

# Tentamen i Vektorfält och elektromagnetisk fältteori, EEN190

- Tid:** 2023-03-13, kl. 8:30-13:30
- Hjälpmedel:** Physics Handbook  
Beta Mathematics Handbook  
Typgodkänd kalkylator  
Formelsamlingar i vektorfält och elektromagnetisk fältteori med egna formler skrivna på sista sidan.  
Inga andra anteckningar eller lösta tal är tillåtna.
- Förfrågningar:** Andreas Fhager
- Lösningar:** Anslås på kursens hemsida senast första vardagen efter duggan
- Resultatet:** Distribueras via LADOK
- Granskning:** Plats och tid annonseras på kurshemsidan
- Om rättningen:** Svar och lösningar skall motiveras och förklaras.  
Skriv tydligt och förklara vad ni gör i er lösning och vilken metod som används.  
Poängavdrag görs för otydliga figurer och lösningar samt lösningar som inte förklaras eller motiveras.  
Mindre allvarliga fel och rena räknefel leder till mindre avdrag.  
Mer allvarliga, principiella fel och metodfel leder till större avdrag.  
Poängavdrag görs även för utelämnade referensriktningar, dimensionsfel och uppenbart orimliga svar.
- Betygsgränser:** Betyg 3: Totalt 36, varav  $\geq 21$  på problemdelen och  $\geq 8$  på teorin  
Betyg 4: Totalt 48, varav  $\geq 26$  på problemdelen och  $\geq 10$  på teorin  
Betyg 5: Totalt 60, varav  $\geq 31$  på problemdelen och  $\geq 12$  på teorin

***Svaren på teoridelen skall ges på tesen som lämnas in.***

Teorifrågorna besvaras genom att markera en av rutorna efter varje påstående. En och endast en ruta på varje rad skall markeras. De tre svarsalternativen är Ja, Vet ej och Nej. Korrekt svar ger +0,2 poäng, inkorrekt svar ger -0,2 poäng. Vet ej är neutralt och ger 0 poäng. Förståelseuppgifterna ger maximalt 1 poäng och lägst -1 poäng och man kan därför få 1 poäng även med ett Vet ej svar.

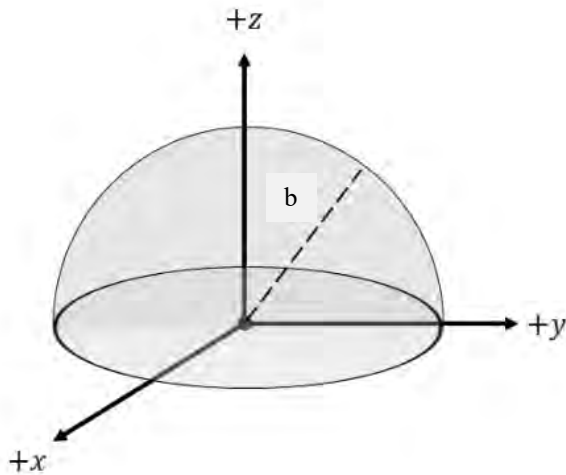
**Anonym kod:** \_\_\_\_\_

**Lycka till!**

# 1

## Problemlösningsdel (12 poäng)

- a) Beräkna linjeintegralen  $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$  där  $\mathbf{F} = (z^3, \cos(\pi x), y + 2x)$  och  $C$  ges av parametriseringen  $x = t, y = 2t, z = t^2$  där  $0 < t < 1$ . (3 poäng)
- b) Givet vektorfältet  $\mathbf{A} = \sin(\theta)\hat{\mathbf{a}}_\theta$ , verifiera Stokes sats över det halvsfäriska skalet med radien  $b$  och motsvarande cirkelformade rand i  $xy$ -planet (se figuren). Visa detta genom att explicit beräkna en ytintegral och motsvarande linjeintegral och att visa hur Stokes sats är uppfylld. (3 poäng)

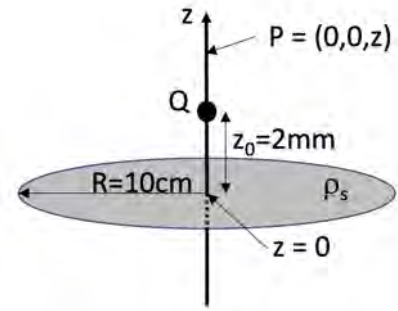


- c) Förenkla följande uttryck givna i indexnotation. ( $a, b, c$  är vektorer) (3 poäng)
- $\delta_{ij}\delta_{jk}\delta_{ki}$
  - $\epsilon_{ijk}\epsilon_{klm}\epsilon_{mni}$
  - $\delta_{ij}a_j b_l c_k \delta_{li}$
- d) Ta fram ett uttryck för den kartesiska enhetsvektorn  $\hat{\mathbf{a}}_x$  (riktad i x-led) i termer av sfäriska koordinater. Uttryck enhetsvektorn i punkten  $r = 2.5, \phi = 0.7 \text{ rad}, z = 1.5$ , vilken är given i cylindriska koordinater. (3 poäng)

## 2

### Problemlösningsdel (8 poäng)

En laddad skiva med ytladdningstäthet  $\rho = 1 \text{ nC/cm}^2$  och radie  $R = 10 \text{ cm}$  är placerad i  $xy$ -planet vid  $z=0$ . Se figuren. Skivans centrum kan antas ligga i origo och ytladdningstätheten är jämnt fördelad över skivan.



