

Tentamen i Elektromagnetisk fältteori för F2 och TM2.

EEF031 2022-08-18, kl. 14:00-18:00

Tillåtna hjälpmedel:	BETA, Physics Handbook, Formelsamling i Elektromagnetisk fältteori, Valfri kalkylator (minnet måste raderas.) Egna formler på sista bladet i formelsamlingen i Elektromagnetisk fältteori
Förfrågningar:	Andreas Fhager
Lösningförslag:	Anslås på kursens hemsida i Canvas.
Resultatet:	Anslås i LADOK
Granskning:	Plats och tid annonseras på kurshemsidan i Canvas
Kom ihåg	Poängavdrag görs för otydliga figurer, utelämnade referensriktningar, dimensionsfel och utelämnade motiveringar.
Betygsgränser:	Betyg 3: Totalt 30, varav ≥ 16 på problemdelen och ≥ 8 på teorin Betyg 4: Totalt 40, varav ≥ 20 på problemdelen och ≥ 10 på teorin Betyg 5: Totalt 50, varav ≥ 24 på problemdelen och ≥ 12 på teorin

OBS!

Resultat från **läsårets** dugga får tillgodoräknas på elektrostatiktalet (tal 1) respektive magnetostatiktalet (tal 2). Bästa resultatet från duggan eller tentan räknas. Poäng på teoridelen respektive problemlösningdelen räknas separat. Bonuspoäng från **läsårets** omgång av webb-frågorna får också tillgodoräknas till tentaresultatet.

Svaren på förståelsedelen skall ges på tesen som lämnas in.

Förståelsefrågorna besvaras genom att markera en av rutorna efter varje påstående till höger. En och endast en ruta på varje rad skall markeras. De tre svarsalternativen (från vänster till höger är) Ja, Vet ej och Nej. Riktigt svar ger +0,2 poäng oriktigt svar ger -0,2 poäng. Vet ej är neutralt och ger noll poäng. Förståelseuppgifterna ger maximalt 1 poäng och lägst -1 poäng och man kan därför få 1 poäng även med ett vet ej svar.

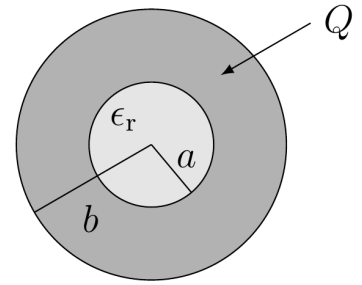
Anonym kod: _____

(Var vänlig ange den **email-adress** som används för inlämningsuppgifterna bland den dolda personinformationen på omslaget)

1 (Elektrostatik)

Problemlösningsdel (8 poäng)

a) Ett klot består av en oladdad dielektrisk kärna (ljusare gråfärgat i figur) med radie a . Materialet i kärnan har en permittivitet ϵ_r . Utanpå kärnan finns ett metallskal (mörkare gråfärgat i figur) med ytterradie b och innerradie a . Metallskalet är uppladdat med laddningen Q . Klotet befinner sig i vakuum. Bestäm systemets totala elektrostatiska energi.



Förståelsedel (4 poäng)

b) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

- | | ja | ? | nej |
|---|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| För att fullständigt beskriva den grundläggande fysiken i uppgiften ovan räcker ett av Maxwells postulat. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| För att fullständigt beskriva den grundläggande fysiken i uppgiften ovan behövs två av Maxwells postulat. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| Den grundläggande fysiken i problemlösningsdelen bygger bland annat på Gauss lag. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| Den grundläggande fysiken i problemlösningsdelen bygger bland annat på att B-fältet är rotationsfritt. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| Den grundläggande fysiken i problemlösningsdelen bygger bland annat på att E-fältet är rotationsfritt. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| Den grundläggande fysiken i problemlösningsdelen bygger bland annat på att rotationen av B-fältet är lika med den fria strömtätheten gånger permeabiliteten. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

