grundläggande fysiken i <i>induktionsproblem</i> bygger bland annat på att B-fältet är divergensfritt. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | |
| Den grundläggande fysiken i <i>induktionsproblem</i> bygger bland annat på att E-fältet är divergensfritt. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | |
| Den grundläggande fysiken i <i>induktionsproblem</i> bygger bland annat på att B-fältet är rotationsfritt. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | |
| Den grundläggande fysiken i <i>induktionsproblem</i> bygger bland annat på att E-fältet är rotationsfritt. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | |

c) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

- | | | | | |
|---|--------------------------|--------------------------|--------------------------|----------|
| I elektromagnetismen är E-fältets tangentialkomponent kontinuerlig i gränsen mellan två material med olika permittivitet. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | ja ? nej |
| I elektromagnetismen är E-fältets normalkomponent kontinuerlig i gränsen mellan två material med olika permittivitet. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | |
| Det är möjligt att inducera en spänning i en ledare trots att $-dB/dt$ termen i Faradays lag är noll. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | |
| Faradays induktionslag uttrycker att ett elektriskt fält kan genereras utan laddningsseparation. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | |
| Lenz lag säger att en inducerad spänning är sådan att den motverkar förändring i det externt pålagda magnetfältet. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | |
| Lenz lag följer som en konsekvens av Faraday's lag. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | |

d) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

- | | | | | |
|---|--------------------------|--------------------------|--------------------------|----------|
| Man kan välja rotationen av den magnetiska vektorpotentialen fritt i dynamiken. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | ja ? nej |
| Man kan välja divergensen av den magnetiska vektorpotentialen fritt i dynamiken. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | |
| Det länkade flödet används aldrig då man beräknar egeninduktansen. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | |
| En spoles egeninduktans beror bland annat på hur stor strömmen är i spolen. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | |
| En spoles egeninduktans beror bland annat på antalet lindningsvarv. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | |
| En cylindrisk spoles egeninduktans beror bland annat på om det finns ett material med magnetiska egenskaper inuti spolen. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | |

e) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

- | | | | | |
|--|--------------------------|--------------------------|--------------------------|----------|
| De fyra Maxwell postulat som behövs för att beskriva den dynamiska teorin kan motsäga den elektrostatiska teorin och de två postulat som beskriver elektrostatiska fält. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | ja ? nej |
| Kontinuitetsekvationen innehåller samma nollskilda termer i statiken som i dynamiken. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | |
| Retarderade potentialer kan användas för att beskriva hur E-fältet från en punktladdning som rör sig breder ut sig i rummet. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | |
| Retarderade potentialer är en konsekvens av att inget kan färdas snabbare än ljuset. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | |
| Retarderade potentialer är lösningar till Poissons ekvation. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | |
| Retarderade potentialer kan alltid beskrivas med hjälp av komplex notation. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | |

5

Problemlösningsdel (8 poäng)

En elektromagnetisk våg propagerar i vakuum i området $z > 0$ längs med ytan som beskrivs av ekvationen $z = 0$. Vågens H-fält ges av uttrycket

$$H = \hat{y} e^{-1000z} \cos(10^7 t - \beta x)$$

- Beräkna tillhörande E-fält. (4 poäng)
- Är detta en plan våg? (Enligt bokens definitionen av en sk "uniform plane wave") Svaret skall motiveras. (2 poäng)
- Bestäm faskonstanten β så att vågekvationen är uppfylld. (2 poäng)

Teoridel (4 poäng)

d) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

ja ? nej

- För att fullständigt beskriva den grundläggande fysiken i uppgiften ovan räcker två av Maxwells postulat. ja ? nej
- För att fullständigt beskriva den grundläggande fysiken i uppgiften ovan behövs alla fyra Maxwells postulat. ja ? nej
- Den grundläggande fysiken i uppgiften ovan bygger **bland annat** på att rotationen av E-fältet är lika med minus tidsderivatan av B-fältet. ja ? nej
- Den grundläggande fysiken i uppgiften ovan bygger **bland annat** på att B-fältet är divergensfritt. ja ? nej
- Den grundläggande fysiken i uppgiften ovan bygger **bland annat** på att B-fältet är rotationsfritt. ja ? nej
- Den grundläggande fysiken i uppgiften ovan bygger **bland annat** på att divergensen av D-fältet är lika med tätheten av fria laddningar. ja ? nej

e) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

ja ? nej

- Snells lag gäller i gränssytor med olika permittivitet men samma permeabilitet på var sida om gränssytan. ja ? nej
- Snells lag gäller i gränssytor med samma permittivitet men olika permeabilitet på var sida om gränssytan. ja ? nej
- Snells brytningslag relaterar infallsvinkel till vinkeln på det transmitterade fältet. ja ? nej
- Snells brytningslag härleds genom att betrakta randvillkoren för normalkomponenterna av E- och H-fälten i gränssytan. ja ? nej
- Snells lag säger att när infallsvinkeln är större än kritiska vinkeln uppstår totalreflektion. ja ? nej
- Totalreflektion uppstår då fältet propagerar genom en gränssyta, från ett område med högre brytningsindex till ett område med lägre brytningsindex. ja ? nej

f) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

ja ? nej

- I verkligheten existerar inga plana vågor enligt den strikta definitionen av en plan våg (uniform plane wave) som vi använt i kursen. ja ? nej
- En plan våg (benämnd uniform plane wave i kursboken) kan ha en E-fältsvektor riktad i utbredningsriktningen. ja ? nej
- En plan våg (uniform plane wave) kan ha E- eller H-fältsvektorer som är rumsberoende över ett plan som är vinkelrätt mot utbredningsriktningen. ja ? nej
- En plan våg (uniform plane wave) har alltid en B-fältsvektor riktad vinkelrätt mot utbredningsriktningen. ja ? nej
- En plan våg (uniform plane wave) har alltid en E-fältsvektor riktad vinkelrätt mot utbredningsriktningen. ja ? nej
- En plan våg (uniform plane wave) kan ha en rumsberoende utbredningsriktning. ja ? nej

g) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

ja ? nej

- Vågimpedansen hos luft är $Z = 733\Omega$. ja ? nej
- I en god ledare ligger H-fältet 180° ur fas med E-fältet, dvs exempelvis har H-fältet ett maximum i samma punkt i rummet vid samma tidpunkt som E-fältet ett minimum. ja ? nej
- Om ett material har en konduktivitet som är noll så är vågimpedansen ett rent imaginärt tal. ja ? nej
- Vakuum är dispersionsfritt, dvs fashastigheten = gruppshastigheten. ja ? nej
- Om ett medium är dispersivt så kan det bero på att permittiviteten är frekvensberoende. ja ? nej
- Om ett medium är dispersivt så kan det bero på att permeabiliteten är frekvensberoende. ja ? nej

6

Problemlösningsdel (8 poäng)

Den tidsharmoniska strömmen på en centrummatad dipolantenn som är orienterad längs z-axeln och har längden h ges av uttrycket (β är faskonstanten):

$$I(z) = I_m \sin(\beta(h - |z|)).$$

- a) Visa genom en beräkning hur uttrycket på E-fältet ser ut i fjärrfältzonen. (4 poäng)
Ledning: Följande trigonometriska identitet vara användbar för att skriva om integranden så uppgiftens slutningegräl kan beräknas:

$$\sin(a) \cos(b) = \frac{1}{2} (\sin(a - b) + \sin(a + b))$$

- b) Antag att $h = 15$ cm. Skissa strålningsdiagrammet i E-planet för frekvenserna 1 GHz respektive 3 GHz. Var noga med att visa eventuella maxima och minima rätt i diagrammet. Resten av diagrammet kan illustreras skissartat. (4 poäng)

Teoridel (4 poäng)

c) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

ja ? nej

- För att fullständigt beskriva den grundläggande fysiken i uppgiften ovan räcker två av Maxwells postulat. ja ? nej
- För att fullständigt beskriva den grundläggande fysiken i uppgiften ovan behövs alla fyra Maxwells postulat. ja ? nej
- Den grundläggande fysiken i uppgiften ovan bygger **bland annat** på att rotationen av E-fältet är lika med minus tidsderivatan av B-fältet. ja ? nej
- Den grundläggande fysiken i uppgiften ovan bygger **bland annat** på att B-fältet är konservativt. ja ? nej
- Den grundläggande fysiken i uppgiften ovan bygger **bland annat** på att rotationen av B-fältet är lika med minus tidsderivatan av E-fältet plus strömtäthetsfältet. ja ? nej
- Den grundläggande fysiken i uppgiften ovan bygger **bland annat** på att divergensen av D-fältet är lika med tätheten av fria laddningar. ja ? nej

d) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

ja ? nej

- $j\omega$ -metoden för fältberäkningar fungerar bara för harmoniskt varierande fält. ja ? nej
- Tidsderivata i Maxwells ekvationer övergår i $j\omega$ -metoden till multiplikation med $(j\omega)$. ja ? nej
- Ett komplext uttryck på E-fältet innehåller ett explicit tidsberoende. ja ? nej
- För att konvertera från komplext till reellt fält multiplicerar man med $e^{-j\omega t}$ och tar imaginärdelen. ja ? nej
- Komplexa fält kan användas för att beskriva plana vågor. ja ? nej
- Maxwells fyra ekvationer kan alla uttryckas på komplex form. ja ? nej

e) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

ja ? nej

- En halv vågsdipol har ett isotropt strålningsdiagram, dvs den strålar lika mycket i alla riktningar. ja ? nej
- En halv vågsdipol är ett exempel på en antenn med relativt låg direktivitet. ja ? nej
- En mobiltelefonantenn är ett exempel på en antenn med mycket hög direktivitet. ja ? nej
- En antenn med högre strålningsresistans är mer effektiv än en antenn med låg strålningsresistans att omvandla ström i antennen till utstrålad effekt. ja ? nej
- En bra och effektiv sändarantenn karakteriseras av att dess strålningsresistans är hög. ja ? nej
- En bra och effektiv mottagarantenn karakteriseras av att dess strålningsresistans är låg. ja ? nej

f) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

ja ? nej

- Metallen koppar är ett bra exempel på material där $\sigma/\omega\epsilon \gg 1$. ja ? nej
- I en god ledare är $\alpha = \beta$. ja ? nej
- Summan av reflektionskoefficienten r och transmissionskoefficienten t för E-fältet är lika med ett, dvs $r + t = 1$. ja ? nej
- Summan av reflektionskoefficienten R och transmissionskoefficienten T för effekt är lika med ett, dvs $R + T = 1$. ja ? nej
- Reflektionskoefficienten för effekt hos E-fältet är lika med reflektionskoefficienten för E-fältet i kvadrat. ja ? nej
- Reflektionskoefficienten för effekt hos E-fältet kan vara ett komplext tal. ja ? nej

1

a) $F = (2az + y, bz^2 + u, ay - 3bu)$

Rotation free? $\rightarrow \nabla \times F = 0 \rightarrow \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2az + y & bz^2 + u & ay - 3bu \end{vmatrix} = 0$

$$\begin{vmatrix} a - 2bz & & \\ 2a - 3b & & \\ +1 & -1 & = 0 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a - 2bz = 0 \\ 2a - 3b = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -2z \\ 2 & -3 \end{bmatrix}}_D \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = 0$$

non-trivial solution $\Rightarrow \det(D) = 0 \Rightarrow -3 + 4z = 0 \Rightarrow z = \frac{3}{4}$

One example of infinite solutions: $a = 1, b = \frac{2}{3}$

b) $u = \hat{a}_\rho$ $u \cdot \nabla u = \nabla(|u|^2/2) - u \times (\nabla \times u)$

u is a unit vector $\rightarrow |u|$ is constant

$$\nabla(|u|^2/2) = 0$$

$$\nabla \times u = \frac{1}{R} \hat{a}_z \rightarrow u \times (\nabla \times u) = \hat{a}_\rho \times \frac{1}{R} \hat{a}_z = \frac{1}{R} \hat{a}_\phi$$

$$\rightarrow u \cdot \nabla u = -\frac{1}{R} \hat{a}_\rho$$

c) $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ $\vec{F} = \hat{a}_\rho + \hat{a}_z = -\cos\phi \hat{a}_\phi - \sin\phi \hat{a}_\theta + \hat{a}_z$

$$\vec{r} = \sin t \hat{a}_\theta + \cos t \hat{a}_\rho + t \hat{a}_z$$

$$\rightarrow d\vec{r} = (\cos t \hat{a}_\theta - \sin t \hat{a}_\rho + \hat{a}_z) dt$$

$$\rightarrow \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^{\pi} (-\cos\phi \cos t + \sin\phi \sin t + 1) dt$$

$$\varphi = \sin^{-1} \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$x = \sin t$$

$$y = \cos t$$

$$\varphi = \sin^{-1} \frac{\cos t}{\sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t}} = \sin^{-1} \cos t = \sin^{-1} \sin(\pi/2 - t) = \pi/2 - t \quad 0 < t < \pi$$