- Beräkna E-fältet i en punkt, P på z-axeln ovanför skivan. (4 poäng)
- En laddad partikel,  $Q = +3,2 \text{ nC}$  är placerad på z-axeln på ett avstånd  $z_0 = 2 \text{ mm}$  över den laddade skivan. Beräkna massan,  $m$ , hos partikeln så att gravitationskraften som vill dra partikeln nedåt, (i negativ z-led), och den elektrostatiske kraften precis balanserar varandra varvid partikeln befinner sig i jämvikt i punkten. (2 poäng)
- Antag att den cirkulära skivan ersätts med ett oändligt stort plan vid  $z=0$  som har en ytladdningstäthet,  $\rho_s$ . Beräkna hur stor ytladdningstäthet som behövs för att partikeln fortsatt ska befinna sig i jämvikt mellan gravitationskraften och den elektrostatiske kraften. (2 poäng)

### Teoridel (4 poäng)

#### d) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

- |   | ja ?                     | nej                      |
|---|--------------------------|--------------------------|
| För att fullständigt beskriva den grundläggande fysiken i uppgiften ovan räcker ett av Maxwells postulat.     | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| För att fullständigt beskriva den grundläggande fysiken i uppgiften ovan behövs två av Maxwells postulat.     | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| Den grundläggande fysiken i problemlösningsdelen bygger <b>bland annat</b> på att B-fältet är divergensfritt. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| Den grundläggande fysiken i problemlösningsdelen bygger <b>bland annat</b> på att E-fältet är divergensfritt. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| Den grundläggande fysiken i problemlösningsdelen bygger <b>bland annat</b> på att B-fältet är rotationsfritt. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| Den grundläggande fysiken i problemlösningsdelen bygger <b>bland annat</b> på att E-fältet är rotationsfritt. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

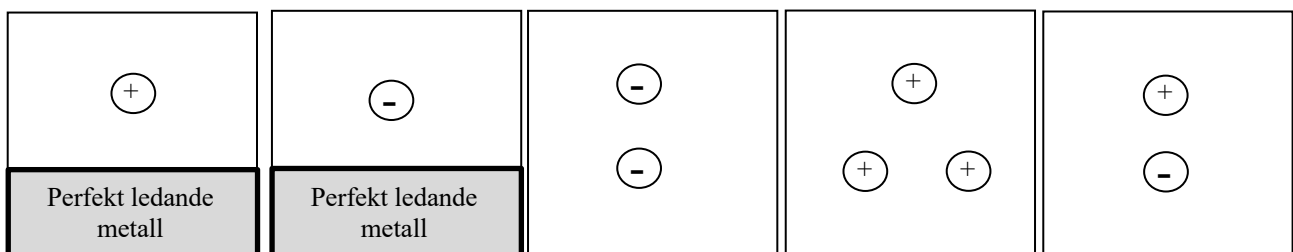
#### e) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

- |  | ja ?                     | nej                      |
|--|--------------------------|--------------------------|
| Elektrostatiske potentialytor är alltid vinkelräta mot E-fältslinjerna.  | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| E-fältslinjer kan korsa varandra.  | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| Poissons ekvation härleds genom att sätta in uttrycket för E-fältet från definitionen av potentialen, $E = -\nabla V$ i Gauss lag. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| För att lösningen till Poissons ekvation ska bli entydig krävs att man specificerar randvillkor.                                   | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| Man kan alltid använda speglingsmetoden för att lösa Poissons ekvation.  | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| En perfekt ledare har alltid samma potential i hela sin volym.   | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

#### f) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga? (Frågan gäller elektostatik)

- |   | ja ?                     | nej                      |
|---|--------------------------|--------------------------|
| D-fältslinjerna är alltid riktade åt samma håll som E-fältslinjerna.  | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| P-fältslinjerna är alltid riktade åt samma håll som E-fältslinjerna.  | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| D-fältets tangentialkomponent kan vara diskontinuerlig i gränsen mellan två material med olika permittivitet. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| D-fältets normalkomponent kan vara diskontinuerlig i gränsen mellan två material med olika permittivitet.     | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| E-fältets tangentialkomponent kan vara diskontinuerlig i gränsen mellan två material med olika permittivitet. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| E-fältets normalkomponent kan vara diskontinuerlig i gränsen mellan två material med olika permittivitet.     | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

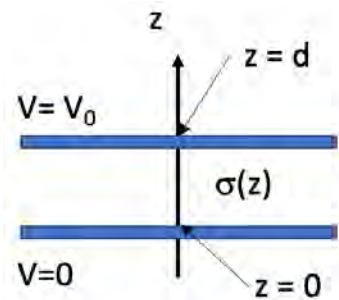
g) Skissa **E-fältslinjerna** runt följande laddningsfördelningar. Alla bilder visar tvärsnitt av olika konfigurationer av positiva och negativa små sfäriska laddningar, antag att laddningarna befinner sig ensam i vacuum (om inget annat anges). För poäng ska det principiella utseendet vara korrekt i hela det markerade kvadratiske området för respektive konfiguration. (Korrekt svar ger +0,2p och felaktigt svar ger -0,2p på samma sätt som övriga teorifrågor) (1 poäng)