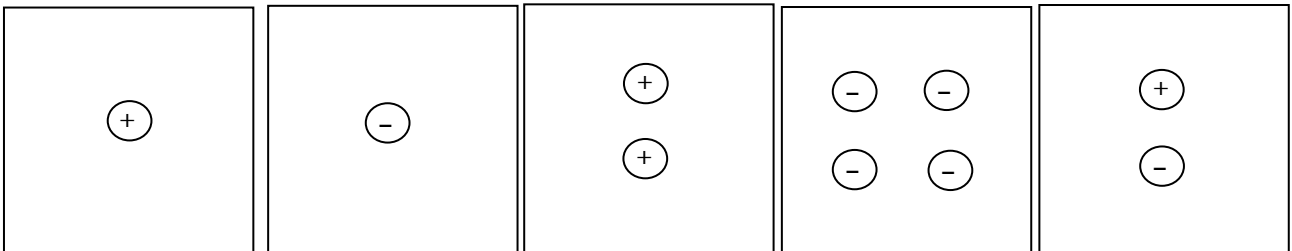
c) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

- | | ja | ? | nej |
|---|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| Elektrostatiska potentialytor är alltid vinkelräta mot E-fältslinjerna. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| Polarisationsfältet, \mathbf{P} definieras direkt utifrån den kraft som kan mätas upp på en testladdning. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| Förskjutningsfältet, \mathbf{D} , har enheten As/m. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| Polarisationsfältet, \mathbf{P} , har enheten As/m. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| Om man specificerar randvillkor så har Poissons ekvation en entydig lösning. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| Speglingsmetoden kan ibland användas för att lösa Poissons ekvation. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

d) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga? (Frågan gäller elektostatik)

- | | ja | ? | nej |
|---|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| Randvillkoret för E-fältets tangentialkomponent härleds från postulatet om E-fältets divergens. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| Randvillkoret för E-fältets normalkomponent härleds postulatet om E-fältets divergens. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| D-fältets tangentialkomponent kan vara diskontinuerlig i gränsen mellan två material med olika permittivitet. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| D-fältets normalkomponent kan vara diskontinuerlig i gränsen mellan två material med olika permittivitet. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| E-fältets tangentialkomponent kan vara diskontinuerlig i gränsen mellan två material med olika permittivitet. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| E-fältets normalkomponent kan vara diskontinuerlig i gränsen mellan två material med olika permittivitet. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

e) Skissa **D-fältslinjerna** runt följande laddningsfördelningar. Alla bilder visar tvärsnitt av olika konfigurationer av positiva och negativa små sfäriska laddningar, antag att laddningarna befinner sig i vacuum. För poäng ska det principiella utseendet vara korrekt i hela det markerade kvadratiska området för respektive konfiguration. (Korrekt svar ger +0,2p och felaktigt svar ger -0,2p på samma sätt som övriga teorifrågor) (1 poäng)



2 (Magnetostatik)

Problemlösningsdel (8 poäng)

a) Ett flygplan flyger över havsytan samtidigt som det sänder ut en radiosignal. Antag att signalen kan beskrivas av en plan våg som propagerar vertikalt nedåt mot havsytan. Frekvensen hos den utsända signalen är 5 MHz och har fältstyrkan 5000V/m. Antag att en ubåt kräver fältstyrkan 50 $\mu\text{V/m}$ för att kunna ta emot signalen. Vilket är det maximala djupet på vilket den kan befinna sig för att fortfarande kunna nås av flygplanets radiosignaler? Antag att havsvatten har konduktiviteten 4 S/m och att det är omagnetiskt med $\mu = \mu_0$.

Förståelsedel (4 poäng)

b) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

ja ? nej

- För att fullständigt beskriva den grundläggande fysiken i uppgiften ovan räcker ett av Maxwells postulat.
- För att fullständigt beskriva den grundläggande fysiken i uppgiften ovan behövs två av Maxwells postulat.
- Den grundläggande fysiken i problemlösningsdelen bygger **bland annat** på Gauss lag.
- Den grundläggande fysiken i problemlösningsdelen bygger **bland annat** på att B-fältet är rotationsfritt.
- Den grundläggande fysiken i problemlösningsdelen bygger **bland annat** på att E-fältet är rotationsfritt.
- Den grundläggande fysiken i problemlösningsdelen bygger **bland annat** på att rotationen av B-fältet är lika med den fria strömtätheten gånger permeabiliteten.

c) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga? (Frågan gäller magnetostatik)

ja ? nej

- B-fältets tangentialkomponent kan vara diskontinuerlig i gränsen mellan två material med olika permeabilitet
- H-fältets tangentialkomponent kan vara diskontinuerlig i gränsen mellan två material med olika permeabilitet.
- J-fältets tangentialkomponent kan vara diskontinuerlig i gränsen mellan två material med olika konduktivitet.
- J-fältets normalkomponent kan vara diskontinuerlig i gränsen mellan två material med olika konduktivitet.
- Ett stycke homogent magnetiserat material kan ha en ytmagnetiseringsströmtäthet.
- Ett stycke inhomogent magnetiserat material (magnetiseringen är rumsberoende) kan ha en ytmagnetiseringsströmtäthet.

d) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

ja ? nej

- Laddningar i rörelse som *endast* utsätts för ett B-fält påverkas alltid av en kraft orsakad av B-fältet.
- Laddningar som rör sig *vinkelrätt* mot B-fältslinjerna utsätts för en kraft.
- Laddningar i rörelse som *endast* utsätts för ett E-fält påverkas av en kraft.
- Laddningar i *vila* som *endast* utsätts för ett B-fält *kan* påverkas av en kraft orsakad av B-fältet.
- Det magnetiska flödet genom en yta kan beräknas som en ytingegral av den magnetiska vektorpotentialen över ytan.
- Lorentzkraften beror på både B- och E-fälten.

e) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

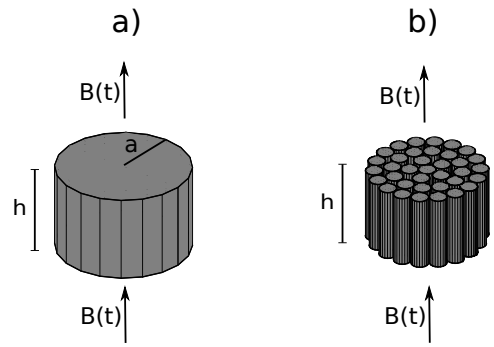
ja ? nej

- Biot-Savarts lag används för att beräkna den magnetiska vektorpotentialen från en stömtäthetsfördelning.
- Man kan teckna Biot-Savarts lag som en volymsintegral
- Man kan teckna Biot-Savarts lag för en ytström
- Man kan teckna Biot-Savarts lag för en strömförande tråd
- Biot-Savarts lag kan endast användas för fältberäkning om strömmen beskriver en sluten slinga.
- Även om Amperes lag av symmetriskäl inte är användbar så kan Biot-Savarts lag alltid användas.

3

Problemlösningsdel (8 poäng)

En metod för att minska förluster på grund av inducerade virvelströmmar i transformatorer är att dela upp dess cylindriska kärna i N stycken mindre cylindrar enligt figur. Antag att dessa två typer av kärnor är placerade i ett magnetfält $B(t) = B_0 \sin \omega t$ riktade längs med den cylindriska kärnan enligt figuren. Antag vidare att den totala arean hos de N cylindrarna i fall b) tillsammans upptar 95% av tvärsnittsarean hos cylindern i a). Materialet har



konduktivitet σ , höjden h samt radien a , där h och a är små jämfört med inträngningsdjupet i materialet. I båda fallen kan magnetfältet från de inducerade virvelströmmarna försummas.

a) Beräkna medeleffekten som utvecklas på grund av virvelströmmar i cylindern i fall a) (5p)

b) Beräkna den totala medeleffekten som utvecklas på grund av virvelströmmar i samtliga cylindrar i fall b), hur relaterar den till effekten i A? (3p)

Förståelsedel (4 poäng)

c) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

ja ? nej

För att fullständigt beskriva den grundläggande fysiken i uppgiften ovan räcker två av Maxwells postulat. ja ? nej

För att fullständigt beskriva den grundläggande fysiken i uppgiften ovan räcker tre av Maxwells postulat. ja ? nej

För att fullständigt beskriva den grundläggande fysiken i uppgiften ovan behövs alla fyra Maxwells postulat. ja ? nej