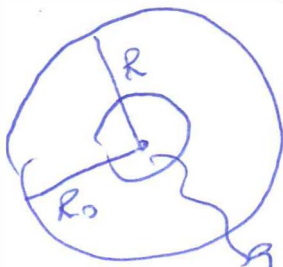
$$\int_0^{\pi} (-\cos \varphi \cos t + \sin \varphi \sin t + 1) dt = \int_0^{\pi} \underbrace{-\sin t \cos t + \cos t \sin t + 1}_0 dt = \pi$$

d) $\nabla \cdot \nabla^2 u = \frac{\partial}{\partial x_i} \nabla^2 u_i = \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j}$

$\nabla^2 \nabla \cdot u = \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_j} \nabla \cdot u = \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_i}$

} are equal.

2



$$R = 5 \text{ cm}$$

$$R_0 = 1 \text{ cm}$$

$$q = 10^{-8} \text{ C}$$

$$\epsilon_r = 4$$

ACCORDING TO GAUSS' THEOREM, THE FLUX OF \mathbf{D} ACROSS THE SPHERE SURFACE IS:

$$\oint (\mathbf{D}) = 4\pi r^2 D = q \Rightarrow D = \frac{q}{4\pi r^2} \hat{r} \quad (r \geq R_0)$$

THEN,

$$\mathbf{P} = \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \mathbf{D} = \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \frac{q}{4\pi r^2} \hat{r} \quad (R_0 \leq r \leq R)$$

POLARIZATION CHARGES DENSITY:

$$\sigma_p(R_0) = \mathbf{P}(R_0) \cdot \hat{r} = -\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \frac{q}{4\pi R_0^2} = -5.97 \cdot 10^{-6} \text{ C/m}^2$$

$$\sigma_p(R) = \mathbf{P}(R) \cdot \hat{r} = \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \frac{q}{4\pi R^2} = 0.24 \cdot 10^{-6} \text{ C/m}^2$$

ELECTROSTATIC ENERGY CAN BE CALCULATED FROM

$W = \frac{1}{2} \frac{D^2}{\epsilon}$, SO THE ENERGY DENSITY, BY INTEGRATING OVER THE VOLUME:

$$W = \frac{1}{2\epsilon_0\epsilon_r} \int_{R_0}^R D^2 4\pi r^2 dr + \frac{1}{2\epsilon_0} \int_R^{\infty} D^2 4\pi r^2 dr =$$

$$= \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0\epsilon_r} \left(\frac{1}{R_0} - \frac{1}{R} \right) + \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 R} = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0\epsilon_r} \frac{(\epsilon_r - 1)R_0 + R}{R_0 R} = 1.8 \cdot 10^{-5} \text{ J}$$

3

Take the current in the top plate in the positive z direction, and so the bottom plate current is directed along negative z . Furthermore, the bottom plate is at $y = 0$, and the top plate is at $y = d$.

Assume we can approximate the upper plate as infinitely large and use the H-field calculated with Amperes law, and by doing that we neglect edge effects at the conductors. The magnetic field strength at the bottom plate arising from the current in the top plate is $\mathbf{H} = K/2\hat{\mathbf{a}}_x$ A/m, where the top plate surface current density is $\mathbf{K} = I/b\hat{\mathbf{a}}_z$ A/m.

Now the force per unit length on the bottom plate is

$$\mathbf{F} = \int_0^1 \int_0^b \mathbf{K}_b \times \mathbf{B}_b dS$$

where \mathbf{K}_b is the surface current density on the bottom plate, and \mathbf{B}_b is the magnetic flux density arising from the top plate current, evaluated at the bottom plate location. We obtain

$$\mathbf{F} = \int_0^1 \int_0^b -\frac{I}{b} \mathbf{a}_z \times \frac{\mu_0 I}{2b} \mathbf{a}_x dS = -\frac{\mu_0 I^2}{2b} \mathbf{a}_y \text{ N/m}$$

4

Use the Biot-Savart law in a form where the integral is expressed as a surface current integral: $\mathbf{H} = \int_S \frac{\mathbf{K} \times \hat{\mathbf{a}}_R dS}{4\pi R^2}$, where \mathbf{K} is the surface current density.