### 3

#### Problemlösningsdel (8 poäng)

Två ledande plattor som båda har arean  $A$  är placerade mittemot varandra så att plattorna ligger parallellt med varandra, den ena i  $z = 0$  och den andra i  $z = d$ . Området mellan plattorna är fyllt med ett ledande material med den rumsberoende konduktiviteten  $\sigma(z) = \sigma_0 e^{-z/d}$ , där  $\sigma_0$  är en konstant. En potential  $V_0$  ansluts till plattan vid  $z = d$ , och plattan vid  $z = 0$  ges potentialen  $0$  V. (Antag att plattorna är mycket stora så man kan bortse från kanteffekter.)



- Beräkna resistansen mellan plattorna.
- Beräkna den totala strömmen som flyter mellan plattorna.
- Beräkna E-fältet mellan plattorna.

#### Teoridel (4 poäng)

**d) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?**

- |   | ja ?                     | nej                      |
|---|--------------------------|--------------------------|
| För att fullständigt beskriva den grundläggande fysiken <i>i magnetostatiken</i> räcker ett av Maxwells postulat. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| För att fullständigt beskriva den grundläggande fysiken <i>i magnetostatiken</i> behövs två av Maxwells postulat. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| Den grundläggande fysiken <i>i magnetostatiken</i> bygger <b>bland annat</b> på att B-fältet är divergensfritt.   | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| Den grundläggande fysiken <i>i magnetostatiken</i> bygger <b>bland annat</b> på att E-fältet är divergensfritt.   | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| Den grundläggande fysiken <i>i magnetostatiken</i> bygger <b>bland annat</b> på att B-fältet är rotationsfritt.   | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| Den grundläggande fysiken <i>i magnetostatiken</i> bygger <b>bland annat</b> på att E-fältet är rotationsfritt.   | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

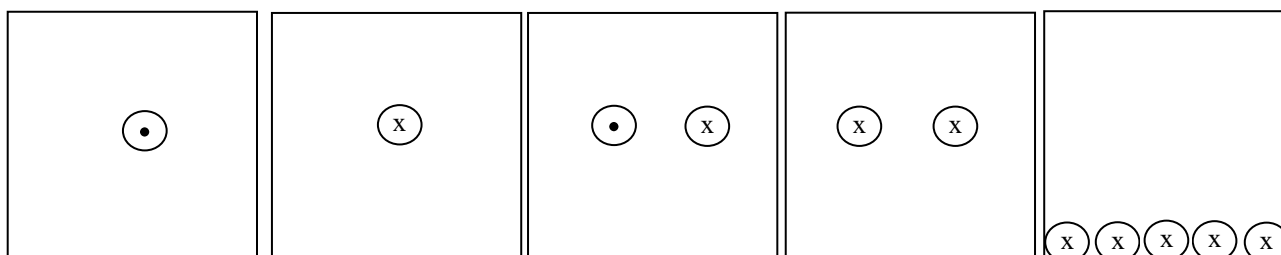
**e) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga? (Frågan gäller magnetostatik)**

- |   | ja ?                     | nej                      |
|---|--------------------------|--------------------------|
| B-fältets tangentialkomponent är alltid kontinuerlig i gränsen mellan två material med olika permeabilitet                        | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| H-fältets tangentialkomponent är alltid kontinuerlig i gränsen mellan två material med olika permeabilitet.                       | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| J-fältets tangentialkomponent är alltid kontinuerlig i gränsen mellan två material med olika konduktivitet.                       | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| J-fältets normalkomponent är alltid kontinuerlig i gränsen mellan två material med olika konduktivitet.                           | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| Magnetiska monopoler används för att modellera magnetiska material.   | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| Järns magnetiska egenskaper ett exempel på ett linjärt materialsamband som ger ett perfekt linjärt samband mellan B och H-fälten. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**f) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?**

- |   | ja ?                     | nej                      |
|---|--------------------------|--------------------------|
| Magnetiska krafter kan förstas ut ett resonemang som baseras på att kontinuitetsekvationen alltid ska vara uppfylld.  | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| Om vi använder metoden med virtuella förflyttningar för att beräkna den magnetiska kraften kan både flöde och ström hållas konstanta samtidigt under den tänkta förflyttningen.   | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| Om man använder metoden med virtuella förflyttningar för att beräkna kraft, och håller strömmen konstant blir kraften större än om man håller flödet konstant eftersom batteriet i det fallet levererar energi till systemet för att hålla strömmen konstant. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| Magnetostatisk energi i ett B-fält kan tolkas som det arbete som åtgår för att öka strömmen från noll till den ström som genererar motsvarande B-fält.  | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| Det magnetiska flödet genom en yta kan beräknas som en ytintegral av den magnetiska vektorpotentialen över ytan.  | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| Den magnetiska vektorpotentialen är pekar i samma riktning som B-fältet.  | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**g) Skissa B-fältslinjerna runt följande strömmar. Alla bilder visar tvärsnitt av olika konfigurationer av strömmar som går in eller ut ur papperets plan, antag att strömmarna befinner sig ensamma i vacuum (om inget annat anges). För poäng ska det principiella utseendet vara korrekt i hela det markerade kvadratiska området för respektive konfiguration. (Korrekt svar ger +0,2p och felaktigt svar ger -0,2p på samma sätt som övriga teorifrågor) (1 poäng)**