Den grundläggande fysiken i uppgiften ovan bygger **bland annat** på att rotationen av H-fältet är den fria strömtätheten minus tidsderivatan av förskjutningsfältet. ja ? nej

Den grundläggande fysiken i uppgiften ovan bygger **bland annat** på att rotationen av E-fältet är lika med tidsderivatan av B-fältet. ja ? nej

Den grundläggande fysiken i uppgiften ovan bygger **bland annat** på att E-fältet är rotationsfritt. ja ? nej

d) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

ja ? nej

Amperes lag modifieras när man går från magnetostatik till dynamik (dvs tidsvarierande fält). ja ? nej

Divergensen av B-fältet är noll även för det tidsvarierande fallet. ja ? nej

Gauss lag modifieras när man går från elektrostatik till dynamik (dvs tidsvarierande fält). ja ? nej

Faradays lag modifieras då man går från elektrostatik till dynamik (dvs tidsvarierande fält). ja ? nej

Lenz lag säger att en inducerad spänning är sådan att den motverkar förändring i det externt pålagda magnetfältet. ja ? nej

Egeninduktansen beskriver hur förstärker flödesändringar i kretsen. ja ? nej

e) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

ja ? nej

Man kan välja rotationen av den magnetiska vektorpotentialen fritt i dynamiken. ja ? nej

Man kan välja divergensen av den magnetiska vektorpotentialen fritt i dynamiken. ja ? nej

I praktiken väljer man divergensen av den magnetiska vektorpotentialen till samma som i statiken i elektromagnetiken. ja ? nej

Två spolars ömsesidiga induktans beror enbart på hur stor strömmen är i de båda spolarna. ja ? nej

Två spolars ömsesidiga induktans beror enbart på hur många lindningsvarv som finns i de två spolarna. ja ? nej

Två spolars ömsesidiga induktans beror enbart på deras avstånd till varandra. ja ? nej

f) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

ja ? nej

Den retarderade potentialen uppkommer som en lösning till Faradays lag. ja ? nej

Den retarderade potentialen beskriver hur en fältlösning beror i tiden av avståndet från källan. ja ? nej

Ett statiskt V-fält från en elektrisk dipol är ett exempel på en retarderad potential. ja ? nej

Lösningar till Poissons ekvation är exempel på retarderade potentialer. ja ? nej

Lentz lag säger att en inducerad ström vill motverka förändringen i det pålagda fältet. ja ? nej

Om en sluten slinga rör sig i ett konstant och homogent B-fält induceras en ström som cirkulerar i slingan. ja ? nej

4

Problemlösningsdel (8 poäng)

För en viss våg som färdas i ett medium med permittivitet ϵ och permeabilitet μ ges det komplexa E-fältet av $E = (-6\hat{x} + 3\hat{y}) \cdot e^{-j(2x+4y)}$ V/m.

- a) I vilken riktning utbreder sig vågen? (2 poäng)
- b) Är det en plan våg eller ej? För poäng krävs att svaret motiveras. (2 poäng)
- c) Bestäm vågens **H**-fält. (4 poäng)

Förståelsedel (4 poäng)

d) **Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?**

ja ? nej

- För att fullständigt beskriva den grundläggande fysiken i uppgiften ovan räcker två av Maxwells postulat.
- För att fullständigt beskriva den grundläggande fysiken i uppgiften ovan räcker tre av Maxwells postulat.
- För att fullständigt beskriva den grundläggande fysiken i uppgiften ovan behövs alla fyra Maxwells postulat.
- Den grundläggande fysiken i uppgiften ovan bygger **bland annat** på att B-fältet är divergensfritt.
- Den grundläggande fysiken i uppgiften ovan bygger **bland annat** på att B-fältet är rotationsfritt.
- Den grundläggande fysiken i uppgiften ovan bygger **bland annat** på att rotationen av B-fältet är lika med tidsderivatan av E-fältet.

