

**Distanstentamen i Elektromagnetisk fältteori för F2 och TM2.
EEF031 2021-01-14, kl. 14:00-18:00**

Hjälpmedel:	Alla hjälpmedel tillåtna. <i>Det är dock inte tillåtet att kopiera eller skriva av lösningar direkt från kurslitteratur eller internet. I det fall man tar hjälp av existerande lösningar skall dessa citeras med källhänvisning. Det är i sådant fall viktigt att motivera och förklara lösningen med egna ord. En direkt avskriven lösning visar inte att ni förstår lösningen av problemet och ger automatiskt noll poäng på talet.</i> Vidare är det absolut förbjudet att kommunicera muntligt eller skriftligt med andra personer än examinator och tentavakt. Det är förbjudet att använda alla former av hörlurar, hörsnäckor eller liknande anordningar.
Förfrågningar:	Andreas Fhager är tillgänglig för frågor via Zoom
Lösningar:	Anslås på kursens hemsida senast första vardagen efter tentan
Resultatet:	Anslås i LADOK
Granskning:	Plats och tid annonseras på kurshemsidan
Kom ihåg	Poängavdrag görs för otydliga figurer, utelämnade referensriktningar, dimensionsfel och utelämnade motiveringar.
Betygsgränser:	Betyg 3: Totalt 30, varav ≥ 16 på problemdelen och ≥ 8 på teorin Betyg 4: Totalt 40, varav ≥ 20 på problemdelen och ≥ 10 på teorin Betyg 5: Totalt 50, varav ≥ 24 på problemdelen och ≥ 12 på teorin

OBS!

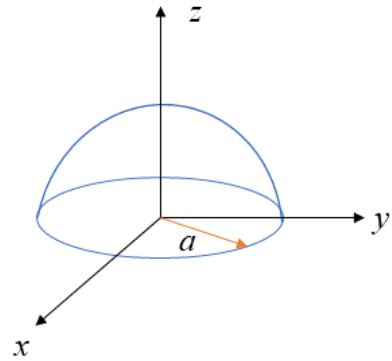
Resultat från **läsårets** dugga får tillgodoräknas på elektrostatiktalet (tal 1) respektive magnetostatiktalet (tal 2). Bästa resultatet från duggan eller tentan räknas. Poäng på teoridelen respektive problemlösningssdelen räknas separat. Bonuspoäng från **läsårets** omgång av webb-frågorna får också tillgodoräknas till tentaresultatet.

1 (Elektrostatik)

Problemlösningsdel (8 poäng)

En laddning är homogent fördelad över ett halvsfäriskt skal med radie a enligt figuren.

- a) Visa att det elektriska fältet på z -axeln orsakat av denna symmetriska laddningsfördelning enbart har en z -komponent. Uppgiften ska lösas genom att integrera ytladdningselement på skalet i $\hat{\theta}$ - och $\hat{\phi}$ -led och därmed visa att eventuella x - och y -komponenter av fältet på z -axeln summerar till noll. Det räcker att visa detta för den del av z -axeln där $z < 0$. Att direkt hänvisa till olika typer av symmetriargument, utan att integrera laddningsfördelning ge inga poäng. Inte heller att summera fälten direkt från formler för E-fälten på centrumaxeln av en cirkulär laddningsfördelning. (4p)
- b) Beräkna storleken av E-fältets z -komponent på z -axeln. (4p)

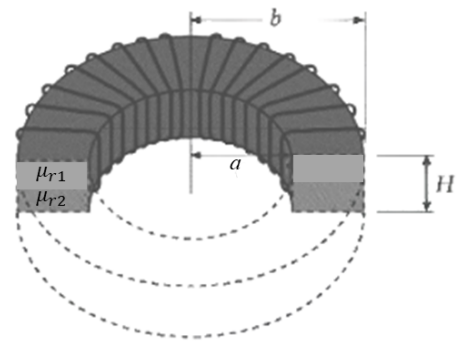


2 (Magnetostatik)

Problemlösningsdel (8 poäng)

En spole med N lindningsvarv leder strömmen I och är lindad runt en toroidal kärna med rektangulärt tvärsnitt. Det rektangulära tvärsnittet beskrivs som $a < r < b$ och