# 4

## Problemlösningsdel (8 poäng)

- a) Visa att induktansen per längdenhet för ett system med två ledare som för lika stora men motriktade strömmar är approximativt  $L = (\mu/\pi)\ln[d/a]$  H/m, där  $a$  är ledarnas radie och  $d$  är avståndet mellan ledarna. Man kan anta att ledarna är mycket långa. (6 poäng)
- b) Vilken approximation måste göras för att få fram det givna uttrycket? (2 poäng)

## Teoridel (4 poäng)

### c) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

ja ? nej

För att fullständigt beskriva den grundläggande fysiken i uppgiften ovan räcker två av Maxwells postulat.

För att fullständigt beskriva den grundläggande fysiken i uppgiften ovan behövs alla fyra Maxwells postulat.

Den grundläggande fysiken i problemlösningsdelen bygger **bland annat** på att B-fältet är divergensfritt.

Den grundläggande fysiken i problemlösningsdelen bygger **bland annat** på att E-fältet är divergensfritt.

Den grundläggande fysiken i problemlösningsdelen bygger **bland annat** på att B-fältet är rotationsfritt.

Den grundläggande fysiken i problemlösningsdelen bygger **bland annat** på att E-fältet är rotationsfritt.

### d) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

ja ? nej

Amperes lag modifieras när man går från magnetostatik till dynamik (dvs tidsvarierande fält).

Gauss lag modifieras när man går från elektrostatik till dynamik.

De fyra Maxwell postulat som behövs för att beskriva den dynamiska teorin kan motsäga den elektrostatiska teorin och dess två postulat som beskriver elektrostatiska fält.

Kontinuitetsekvationen innehåller samma nollskilda termer i statiken som i dynamiken.

Lenz lag säger att en inducerad spänning är sådan att den motverkar förändring i det externt pålagda magnetfältet.

Lenz lag härleds från kontinuitetsekvationen.

### e) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

ja ? nej

Man kan välja rotationen av den magnetiska vektorpotentialen fritt i dynamiken.

Man kan välja divergensen av den magnetiska vektorpotentialen fritt i dynamiken.

Egeninduktansen är ett bra mått för att beskriva hur två lindningar i en transformator kopplar till varandra.

Två spolars ömsesidiga induktans beror bland annat på hur stor strömmen är i de båda spolarna.

Två spolars ömsesidiga induktans beror bland annat på hur många lindningsvarv som finns i de två spolarna.

Två spolars ömsesidiga induktans beror bland annat på deras avstånd till varandra.

### f) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

ja ? nej

Den skalära elektriska potentialen kan beskriva elektriska fält som härrör sig från laddningar.

Den skalära elektriska potentialen kan beskriva elektriska fält som härrör sig från induktion.

E-fältet är konservativt i elektrodynamiken.

Lösningar till Poissons ekvation är exempel på retarderade potentialer.

Retarderade potentialer säger att E- och B- fält utbreder sig med ljusets hastighet.

Om fälten varierar sinusformigt kan det vara praktiskt att använda komplex notation då man beskriver retarderade potentialer.

# 5

## Problemlösningsdel (8 poäng)

En plan elektromagnetisk våg med frekvensen  $f = 7,5 \cdot 10^{14}$  Hz propagerar längs x-axeln. Vågen är linjärt polariserad med E-fältsvektorn i riktning  $\theta = 30^\circ$  från y-axeln och har amplituden  $E_0 = 103$  V/m.

- Skriv ned ett uttryck för denna plana våg. (6 poäng)
- Beräkna amplituden av tillhörande magnetiska fält, (H-fältet). (2 poäng)

## Teoridel (4 poäng)

### c) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

	ja	?	nej
För att fullständigt beskriva den grundläggande fysiken i uppgiften ovan räcker två av Maxwells postulat.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
För att fullständigt beskriva den grundläggande fysiken i uppgiften ovan behövs alla fyra Maxwells postulat.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Den grundläggande fysiken i uppgiften ovan bygger <b>bland annat</b> på att rotationen av E-fältet är lika med minus tidsderivatan av B-fältet.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Den grundläggande fysiken i uppgiften ovan bygger <b>bland annat</b> på att B-fältet är divergensfritt.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Den grundläggande fysiken i uppgiften ovan bygger <b>bland annat</b> på att B-fältet är rotationsfritt.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Den grundläggande fysiken i uppgiften ovan bygger <b>bland annat</b> på att divergensen av D-fältet är lika med tätheten av fria laddningar.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