e) **Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?**

ja ? nej

- En evanescent våg uppkommer som en lösning till vågekvationen.
- Totalreflektion ger upphov till evanescenta vågor vid gränssytan.
- När en våg propagerar in mot en gränssyta vid Brewstervinkeln så uppstår en evanescent våg vid gränssytan.
- En cirkulärpolariserad plan våg träffar en plan gränssyta vid den kritiska vinkeln. Då uppkommer även en transmitterad vågen som också blir cirkulärpolariserad.
- En cirkulärpolariserad plan våg träffar en plan gränssyta vid den kritiska vinkeln. Då uppkommer även en reflekterad våg som alltid är linjärpolariserad.
- Totalreflektion är möjlig då ett fält propagerar från ett material med hög permittivitet och reflekteras mot ett material med låg permittivitet.

f) **Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?**

ja ? nej

- För att Snells lag ska gälla måste permittiviteten vara samma på båda sidor om gränssytan.
- Snells reflektionslag säger att infallande och reflekterande fält har samma vinkel mot ytnormalen.
- Snells brytningslag relaterar infallsvinkel till vinkeln på det transmitterade fältet.
- Snells brytningslag härleds genom att betrakta randvillkoren för normalkomponenterna av E- och H-fälten i gränssytan.
- Fenomenet att en penna ser böjd ut om man sticker ner den genom en vattenyta samtidigt som den lutar mot vattenytan kan förklaras med hjälp av fenomenet totalreflektion.
- Om man betraktar en reflektion i en vattenpöl sedd på långt håll så är ljuset i reflektionen med största sannolikhet linjärpolariserad så att E-fältsvektorena är orienterade parallellt med ytan.

g) **Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?**

ja ? nej

- Vågimpedansen hos luft är $Z=377\Omega$.
- I en god ledare ligger H-fältet 90° före E-fältet.
- Absolutbeloppet av vågimpedansen för en *icke-ferromagnetisk* god ledare är lägre än för luft.
- Om ett material har en nollskild konduktivitet så är vågimpedansen ett reellt tal.
- Om ett material är förlustfritt så är vågimpedansen ett reellt tal.
- Vågimpedansen för en god ledare är frekvensberoende.

5

Problemlösningsdel (8 poäng)

Man har konstruerat en centermatad dipolantenn av längd $2h$. ($h \ll \lambda$) Amplituden hos den tidsharmoniska strömfördelningen längs antennen kan skrivas som

$$I(z) = I_0 \left(1 - \frac{|z|}{h} \right)$$

- Ta fram uttrycken för E - och H -fältet i fjärrfältszonen.
- Beräkna antennens strålningsresistans.

Förståelsedel (4 poäng)

c) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

ja ? nej

- För att fullständigt beskriva den grundläggande fysiken i uppgiften ovan räcker två av Maxwells postulat.
- För att fullständigt beskriva den grundläggande fysiken i uppgiften ovan räcker tre av Maxwells postulat.
- För att fullständigt beskriva den grundläggande fysiken i uppgiften ovan behövs alla fyra Maxwells postulat.
- Den grundläggande fysiken i uppgiften ovan bygger **bland annat** på att E-fältet är konservativt.
- Den grundläggande fysiken i uppgiften ovan bygger **bland annat** på att rotationen av B-fältet är lika med minus tidsderivatan av E-fältet.
- Den grundläggande fysiken i uppgiften ovan bygger **bland annat** på att E-fältet är rotationsfritt.

d) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

ja ? nej

- Poyntings teorem uttrycker energikonservering.
- Poyntingvektorn kan ej definieras med komplexa B- och E-fält.
- Poyntingvektorn kan definieras som tidsmedelvärde eller som momentanvärde.
- Poyntingvektorn på ytan av en lång rak ledare som för en ström är riktad i strömmens riktning.
- Poyntingvektorn på ytan av en lång rak ledare som för en ström är riktad radiellt in mot ledarens centrum.
- Enheten för Poyntingvektorn är W/m^2 .

e) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

ja ? nej

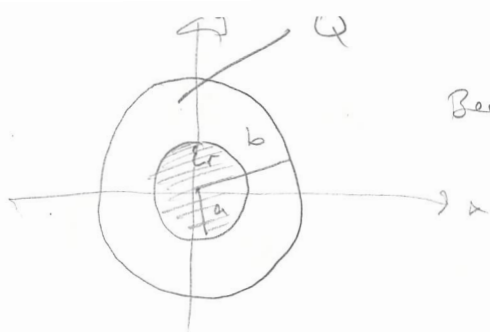
- En Hertzdipol är en halv våglängd lång.
- Strömmen längs en Hertzdipol kan antas variera sinusformigt längs antennen.
- Strömmen i en Hertzdipol kan antas vara konstant i tiden, dvs den är en likström..
- Strålningsresistansen är omvänt proportionell mot längden för en Hertzdipol, (dvs den varierar som $1/L$ om L är Hertzdipolens längd).
- En halv vågsantenn har högre strålningsresistans än en Hertzdipol.
- Strömmen antas vara noll i änden av en Hertzdipol.

f) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

ja ? nej

- För en god ledare är $\sigma/\omega\epsilon \ll 1$.
- I en god ledare är $\alpha = \beta$.
- Inträngningsdjupet i en god ledare ökar med ökande frekvens.
- I en perfekt isolator är $\sigma = 0$.
- För en isolator är $\sigma/\omega\epsilon \gg 1$.
- I en isolator är $\alpha = \beta$.

①



Berechna det elektriska fältet för de tre olika områdena
med hjälp av Gauss lag

$$\int D \, ds = Q_{\text{inneslutet}} \xrightarrow{\text{sfäriskt symmetri}} 4\pi r^2 D_r(r) = Q_{\text{inneslutet}}$$

$$\Rightarrow D_r(r) = \frac{Q_{\text{inneslutet}}}{4\pi r^2}$$

$$\underline{r < a}$$

$$Q_{\text{inneslutet}} = 0 \Rightarrow D = 0 \Rightarrow E = 0$$

$$\underline{a < r < b}$$

$$\text{metallen} \Rightarrow E = 0$$

$$\underline{b < r}$$

$$Q_{\text{inneslutet}} = Q \Rightarrow D(r) = \frac{Q}{4\pi r^2} \Rightarrow D = \frac{Q}{4\pi r^2} \hat{r}$$

$$E = \frac{D}{\epsilon_0} = \frac{Q}{4\pi r^2 \epsilon_0} \hat{r}$$

Totala elektriska energin ges av

$$W_e = \frac{1}{2} \int_{V_0} E \cdot D \, dv = \int_{r < b} 0 \, dv + \int_{r > b} \frac{Q^2}{16\pi^2 r^4 \epsilon_0} \, dv$$

$$= \frac{Q^2}{8\pi \epsilon_0} \int_{r=b}^{\infty} \frac{1}{r^2} \, dr = \frac{Q^2}{8\pi \epsilon_0} \left[-\frac{1}{r} \right]_b^{\infty} = \frac{Q^2}{8\pi \epsilon_0 b}$$

(2)

$$\frac{\epsilon}{\omega \epsilon} = \frac{4}{2\pi \cdot 5 \cdot 10^6 \cdot \frac{1}{36\pi} \cdot 10^{-9} \cdot 72} = 200 \gg 1$$

→ goda ledare

$$\left\{ \begin{aligned} Z_2 &\approx e^{j\frac{\pi}{4}} Z_0 \cdot \sqrt{\frac{\omega \epsilon_0}{\delta}} = 3,14 e^{j\pi/4} \Omega \\ \alpha_2 \approx \beta_2 &= \sqrt{\frac{\omega \mu_0}{2}} \approx 8,87 \text{ m}^{-1} \end{aligned} \right.$$

för luften $Z_1 \approx Z_0 = 377 \Omega$ $\alpha_1 = 0$

$$t_{12} = \frac{2 Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{2 \cdot 3,14 \cdot e^{j\pi/4}}{377 + 3,14 e^{j\pi/4}} \approx 16,6 \cdot 10^{-3} \cdot e^{j\pi/4}$$