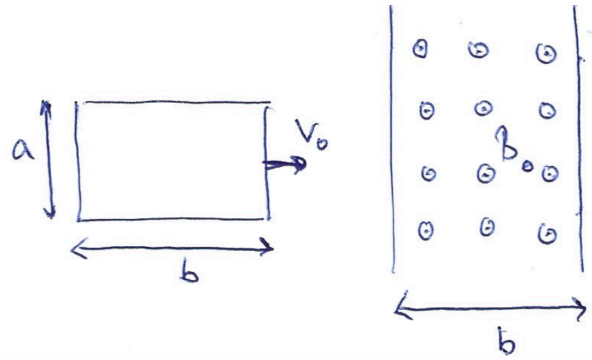
$-\frac{H}{2} < z < \frac{H}{2}$. Den övre halvan av toroiden, $0 < z < \frac{H}{2}$, har permeabiliteten μ_{r1} . Den undre halvan, $-\frac{H}{2} < z < 0$, har permeabiliteten μ_{r2} . (Se figuren till höger.) Beräkna spolens självinduktans.



3

Problemlösningsdel (8 poäng)

En rektangulär slinga rör sig med hastigheten v_0 till höger i figuren här intill. Antag att slingan har den totala resistansen R . Rörelsen är sådan att den passerar genom ett område med ett konstant B -fält med styrkan B_0 som är riktat uppåt/utåt från papperets/skärmens plan. Utanför detta område är B -fältet noll. Dimensionerna på slingan och på området med ett B -fält framgår av figuren.



- Beräkna hur den inducerade spänningen i den rektangulära slingan beror av dess rörelse över området med B -fältet. Uttryck inducerad spänning som funktion av slingans position. (4p)
- Den inducerade spänningen leder till att en ström cirkulerar i slingan. Bestäm dess belopp och riktning för slingans olika lägen. (2p)
- Under slingans rörelse genom området med B -fält påverkas den av en kraft. Hur stor är denna kraft och vilken riktning pekar den? (2p)

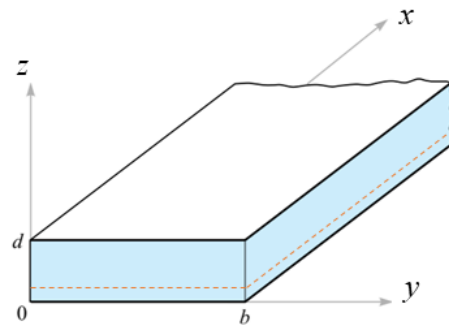
4

Problemlösningsdel (8 poäng)

Figuren visar en typ av transmissionsledning som består av två parallella plattor med ett dielektriskt material däremellan. Transmissionsledningen har ett rektangulärt tvärsnitt med dimensionerna $b = 5$ cm och $d = 10$ mm. Det dielektriska materialet mellan plattorna har materialegenskaperna $\mu_r = 1$, $\epsilon_r = 4$, och $\sigma = 1$. Fältet som propagerar i det dielektriska materialet mellan plattorna är givet:

$$\mathbf{H} = 7 \cos(2\pi \times 10^9 t - \beta x) e^{-\alpha x} \hat{a}_y \text{ A/m.}$$

För vidare beräkningar kan ni försumma alla eventuella fält utanför plattorna och det rektangulära tvärsnittet.



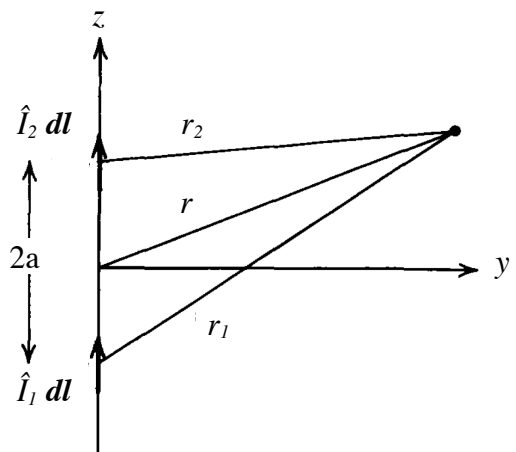
- Utgå från vågekvationen och Maxwells ekvationer och härled uttryck och beräkna numeriska värden på α och β (antag $\beta > 0$). (Att använda uttryck på α och β från formelsamlingen ger ej full poäng på uppgiften.) (3p)
- Beräkna förskjutningsströmtätheten i planet som definieras av $x = 0$ (3p)
- Beräkna förskjutningsströmmen som flyter genom tvärsnittet $z = 0, 2d, 0 < y < b, 0 < x < 0.1$ m i \hat{x} -riktning. (Dvs planet som är markerat med streckad röd linje i figuren.) (2p)

5

Problemlösningsdel (8 poäng)

Två stycken Hertzdipoler är placerade längs z -axeln med avståndet $2a$ mellan dem. Dipolerna är lika långa och drivs med strömmar som har samma belopp men som har en fasskillnad ξ mellan sig.