### d) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

	ja	?	nej
En evanescent våg uppkommer som en lösning till vågekvationen.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Totalreflektion ger upphov till evanescenta vågor vid gränssytan.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
En cirkulärpolariserad plan våg träffar en plan gränssyta till ett förlustfritt dielektrikum under Brewstervinkeln. Reflektionen blir då elliptiskt polariserad.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
En linjärpolariserad plan våg träffar en plan gränssyta till ett förlustfritt dielektrikum under Brewstervinkeln. Reflektionen kan då bli noll.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
En cirkulärpolariserad plan våg träffar en plan gränssyta till ett förlustfritt dielektrikum under Brewstervinkeln. Reflektionen blir då linjärpolariserad.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Totalreflektion inträffar vid Brewstervinkeln.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

### e) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

	ja	?	nej
En plan våg (benämnd uniform plane wave i kursboken) kan ha en B-fältsvektor riktad i utbredningsriktningen.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
En plan våg (uniform plane wave) kan ha en E-fältsvektor riktad i utbredningsriktningen.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
En plan våg (uniform plane wave) kan ha E- och H-fältsvektorer som är rumsberoende över ett plan som är vinkelrätt mot utbredningsriktningen.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
En plan våg (uniform plane wave) har alltid en B-fältsvektor riktad vinkelrätt mot utbredningsriktningen.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
En plan våg (uniform plane wave) har alltid en E-fältsvektor riktad vinkelrätt mot utbredningsriktningen.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
En plan våg (uniform plane wave) kan ha en rumsberoende utbredningsriktning.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

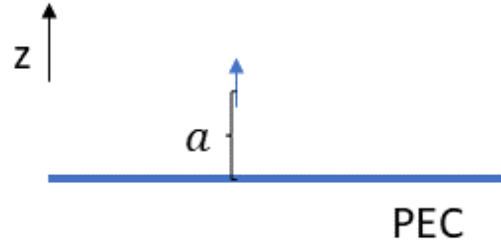
### f) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

	ja	?	nej
Vågimpedansen hos luft är $Z = 377 \Omega$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
I en god ledare ligger H-fältet i fas med E-fältet, dvs E och H-fält har till exempel maxima i samma punkt i rummet vid samma tidpunkt.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Absolutbeloppet av vågimpedansen för en <i>icke-ferromagnetisk</i> god ledare är lägre än för luft.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Om ett material har en konduktivitet som är noll så är vågimpedansen ett rent imaginärt tal.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Vågimpedansen för en god ledare är beroende av både permittiviteten och konduktiviteten.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Vakuüm är dispersionsfritt, dvs fashastigheten = gruppshastigheten.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

# 6

## Problemlösningsdel (8 poäng)

En Hertzdipol ligger placerad längs med z-axeln, på ett avstånd  $a$  ovanför ett mycket stort, perfekt ledande plan. Se figuren.



- Beräkna E-fältet i området ovanför planet. (3 poäng)
- Beräkna tidsmedelvärdet av den utstrålade effekten i området ovanför planet. (2 poäng)
- Beräkna minsta värdet på  $a$  som gör att den utstrålade effekten blir noll i riktningen  $\theta = 60^\circ$ . Uttryck avståndet  $a$  i antal våglängder. (Vinkeln  $\theta$  räknas som i sfäriska koordinater, dvs från z-axeln.) (3 poäng)

## Teoridel (4 poäng)

### d) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

- |   | ja                       | ?                        | nej                      |
|---|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| För att fullständigt beskriva den grundläggande fysiken i uppgiften ovan räcker två av Maxwells postulat.   | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| För att fullständigt beskriva den grundläggande fysiken i uppgiften ovan behövs alla fyra Maxwells postulat.  | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| Den grundläggande fysiken i uppgiften ovan bygger <b>bland annat</b> på att rotationen av E-fältet är lika med minus tidsderivatan av B-fältet.                         | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| Den grundläggande fysiken i uppgiften ovan bygger <b>bland annat</b> på att B-fältet är konservativt.   | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| Den grundläggande fysiken i uppgiften ovan bygger <b>bland annat</b> på att rotationen av B-fältet är lika med minus tidsderivatan av E-fältet plus strömtäthetsfältet. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| Den grundläggande fysiken i uppgiften ovan bygger <b>bland annat</b> på att divergensen av D-fältet är lika med tätheten av fria laddningar.                            | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

### e) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

- |   | ja                       | ?                        | nej                      |
|---|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| Poyntings teorem uttrycker energikonsivering genom att förändringen av elektrisk och magnetisk energi i ett område är lika med utstrålad effekt plus Joulska förluster, (värmeförluster). | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| Poyntingvektorn kan definieras med hjälp av komplexa B- och E-fält.   | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| Poyntingvektorn kan definieras som tidsmedelvärde eller som momentanvärde.  | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| Poyntingvektorn för en plan våg är riktad i samma riktning som E-fältsvektorn.  | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| Poyntingvektorn för en plan våg är riktad i samma riktning som B-fältsvektorn.  | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| Enheten för Poyntingvektorn är $W/m^3$ .  | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

### f) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

- |   | ja                       | ?                        | nej                      |
|---|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| En Hertzdipol har ett isotropt strålningsdiagram, dvs den strålar lika mycket i alla riktningar.  | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| En halv vågsdipol har ett isotropt strålningsdiagram, dvs den strålar lika mycket i alla riktningar.  | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| En halv vågsdipol är ett exempel på en antenn med mycket hög direktivitet.  | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| En parabolantenn är ett exempel på en antenn med mycket hög direktivitet.   | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| En antenn med högre strålningsresistans är mer effektiv än en antenn med låg strålningsresistans att omvandla ström i antennen till utstrålad effekt. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| Fälten som har sitt ursprung i en Hertzdipol kan beskrivas med retarderade potentialer.   | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