Fältstyrkan precis under havsytan

$$5000 \cdot |t_{12}| = 83 \text{ V/m}$$

vid propagation genom havet dämpas fältet

som $e^{-\alpha_2 d}$ där d är den propagerade sträckan

Villkoret för kommunikation med ubåt ger då

$$50 \cdot 10^{-6} = 83 e^{-8,87 \cdot d} \rightarrow d = 1,6 \text{ m}$$

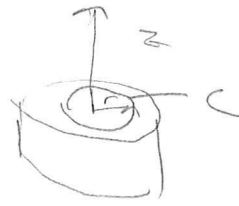
Uppgift 3

A)

Faradays lag

$$\nabla \times \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \Rightarrow \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \frac{\partial \Phi}{\partial t}$$

$$\mathbf{E} = E_e(r) \hat{e}_\phi$$



$$\begin{aligned} \Rightarrow 2\pi r E_e(r) &= - \frac{\partial}{\partial t} \pi r^2 \cdot B_0 \sin \omega t \\ &= - B_0 \omega \pi r^2 \cos \omega t \end{aligned}$$

$$\Rightarrow E_e(r) = - \frac{B_0 \omega r}{2} \cos \omega t$$

Utrekblad effekt enligt Joules lag

$$P = \int_V \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} = \int_{r=0}^a \int_{z=0}^h \int_{\phi=0}^{2\pi} \sigma E_e^2 r d\phi dz dr$$

$$= 2\pi h \sigma \int_{r=0}^a \left(\frac{B_0 \omega r}{2} \cos \omega t \right)^2 r dr$$

$$= 2\pi h \sigma \left(\frac{B_0 \omega}{2} \cos \omega t \right)^2 \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^a$$

$$= 2\pi h \sigma \frac{B_0^2 \omega^2}{4} \cos^2 \omega t \frac{a^4}{4} = \frac{\pi B_0^2 \omega^2 h \sigma a^4}{8} \cos^2 \omega t$$

Tidsmedelvärde $\frac{1}{T}$ period T

$$\langle P \rangle = \frac{1}{T} \int_{t=0}^T P(t) dt = \frac{\pi B_0^2 \omega^2 h \sigma a^4}{8} \cdot \frac{1}{T} \int_{t=0}^T \cos^2 \omega t dt$$

$$= \frac{\pi B_0^2 \omega^2 h \sigma a^4}{16}$$

B) ansätt raden b på varje cylinder
95% av tvärsnittsytan

$$\Rightarrow N \cdot \pi b^2 = 0.95 \cdot \pi a^2 \Rightarrow b = a \sqrt{\frac{0.95}{N}}$$

Utvecklad effekt i en av cylindrarna
(använd uttrycket från A)

$$P' = \frac{\pi B_0^2 \omega^2 h \sigma \left(a \sqrt{\frac{0.95}{N}} \right)^4}{16} = \frac{0.95^2}{N^2} \cdot \frac{\pi B_0^2 \omega^2 h \sigma a^4}{16}$$

$$P_{\text{tot}} = NP' = \frac{0.95^2}{N} \underbrace{\frac{\pi B_0^2 \omega^2 h \sigma a^4}{16}}_{P_A}$$

$$\vec{E} = (-6\hat{x} + 3\hat{y}) \cdot e^{-j(2x+4y)} \quad \text{V/m}$$

a) Vågens färdriktning bestäms av exponenten i $e^{-j\beta\hat{k}\cdot\mathbf{r}}$

$$\text{dvs. } \beta\hat{k}\cdot\mathbf{r} = 2x + 4y$$

$$\text{där } \mathbf{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}.$$

Vi kan då se att

$$\beta\hat{k} = 2\hat{x} + 4\hat{y}$$

vilket blir vår färdriktning. Normerat får vi

$$\beta = \sqrt{2^2 + 4^2}$$

$$= 2\sqrt{5}$$

$$\Rightarrow \hat{k} = \frac{1}{2\sqrt{5}} (2\hat{x} + 4\hat{y})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} (\hat{x} + 2\hat{y})$$

b) En plan våg kräver att E-fältet är riktat ortogonalt mot färdriktningen.

$$(-6\hat{x} + 3\hat{y}) \cdot (2\hat{x} + 4\hat{y}) = -6 \cdot 2 + 3 \cdot 4$$

$$= 0$$

Ja, det är en plan våg.

