Distanstentamen i Elektromagnetisk fältteori för F2 och TM2.
EEF031 2021-04-08, kl. 14:00-18:00

Hjälpmedel:	Alla hjälpmedel tillåtna. ***Det är dock inte tillåtet att kopiera eller skriva av lösningar direkt från kurslitteratur eller internet.*** *I det fall man tar hjälp av existerande lösningar skall dessa citeras med källhänvisning. Det är i sådant fall viktigt att motivera och förklara lösningen med egna ord. En direkt avskriven lösning visar inte att ni förstår lösningen av problemet och ger automatiskt noll poäng på talet.* Vidare är det absolut förbjudet att kommunicera muntligt eller skriftligt med andra personer än examinator och tentavakt. Det är förbjudet att använda alla former av hörlurar, hörsnäckor eller liknande anordningar.
Förfrågningar:	Andreas Fhager är tillgänglig för frågor via Zoom
Lösningar:	Anslås på kursens hemsida senast första vardagen efter tentan
Resultatet:	Anslås i LADOK
Granskning:	Tid annonseras på kurshemsidan och granskning sker digitalt direkt på tentans Canvassida.
Kom ihåg	Poängavdrag görs för otydliga figurer, utelämnade referensriktningar, dimensionsfel och utelämnade motiveringar.
Betygsgränser:	**Betyg 3:** Totalt 30, varav ≥ 16 på problemdelen och ≥ 8 på teorin **Betyg 4:** Totalt 40, varav ≥ 20 på problemdelen och ≥ 10 på teorin **Betyg 5:** Totalt 50, varav ≥ 24 på problemdelen och ≥ 12 på teorin

---

OBS!

Resultat från **läsårets** dugga får tillgodoräknas på elektrostatiktalet (tal 1) respektive magnetostatiktalet (tal 2). Bästa resultatet från duggan eller tentan räknas. Poäng på teoridelen respektive problemlösningsdelen räknas separat. Bonuspoäng från **läsårets** omgång av webb-frågorna får också tillgodoräknas till tentaresultatet.

1 (Elektrostatik)

Problemlösningsdel (8 poäng)

Den elektrostatiska potentialen, V_P i en punkt P från en ytdipolladdingstäthet $\vec{\tau}$som befinner sig på ytan S beskrivs av uttrycket

$$V_P = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\vec{\tau}\,.\,\vec{r}}{r^3}dS,$$

där $\vec{r}$ beskriver vektorn från ett yt-element till punkten P. Planets har yt-dipolmomentet, $\vec{\tau}$, (vilken har enheten dipolmoment per ytenhet).

a) Antag att nu att ett oändligt stort plan som ligger i x-y planet är uppbyggt av ett jämt och homogent fördelat yt-dipolmoment $\vec{\tau} = \tau\hat{z}$. Bestäm om potentialen V är diskontinuerlig från ovansidan till undersidan av planet och bestäm i så fall denna diskontinuitet. (4p)

b) Antag nu att en punktladdning, med laddningen q är placerad i centrum av ett sfäriskt skal med radien a. På detta sfäriska skal ligger ett homogent lager med dipoler, vars yt-dipolmoment är τ, och dessutom ligger det en homogen ytladdningstäthet σ på skalet. Bestäm τ och σ så att potentialen inuti det sfäriska skalet är oförändrat detsamma som om enbart punktladdningen q hade funnits i centrum, och så att potentialen utanför skalet blir noll. (4p)

2 (Magnetostatik)

Problemlösningsdel (8 poäng)

Lorentzkraften på en partikel med massan m och laddning q är

$$\vec{F} = q\left(\vec{E} + \vec{u}\times\vec{B}\right).$$

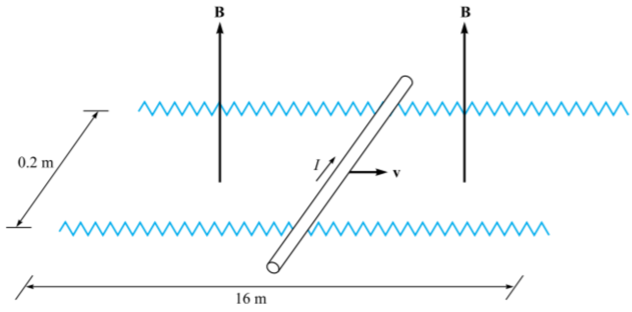
a) Visa att om partikeln rör sig ett statiskt elektriskt fält $\vec{E} = -\nabla V(x,y,z)$ och ett statisk magnetiskt fält $\vec{B}$ så är energin (rörelseenergi plus lägesenergi) uttryck som $\frac{1}{2}m\vec{v}^2 + qV$ konstant. (4p)