Express the parameters of the integral as:

$$\mathbf{K} = \rho_s \mathbf{v} = \rho_s \rho \omega \hat{\mathbf{a}}_\phi, R = \sqrt{z^2 + \rho^2} \text{ and } \hat{\mathbf{a}}_R = (z\hat{\mathbf{a}}_z - \rho\hat{\mathbf{a}}_\rho)/R$$

The differential field at point z is

$$d\mathbf{H} = \frac{\mathbf{K} \times \hat{\mathbf{a}}_R dS}{4\pi R^2} = \frac{\rho_s \rho \omega \hat{\mathbf{a}}_\phi \times (z\hat{\mathbf{a}}_z - \rho\hat{\mathbf{a}}_\rho)}{4\pi(z^2 + \rho^2)^{3/2}} \rho d\rho d\phi = \frac{\rho_s \rho \omega (z\hat{\mathbf{a}}_\rho + \rho\hat{\mathbf{a}}_z)}{4\pi(z^2 + \rho^2)^{3/2}} \rho d\rho d\phi$$

Integrating the above over ϕ around a complete circle, the $\hat{\mathbf{a}}_\rho$ components cancel from symmetry, leaving us with

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(z) &= \int_0^{2\pi} \int_0^a \frac{\rho_s \rho \omega \rho \hat{\mathbf{a}}_z}{4\pi(z^2 + \rho^2)^{3/2}} \rho d\rho d\phi = \int_0^a \frac{\rho_s \omega \rho^3 \hat{\mathbf{a}}_z}{2(z^2 + \rho^2)^{3/2}} d\rho \\ &= \frac{\rho_s \omega}{2} \left[\sqrt{z^2 + \rho^2} + \frac{z^2}{\sqrt{z^2 + \rho^2}} \right]_0^a \hat{\mathbf{a}}_z = \frac{\rho_s \omega}{2z} \left[\frac{a^2 + 2z^2(1 - \sqrt{1 + a^2/z^2})}{\sqrt{1 + a^2/z^2}} \right] \hat{\mathbf{a}}_z \end{aligned}$$

5

$$H = \hat{y} e^{-1000z} \cos(10^7 t - \beta x) = H_y \hat{y}$$

$$\nabla \times H = \epsilon \frac{\partial E}{\partial t}$$

$$\nabla \times H = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & H_y & 0 \end{vmatrix} = -\hat{x} \frac{\partial H_y}{\partial z} + \hat{z} \frac{\partial H_y}{\partial x}$$

• E-field COMPONENTS:

$$\begin{cases} \epsilon \frac{\partial E_x}{\partial t} = 1000 e^{-1000z} \cos(10^7 t - \beta x) \\ \epsilon \frac{\partial E_z}{\partial t} = \beta e^{-1000z} \sin(10^7 t - \beta x) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} E_x = \frac{10^{-4}}{\epsilon} e^{-1000z} \sin(10^7 t - \beta x) \\ E_z = -\frac{\beta 10^7}{\epsilon} e^{-1000z} \cos(10^7 t - \beta x) \end{cases}$$

• IS IT A PLANE WAVE?

NO! E and H are not constant in the planes perpendicular to the propagation direction.

• FROM WAVE EQUATION FOR THE H-FIELD:

$$\nabla^2 H_y + \frac{\omega^2}{c^2} H_y = 0$$

$$\Rightarrow 1000^2 - \beta^2 + \frac{\omega^2}{c^2} = 0 \quad \Rightarrow \beta = \sqrt{1000^2 + \frac{\omega^2}{c^2}}$$

6

$$I(z), I_m \sin(\beta(h-|z|))$$

a) From a differential current element:

$$dE_{\theta}, \eta \cdot dH_{\phi}, j \frac{I dz}{4\pi} \left(\frac{e^{-j\beta R'}}{R'} \right) \eta \cdot \beta \sin \theta$$