c) Enklarest är att starta från

$$\mathbf{H} = \frac{1}{Z} \hat{k} \times \mathbf{E} = \frac{1}{Z} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 1 & 2 & 0 \\ -6e^{-j\beta\hat{k}\cdot\mathbf{r}} & 3e^{-j\beta\hat{k}\cdot\mathbf{r}} & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{Z} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \hat{z} (+6 \cdot 2 + 1 \cdot 3) e^{-j\beta\hat{k}\cdot\mathbf{r}}$$

$$= \frac{1}{Z} \cdot \frac{15}{\sqrt{5}} e^{-j(2x+4y)} \hat{z}$$

Eftersom $\gamma = \alpha + j\beta$ vet vi att $\alpha = 0$
(Exponenten är rent imaginär). Därför gäller att

$$Z = \sqrt{\frac{M}{E}}$$

och alltså

$$H = \sqrt{\frac{E}{\mu}} \cdot \frac{15}{\sqrt{5}} \hat{z} e^{-j(2x+4y)}$$

$$= \sqrt{\frac{E}{\mu}} \sqrt{5} \cdot 3 \hat{z} e^{-j(2x+4y)}$$

5 RADIATORS II

CONSIDER A CENTER-FED DIPOLE ANTENNA OF LENGTH $2h$ ($h \ll \lambda$)
 THE AMPLITUDE OF THE TIME HARMONIC CURRENT DISTRIBUTION IS:

$$I(z) = I_0 \left(1 - \frac{|z|}{h}\right)$$

CALCULATE THE EXPRESSIONS OF E, H FIELD IN FAR FIELD ZONE
 CALCULATE THE ANTENNA RADIATION RESISTANCE

From the far field of a elementary current $I dz$, and integrating among $R' \approx R$

$$dE_{\theta} = \gamma_0 dH_{\phi} = j \frac{I dz}{4\pi R'} \frac{e^{-j\beta R'}}{R'} \gamma_0 \beta \sin \theta$$

$$E_{\theta} = \gamma_0 H_{\phi} = j \frac{I_0 \beta \sin \theta}{4\pi R} e^{-j\beta R} \int_{-h}^h \left(1 - \frac{|z|}{h}\right) e^{j\beta z \cos \theta} dz = \frac{j I_0 \beta \sin \theta}{4\pi R} \left[\int_{-h}^h \left(1 - \frac{|z|}{h}\right) e^{j\beta z \cos \theta} dz \right]$$

$$\Rightarrow j \frac{I_0 \gamma_0 \beta \sin \theta}{2\pi R} e^{-j\beta R} \int_{-h}^h \left(1 - \frac{|z|}{h}\right) \cos(\beta z \cos \theta) dz$$

$$= j \frac{I_0 \gamma_0 \beta \sin \theta}{2\pi R} e^{-j\beta R} \frac{1 - \cos(\beta h \cos \theta)}{h \beta^2 \cos^2 \theta} = j \frac{I_0 \gamma_0 \sin \theta}{2\pi R h \beta \cos^2 \theta} e^{-j\beta R} (1 - \cos(\beta h \cos \theta))$$

→ (power) $P_{av} = \frac{1}{2} E_{\theta} H_{\phi}^* = \frac{I_0^2 \gamma_0}{2^2 \pi^2 h^2 \beta^2 R^2} \left(\frac{\sin \theta (1 - \cos(\beta h \cos \theta))}{\cos^2 \theta} \right)^2$

$$P_r = \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} P_{av}(\theta) R^2 \sin \theta d\theta d\phi = \frac{I_0^2 \gamma_0}{4\pi h^2 \beta^2} \int_0^{\pi} \left(\frac{\sin \theta (1 - \cos(\beta h \cos \theta))}{\cos^2 \theta} \right)^2 \sin \theta d\theta$$

$$R_r = \frac{2P_r}{I_0^2} = \frac{\gamma_0}{2\pi h^2 \beta^2} \int_0^{\pi} \left(\frac{\sin \theta (1 - \cos(\beta h \cos \theta))}{\cos^2 \theta} \right)^2 \sin \theta d\theta$$