### g) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

- |  | ja                       | ?                        | nej                      |
|--|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| Metallen koppar är ett bra exempel på material där $\sigma/\omega\epsilon \ll 1$ .   | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| I en god ledare är $\alpha = \beta$ .  | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| Inträngningsdjupet i en god ledare ökar med ökande konduktivitet.  | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| För en växelström med mycket hög frekvens betyder inträngningsdjupet att strömmen i framför allt leds på eller nära ytan av ledaren. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| Plast är ett bra exempel på material där $\sigma/\omega\epsilon \gg 1$ .   | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| I en isolator är $\alpha = \beta$ .  | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |



1a.  $\int_C F \cdot dr$ ?  $F = (z^3, C, nu, y+2z)$

$C: x=t, y=2t, z=t^2 \quad 0 < t < 1$

Parametric Evaluation  $\rightarrow dr = (dx, dy, dz) = (1, 2, 2t) dt$   
 $F = (t^6, C, nt, 4t)$

$$\int_C F \cdot dr = \int_0^1 (t^6, C, nt, 4t) \cdot (1, 2, 2t) dt$$

$$= \int_0^1 t^6 + 2C, nt + 8t^2 dt$$

$$= \frac{t^7}{7} + \frac{2 \sin nt}{n} + \frac{8t^3}{3} \Big|_0^1$$

$$= \frac{1}{7} + \frac{8}{3} = \frac{59}{21}$$

1b  $A = \sin \theta \hat{a}_\theta$

$$\nabla \times A = \frac{1}{R \sin \theta} \left( \frac{\partial}{\partial \theta} (A_\phi \sin \theta) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi} \right) \hat{a}_R$$

$$+ \frac{1}{R} \left( \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial A_R}{\partial \phi} - \frac{\partial (R A_\phi)}{\partial R} \right) \hat{a}_\theta$$

$$+ \frac{1}{R} \left( \frac{\partial (R A_\theta)}{\partial R} - \frac{\partial A_R}{\partial \theta} \right) \hat{a}_\phi = \frac{\sin \theta}{R} \hat{a}_\phi$$

$$\int_S (\nabla \times A) \cdot dS = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} (\nabla \times A)_{R\theta\phi} \cdot (\hat{a}_R b^2 \sin \theta d\theta d\phi) = 0 = \int A \cdot dl$$

$\hat{a}_\theta \hat{a}_\phi$



1c.

$$- \delta_{ij} \delta_{jk} \delta_{ki} + \delta_{ik} \delta_{ki} + \delta_{ji} + \delta_{ij}$$

$$- \epsilon_{ijk} \epsilon_{klm} \epsilon_{mni} (\delta_{il} \delta_{jn} - \delta_{in} \delta_{jl}) \epsilon_{mni} \\ = \epsilon_{jnl} - \epsilon_{ini} \delta_{jl} + \epsilon_{jil}$$

$$- \delta_{ij} a_j b_l c_k \delta_{li} + a_i b_i c_k + [(a, b) c]_k$$

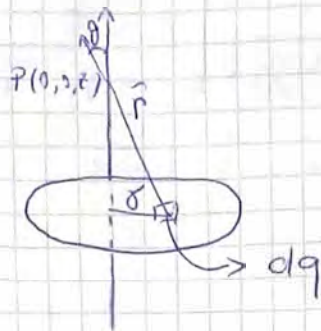
1d.

$$R = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5} \quad \theta = \cos^{-1} \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad \cos^{-1} \frac{1.5}{\sqrt{8.5}} = 59^\circ \\ \phi = 0.7^{\text{rad}}, 40.1^\circ$$

$$a_{ns} = \sin 59^\circ \cos 40.1^\circ \hat{a}_R + \cos 59^\circ \cos 40.1^\circ \hat{a}_\theta + (-\sin 40.1^\circ) \hat{a}_\phi$$

$$= 0.66 \hat{a}_R + 0.32 \hat{a}_\theta - 0.64 \hat{a}_\phi$$

## 2 ELECTROSTATICS - EX 2



a) we compute the contribution from a small element  $dq$ .

$$dq = \rho \underbrace{[r dr d\theta]}_{\text{radius}}$$

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2} \hat{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2+z^2} \hat{r}$$

$$r = \sqrt{r^2+z^2}$$

$$dE_z = dE \cdot \cos\theta = dE \cdot \frac{z}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq \cdot z}{(r^2+z^2)^{3/2}}$$

$$E_z = \frac{\rho}{4\pi\epsilon_0} \cdot z \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \frac{r dr}{(r^2+z^2)^{3/2}} =$$

$$= \frac{\rho \cdot z}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} d\theta \left[ -\frac{1}{\sqrt{r^2+z^2}} \right]_0^R = \frac{\rho \cdot z}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} d\theta \left[ \frac{1}{\sqrt{R^2+z^2}} + \frac{1}{z} \right]$$

$$= \frac{\rho \cdot z}{2\epsilon_0} \cdot 2\pi \left[ \frac{1}{z} - \frac{1}{\sqrt{R^2+z^2}} \right] = \boxed{\frac{\rho}{2\epsilon_0} \left[ 1 - \frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}} \right]}$$

b) We need to equate the two forces (electrostatic and weight)

$$F_w = F_e$$

$$\Rightarrow m \cdot g = q E_z(z_0)$$

$$\Rightarrow m = \frac{q\rho}{2\epsilon_0 g} \left[ 1 - \frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}} \right]$$