b) En partikel rör sig ett område med ett $\vec{E}$ och ett $\vec{B}$-fält. Partikeln rör sig längs x-axeln i det ett elektiskt fält $\vec{E} = Ae^{-t/\tau}\hat{x}$ där A och τ båda är konstanter. Antag att det magnetiska fältet i x-led är noll, dvs B-fältet kan enbart ha en statisk komponent i y- eller z-komponent. Antag vidare att partikelns ursprungsposition och hastighet är $x(0) = \dot{x}(0) = 0$. Bestäm partikelns position $x(t)$. (4p)

3

Problemlösningsdel (8 poäng)

Skenorna i figuren här intill har var och en resistansen 2 Ω/m. En resistansfri stav rör sig på skenorna åt höger med konstant hastighet 9 m/s i ett homogent och konstant magnetiskt fält på 0,8 T. Bestäm strömmen i staven $I(t), 0 < t < 1$ s, om staven befinner sig vid $x = 1$ m vid tiden $t = 0$ och



a) en resistor på 0,5 Ω är inkopplad mellan stavarna i båda ändarna till vänster i bilden, och inget är inkopplat i ändarna till höger.

b) en resistor på 0,5 Ω är inkopplad i både den vänstra änden och den högra änden.

4

Problemlösningsdel (8 poäng)

En plan våg propagerar i ett dielektriskt medium, mediet är alltså förlustfritt, och har brytningsindex n. Vågen propagerar in mot en gränsyta av ett ledande område (området är inte perfekt ledande) och reflekteras. Vinkeln för den propagerande vågen mot ytan är normalt infall. Beräkna fasförändringen hos den plana vågens E-fältsvektor om brytningsindex hos det ledande området är $n_2 = n(1 + ip)$ (n_2 är alltså ett komplext tal).

5

Problemlösningsdel (8 poäng)

Två korta antenner är placerade i origo. Strömmen i var och en av antennerna kan beskrivas med uttrycket $I(t) = 5\cos(\omega t)$. En av antennerna är orienterad längs med y-axeln och den andra är orienterad längs med z-axeln. Antag $\lambda = 2\pi$ och att antennens längd är $d = 0.1$ m. Beräkna E-fältet från de två antennerna i följande punkter på stort avstånd från antennerna.

a) $(x = 0, y = 1000, z = 0)$
b) $(x = 0, y = 0, z = 1000)$
c) $(x = 1000, y = 0, z = 0)$
d) $(x = 1000, y = 0, z = 0)$ vid tidpunkten $t = 0$.
e) Beräkna andelen av den totalt utstrålade effekten som strålas ut i området som beskrivs av bandet mellan $80° < \theta < 100°$. (θ är den vanliga vinkeln enligt det sfäriska koordinatsystemet.)

(1) (a) The potential at point p is only dependent to z due to the symmetry of the problem. If cylindrical coordinate (ρ, φ, z) is selected such that p is on the z-axis, then

$$V_p = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\vec{\tau}\cdot\vec{r}}{|r|^3}\,ds \quad ; \quad \vec{\tau} = \tau\hat{z} \ , \ \vec{r} = \rho\hat{\rho} + z\hat{z}$$

$$ds = 2\pi\rho\,d\rho$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^\infty \frac{\tau z}{(\rho^2+z^2)^{3/2}}\,2\pi\rho\,d\rho$$

1p

$$= \frac{\tau z}{2\varepsilon_0}\int_0^\infty \frac{\rho\,d\rho}{(\rho^2+z^2)^{3/2}} = \frac{\tau z}{2\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{\sqrt{\rho^2+z^2}}\right]_0^\infty$$

$$= \begin{cases} \dfrac{\tau}{2\varepsilon_0} & , z>0 \\[2ex] -\dfrac{\tau}{2\varepsilon_0} & , z<0 \end{cases}$$

2p

so @ $z=0$, the electrostatic potential is discontinuous across the x-y plane. The discontinuity is given by

$$\Delta V = \frac{\tau}{2\varepsilon_0} - \left(-\frac{\tau}{2\varepsilon_0}\right) = \frac{\tau}{\varepsilon_0}$$

1p

(b) Since V is considered to be zero for $r>a$, we can conclude that $E=0$ outside the sphere and from Gauss law, it follows that $\sigma.4\pi a^2 + q = 0.$

Note that dipole moments are balanced (equal positive and negative charges), so they won't get involved here.