In the far zone: $R', (R^2 + z^2 - 2Rz \cos \theta)^{1/2} \approx R - z \cos \theta$

$$E_{\theta}, \eta \cdot H_{\phi}, j \frac{I_m \eta \cdot \beta \sin \theta}{4\pi R} e^{-j\beta R} \int_{-h/2}^{h/2} \sin \beta(h-|z|) e^{j\beta z \cos \theta} dz$$

$$\underbrace{\cos(\beta z \cos \theta) + j \sin(\beta z \cos \theta)}_{\text{odd function}}$$

$$E_{\theta}, j \frac{I_m \eta \cdot \beta \sin \theta}{4\pi R} e^{-j\beta R} \int_{-h/2}^{h/2} \sin \beta(h-z) \cos(\beta z \cos \theta) dz$$

$$\int_{-h}^h (-) = 0$$

$$= j \frac{I_m \eta \cdot \beta \sin \theta}{2\pi R} e^{j\beta R} \int_0^{h/2} \sin(\beta h - \beta(\cos \theta + 1)z) + \sin(\beta h + \beta(\cos \theta - 1)z) dz$$

$$= \underbrace{j \frac{I_m \eta \cdot \beta \sin \theta}{4\pi R} e^{-j\beta R}}_{I_0} \left[\frac{-\cos(-\beta(\cos \theta + 1)z + \beta h)}{-\beta(\cos \theta + 1)} \right]_{0}^{h/2}$$

$$+ \frac{\cos(\beta(\cos \theta - 1)z + \beta h)}{\beta(\cos \theta - 1)} \Big|_{0}^{h/2}$$

$$= I_0 \left[\frac{[-\cos(-\beta \cos \theta \frac{h}{2}) + \cos \beta \frac{h}{2}]}{-\beta(\cos \theta + 1)} + \frac{\cos(\beta \cos \theta \frac{h}{2}) - \cos \beta \frac{h}{2}}{\beta(\cos \theta - 1)} \right]$$

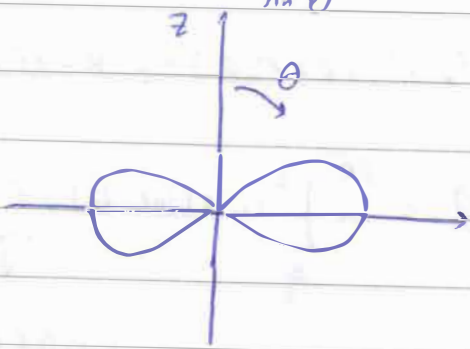
$$= I_0 \frac{\cos(\beta \frac{h}{2} \cos \theta) - \cos \beta \frac{h}{2}}{\sin \theta} = I_0 F(\theta)$$

b) $h = 15 \text{ cm}$ $f = 1 \text{ GHz}$ $\rightarrow \lambda = \frac{c}{f} = \frac{3 \times 10^8}{1 \times 10^9} = 30 \text{ cm}$

$\rightarrow \frac{h}{\lambda} = 0.5 \rightarrow \frac{\beta h}{2} = n \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$

$\rightarrow F(\theta) = \frac{\cos(\beta h_2 \cos \theta) - \cos \beta h_2}{\sin \theta} = \frac{\cos(\frac{\pi}{2} \cos \theta)}{\sin \theta}$

- $\theta = 0 \rightarrow F(\theta) = 0$
- $\theta = \pi/2 \rightarrow F(\theta) \neq 0$
- $\theta = \pi \rightarrow F(\theta) = 0$



$f = 3 \text{ GHz}$ $\rightarrow \lambda = \frac{3 \times 10^8}{3 \times 10^9} = 10 \text{ cm}$

$\rightarrow \frac{h}{\lambda} = 3/2 \rightarrow \frac{\beta h}{2} = \frac{3\pi}{2} \rightarrow F(\theta) = \frac{\cos(3\pi \cos \theta)}{\sin \theta}$

- $\theta = 0 \rightarrow F(\theta) = 0$
- $\theta = \cos^{-1} 1/3 \rightarrow F(\theta) = 0$
- $\theta = \pi/2 \rightarrow F(\theta) = 2$
- $\theta = \cos^{-1} 2/3 \rightarrow F(\theta) = 0$