=> SUBSTITUTING THE numerical values:

$$m = \frac{3.2 \cdot 10^{-9} \text{ E} \cdot 10^{-9} \text{ C/cm}^2}{2 \cdot 8.85 \cdot 10^{-12} \cdot 981 \text{ cm/s}^2} \left[ 1 - \frac{0.2 \text{ cm}}{\sqrt{1.0^2 + 0.2^2}} \right] = 1.8 \cdot 10^{-10} \text{ kg}$$

e) on a infinite plane, we have:

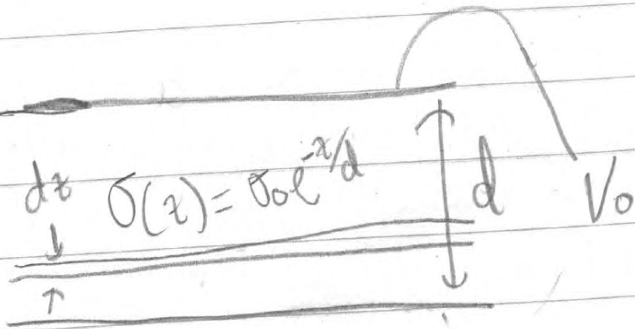
$$1E = \frac{\rho_s}{2\epsilon_0}$$

again,  $qE = mg$

$$\Rightarrow \frac{q \rho_s}{2\epsilon_0} = mg \Rightarrow \boxed{\rho_s = \frac{2\epsilon_0 mg}{q}}$$

$\Rightarrow$





a) resistance of material:

the differential resistance of a thin slab of the material of thickness  $dz$ ,

$$dR = \frac{dz}{\sigma A} = \frac{e^{x/d} dz}{\sigma_0 A}$$

$$R = \int dR = \int_0^d \frac{e^{x/d} dz}{\sigma_0 A} = \frac{d}{\sigma_0 A} (e-1) = \frac{1.72 d}{\sigma_0 A} \Omega$$

b) the total current flowing between plates:

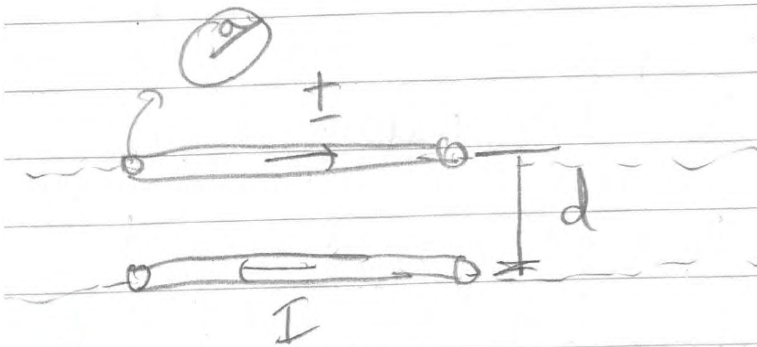
$$I = \frac{V_0}{R} = \frac{\sigma_0 A V_0}{1.72 d}$$

c) the electric field intensity  $E$  within the material

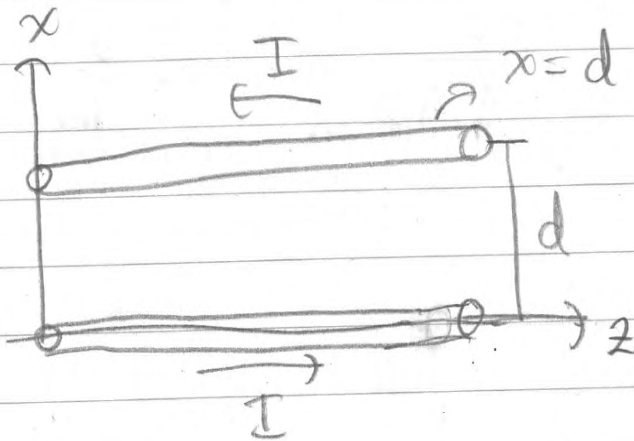
$$\mathbf{J} = -\frac{\mathbf{I}}{A} \hat{a}_z = -\frac{\sigma_0 V_0}{1,72 d} \hat{a}_z$$

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{J}}{\sigma(z)} = -\frac{V_0 e^{z/d}}{1,72 d} \hat{a}_z \frac{V}{m}$$

4



1) Find appropriate coordinate system



Assume  $I$  is going in the positive direction in  $z$  for the wire at  $x=0$

2) Calculate  $B$   
the magnetic flux density arising from both currents will be (Region:  $a < x < d-a$ )

$$B(x) = \left( \frac{\mu I}{2\pi x} + \frac{\mu I}{2\pi x} \right) \hat{a}_y = \frac{\mu I}{\pi x} \hat{a}_y \quad \frac{Wb}{m^2}$$