Thus

$$\sigma = -\frac{q}{4\pi a^2}$$ 1p

If the potential at infinity is zero, then the potential outside the spherical surface will be zero everywhere. But the potential inside the sphere is $V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$.

For $r = a$, $V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a}$ so the discontinuity at the spherical surface is

$$\Delta V = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a}.$$ 1p

From part (a) we know the $\Delta V = \frac{\tau}{\varepsilon_0} = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a}$

which then yields

$$\vec{\tau} = -\frac{q}{4\pi a}\hat{r}$$ 2p

② (a) Is $\frac{1}{2}mv^2 + qQ$ a constant? (Q denotes the potential)

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}mv^2 + qQ\right] = m\dot{v}\cdot v + q\frac{dQ}{dt}$$

from ① $\Rightarrow$ $= v\cdot(m\dot{v} - qE)$ 1p

from ② $\Rightarrow$ $= 0$ $\Rightarrow$ $\frac{1}{2}mv^2 + qQ = \text{const.}$

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{\partial Q}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial Q}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial Q}{\partial z}\frac{dz}{dt} = v\cdot\nabla Q$$

$$= -v\cdot E \quad ①$$

1p

From Lorentz force & Newton's law:

$F = q(E + v\times B)$

$F = ma = m\dot{v}$

$\Rightarrow m\dot{v} = q(E + v\times B)$

1p

inner product of both sides with v:

$$m v\cdot\dot{v} = q v\cdot E + \cancel{q v\cdot(v\times B)}^{\,0} \Rightarrow$$

$$v\cdot(m\dot{v} - qE) = 0 \quad ②$$

1p

(b) The magnetic force $F_m = q\,v \times B$ is perpendicular to v so that if the particle moves in x-direction, the magnetic force won't affect the x-component of the motion. With E in the x-direction, the particle's motion will be confined to that direction. 1p

$$ma = m\ddot{x} = qE = qA\,e^{-t/\tau}$$

$$\ddot{x} = \frac{qA}{m} e^{-t/\tau} \Rightarrow \dot{x} = -\frac{qA\tau}{m} e^{-t/\tau} + C_1$$

$$x = \frac{qA\tau^2}{m} e^{-t/\tau} + C_1 t + C_2$$ 1p

From the given initial conditions:

$$\dot{x}(0) = -\frac{qA\tau}{m} + C_1 = 0 \Rightarrow C_1 = +\frac{qA\tau}{m}$$ 1p

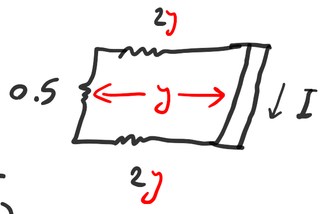
$$x(0) = \frac{qA\tau^2}{m} + C_2 = 0 \Rightarrow C_2 = \frac{-qA\tau^2}{m} = -C_1\tau$$

1p

$$\Rightarrow x(t) = \frac{qA\tau}{m}\left[\tau e^{-t/\tau} + t - \tau\right]$$

③ a) $\phi = B \times \text{area} = 0.8 \times \left(0.2\left(\underbrace{2+9t}_{y}\right)\right) = 0.32 + 1.44t$

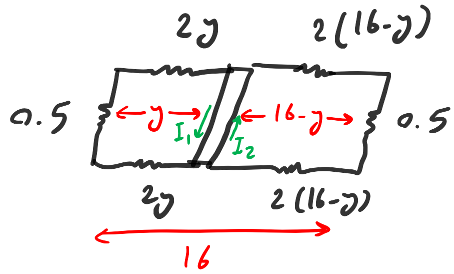
$\text{emf} = -\frac{\partial \phi}{\partial t} = -1.44 \text{ V}$



$I = \frac{\text{emf}}{R(t)} = \frac{-1.44}{0.5 + 2(2(2+9t))}$

$\Rightarrow \quad I(t) = \frac{-1.44}{8.5 + 36t}$

b) I_1 is the same as before.