3) Find  $\phi = \int B \cdot ds$

$$\begin{aligned} \phi &= \int B \cdot ds = \int_a^{(d-a)} \frac{\mu I}{\pi x} \hat{a}_y \cdot \hat{a}_y dx \\ &= \frac{\mu I}{\pi} \ln \left( \frac{d-a}{a} \right) \end{aligned}$$

4)

$$L = \frac{\phi}{\pm} = \frac{\mu}{\pi} \ln\left(\frac{d-a}{a}\right)$$

to get to the approx. given  
in the exercise we need to assume  
 $a \ll d$  then we get.

$$L = \frac{\mu}{\pi} \ln\left(\frac{d}{a}\right)$$



## WAVES PROPAGATION - EX 5

a) The E-field for an EM plane wave, linearly polarized and propagating along the x-axis can be written as:

$$\vec{E} = E_0 \sin(kx - \omega t) \text{ with } E_0 = (0, E_{0y}, E_{0z}).$$

Let's calculate the parameters

$$\text{Wavelength: } \lambda = \frac{c}{f} = \frac{3 \cdot 10^8}{7.5 \cdot 10^{14}} = 0.4 \cdot 10^{-6} \text{ m}$$

$$\text{Wave number: } k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{0.4 \cdot 10^{-6}} = 1.57 \cdot 10^7 \text{ rad/m}$$

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 7.5 \cdot 10^{14} = 4.7 \cdot 10^{15} \text{ rad/s}$$

E-field components:

$$E_{0y} = E_0 \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 10^3 \text{ V/m}$$

$$E_{0z} = E_0 \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \cdot 10^3 \text{ V/m}$$

So,

$$E_y = E_{0y} \sin(kx - \omega t) = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 10^3 \sin(1.57 \cdot 10^7 x - 4.7 \cdot 10^{15} t) \text{ [V/m]}$$

Similarly, for  $E_z$ :

$$E_z = \frac{1}{2} \cdot 10^3 \sin(1.57 \cdot 10^7 x - 4.7 \cdot 10^{15} t) \text{ [V/m]}$$

b) The relation  $\hat{E} \times \hat{B} = \pm c$  is valid,

From Maxwell's equation in the vacuum, we get the relation  $E/B = \pm c$ , so  $B_0 = \frac{E_0}{c}$

and:

$$\vec{B} = \frac{1}{c} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & E_y & E_z \end{vmatrix} = \left( 0, -\frac{E_z}{c}, \frac{E_y}{c} \right)$$

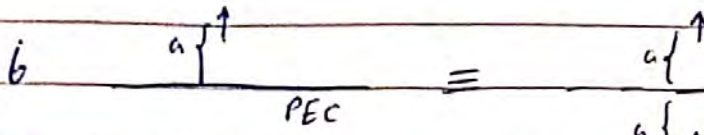
Se,

$$B_y = \frac{-1}{6 \cdot 10^8} 10^3 \text{ mm} (1.57 \cdot 10^7 x - 4.7 \cdot 10^{15} t)$$

$$B_z = \frac{\sqrt{3}}{6 \cdot 10^8} 10^3 \text{ mm} (1.57 \cdot 10^7 x - 4.7 \cdot 10^{15} t)$$

==





$$a. E_{01} + \frac{j\beta a \cos \theta \sin \theta}{4\pi R} e^{-j\beta R}, j\bar{E}_0 \frac{\sin \theta}{R} e^{j\beta R}$$

$$E_0 + E_{01} + E_{02}, j\bar{E}_0 \frac{\sin \theta}{r_1} e^{-j\beta r_1}, j\bar{E}_0 \frac{\sin \theta}{r_2} e^{-j\beta r_2}$$

$$r_1 = r + a \cos \theta, r_2 = r - a \cos \theta$$

$$E_0 + j\bar{E}_0 \frac{\sin \theta}{r} \left[ e^{-j\beta(r+a\cos\theta)} + e^{-j\beta(r-a\cos\theta)} \right]$$

$$= j\bar{E}_0 \frac{\sin \theta}{r} e^{-j\beta r} \left[ e^{j\beta a \cos \theta} + e^{-j\beta a \cos \theta} \right]$$

$$= j\bar{E}_0 \frac{\sin \theta}{r} e^{-j\beta r} 2 \cos(\beta a \cos \theta)$$

$$b) P_{avg} = \frac{1}{2} |E_0| |H_{\theta}|, \frac{1}{2} \frac{|E_0|^2}{Z_0}, \frac{2 |E_0|^2}{Z_0} \frac{1}{r^2} \sin^2 \theta \cos^2(\beta a \cos \theta)$$

$$c) P_{avg} = 0 \rightarrow \beta a \cos \theta = (2n+1) \frac{\pi}{2}$$

|<sub>n=0 for the minimum</sub>

$$0 = \beta a \cos \theta \rightarrow \beta a \times \frac{1}{2} = \frac{\pi}{2} \rightarrow \frac{2\pi}{\lambda} a = \pi$$

$\downarrow$   
 $a = \frac{\lambda}{2}$