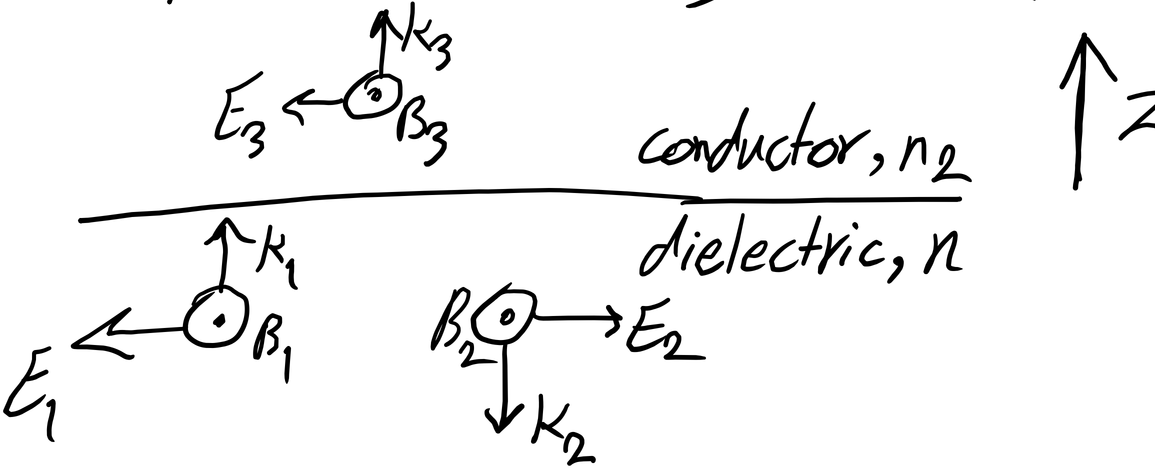
$\phi_2 = 0.8\left(0.2\left(16-(2+9t)\right)\right)$

$\Rightarrow \quad \phi_2 = 2.24 - 1.44t \qquad \text{emf}_2 = -\frac{d\phi_2}{dt_2} = 1.44 \text{ V}$

$I_2 = \frac{\text{emf}_2}{R(t)} = \frac{1.44}{0.5 + 2(2(14-9t))} = \frac{1.44}{56.5 - 36t}$

$I_{total} = -1.44\left(\frac{1}{8.5+36t} - \frac{1}{56.5-36t}\right) \text{ A}$

④ For normal incidence, the plane of incidence is arbitrary. So we can take the electric vector as in the plane of the following diagram (i.e. TE-mode)



1p

For the incident wave:

$$\begin{cases} E_1 = E_{10}\, e^{i(k_1 z - \omega t)} \\ B_1 = B_{10}\, e^{i(k_1 z - \omega t)} \end{cases} ; \quad \begin{aligned} k_1 &= \frac{\omega}{c} n \\ B_{10} &= \frac{n}{c} E_{10} \end{aligned}$$

1p

For the reflected wave:

$$\begin{cases} E_2 = E_{20}\, e^{-i(k_2 z + \omega t)} \\ B_2 = B_{20}\, e^{-i(k_2 z + \omega t)} \end{cases} ; \quad \begin{aligned} k_2 = k_1 &= \frac{\omega}{c} n \\ B_{20} &= \frac{n}{c} E_{20} \end{aligned}$$

1p

For the transmitted wave:

$$\begin{cases} E_3 = E_{30}\, e^{i(k_3 z - \omega t)} \\ B_3 = B_{30}\, e^{i(k_3 z - \omega t)} \end{cases} ; \quad \begin{aligned} k_3 &= \frac{\omega}{c} n_2 \\ B_{30} &= \frac{n_2}{c} E_{30} \end{aligned}$$

1p

Due to boundary condition, E_t and H_t are continuous at the interface. Thus

$$E_{10} - E_{20} = E_{30} \quad \& \quad B_{10} + B_{20} = \frac{\mu}{\mu_2} B_{30} \simeq B_{30}$$ 1p

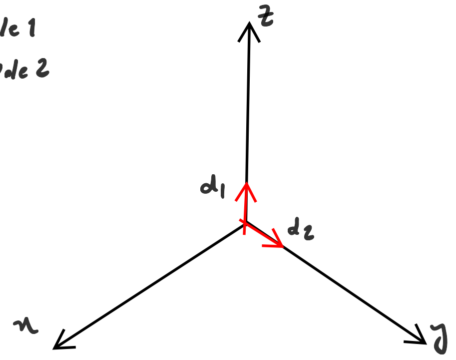
non-magnetic medium

$$\Rightarrow \begin{cases} E_{10} - E_{20} = E_{30} \\ E_{10} + E_{20} = \frac{n_2}{n} E_{30} \end{cases} \Rightarrow E_{20} = \frac{\frac{n_2}{n} - 1}{1 + \frac{n_2}{n}} E_{10}$$ 2p

$$E_{20} = \frac{n_2 - n}{n + n_2} E_{10} = \frac{\cancel{1} + ip - \cancel{1}}{1 + ip + 1} E_{10} = \frac{p}{\sqrt{p^2 + 4}} e^{i\varphi} E_{10}$$

with $\varphi = 90^\circ - \tan^{-1}\frac{p}{2}$ or $\tan\varphi = \frac{2}{p}$ 1p

d_1: dipole 1
d_2: dipole 2



5) a) $(0, 1000, 0)$

$\downarrow$

on the y-axis $\rightarrow \theta = \pi/2$

$\downarrow$

d_2 has no Contribution

$$E = E_\theta = \frac{j I_\circ d \eta}{2 \lambda r} \sin\theta \, e^{-j\frac{2\pi}{\lambda} r} \hat{a}_\theta = \frac{j \, 5 (0.1)(120\pi)}{4\pi \times 1000} e^{-j1000} \hat{a}_\theta$$

at $\theta = \pi/2$, $\hat{a}_\theta = -\hat{a}_z$

$$= -j(1.5 \times 10^{-2}) e^{-j1000} \hat{a}_z \; V/m$$

b) $(0, 0, 1000)$

$\downarrow$

on the z-axis

$\downarrow$

d_1 has no Contribution

$$E = E_\theta = -j(1.5 \times 10^{-2}) e^{-j1000} \hat{a}_y$$

c) $(1000, 0, 0) \rightarrow$ Both antennas Contribute.

$$E_{tot} = E_{d1} + E_2 = -j(1.5 \times 10^{-2}) e^{-j1000} (\hat{a}_y + \hat{a}_z)$$

d) $$E(t) = \mathrm{Re}\{ E_{tot} e^{j\omega t} \} = 1.5 \times 10^{-2} \sin(\omega t - 1000)(\hat{a}_y + \hat{a}_z) \Big|_{t=0}$$

$$= 1.4 \times 10^{-2} (\hat{a}_y + \hat{a}_z)$$

e) $$P_{avg} = \frac{1}{2} \mathrm{Re}\{ E \times H^* \} = \frac{I_\circ^2 d^2 \eta}{8 \lambda^2 r^2} \sin^2\theta$$

$$P_{belt} = \int_0^{2\pi} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{I_\circ^2 d^2 \eta}{8 \lambda^2 r^2} \sin^2\theta \; r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\phi = \frac{\pi I_\circ^2 d^2 \eta}{4 \lambda^2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sin^3\theta \, d\theta$$

$$= \frac{\pi I_\circ^2 d^2 \eta}{4 \lambda^2} \left[-\frac{1}{3} \cos\theta (\sin^2\theta + 2) \right]_{\theta_1}^{\theta_2} = \begin{cases} 0.344 & \text{for } d_1 \\ 0.035 & \text{for } d_2 \\ 1.33 & \text{for total} \end{cases}$$

$$(\theta_1, \theta_2) : \begin{cases} (80, 100) & \text{for } d_1 \\ (0, 20) & \text{for } d_2 \\ (0, 180) & \text{for total} \end{cases}$$

The fraction of total power in the belt $= \dfrac{0.344 + 0.035}{\underbrace{2}_{\text{two antennas}} \times 1.33} = \boxed{0.142}$