- Bestäm E - och H -fälten i fjärrfältet. (4p)
- Bestäm tidsmedelvärdet av den utstrålade effekten. (2p)
- I vilka riktningar är den utstrålade effekten noll och i vilka riktningar har den utstrålade effekten maximum. (3p)



$$\textcircled{1} \text{ a) } E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\rho_s (r-r')}{|r-r'|^3} ds$$

$$r = z \hat{z} \quad r' = a \hat{R} \quad ds = a^2 \sin\theta d\theta d\phi$$

$$r-r' = z \hat{z} - a \hat{R} = z \hat{z} - a (\sin\theta \cos\phi \hat{x} + \sin\theta \sin\phi \hat{y} + \cos\theta \hat{z})$$

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{-a \sin\theta \cos\phi \hat{x} - a \sin\theta \sin\phi \hat{y} + (z - a \cos\theta) \hat{z}}{\left(\underbrace{a^2 \sin^2\theta \cos^2\phi + a^2 \sin^2\theta \sin^2\phi}_{a^2 \sin^2\theta} + (z - a \cos\theta)^2 \right)^{3/2}} \rho_s a^2 \sin\theta d\theta d\phi$$

$$z^2 + a^2 - 2az \cos\theta$$

$$\int_0^{2\pi} \cos\phi d\phi = 0 \quad \& \quad \int_0^{2\pi} \sin\phi d\phi = 0 \implies \text{There are no } x \text{ and } y \text{ components}$$

$$\text{b) } \vec{E} = \frac{\hat{z} \rho_s a^2}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{\pi/2} \frac{z - a \cos\theta}{(z^2 + a^2 - 2az \cos\theta)^{3/2}} a^2 \sin\theta d\theta \quad \begin{array}{l} \cos\theta = t \\ \sin\theta d\theta = -dt \end{array}$$

$$E = \frac{\hat{z} \rho_s a^2}{2\pi\epsilon_0} \int \frac{z - at}{(z^2 + a^2 - 2azt)^{3/2}} dt = \frac{\hat{z} \rho_s a^2}{2\pi\epsilon_0} \left[\frac{(z^2 + a^2 - 2azt)^{-1/2}}{-2az \cdot \frac{1}{2}} - \int \frac{at dt}{(z^2 + a^2 - 2azt)^{3/2}} \right]$$

$$\int u dv = uv - \int v du$$

$$v = \frac{(z^2 + a^2 - 2azt)^{-1/2}}{-2az \cdot \frac{1}{2}} \quad \leftarrow \quad dv = \frac{dt}{(z^2 + a^2 - 2azt)^{3/2}}$$

$$E = \frac{\hat{z} \rho_s a^2}{2\pi\epsilon_0} \left[\frac{(z^2 + a^2 - 2azt)^{-1/2}}{a} - \left[\frac{at (z^2 + a^2 - 2azt)^{-1/2}}{az} - \int \frac{(z^2 + a^2 - 2azt)^{-1/2}}{az} a dt \right] \right]$$

$$u = at \implies du = a dt$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\hat{z} \rho_s a^2}{2\pi \epsilon_0} \left[\frac{(z^2 + a^2 - 2azt)^{-1/2}}{a} - \left[\frac{at(z^2 + a^2 - 2azt)^{-1/2}}{az} + \frac{(z^2 + a^2 - 2azt)^{1/2}}{a^2 z^2} a \right] \right] \\
&= \frac{\hat{z} \rho_s a^2}{2\pi \epsilon_0} \left[\frac{(z^2 + a^2 - 2az \cos \theta)^{-1/2}}{a} - \frac{\cos \theta (z^2 + a^2 - 2az \cos \theta)^{-1/2}}{z} - \frac{(z^2 + a^2 - 2az \cos \theta)^{1/2}}{az^2} \right] \\
&= \frac{\hat{z} \rho_s a^2}{2\pi \epsilon_0} \left[\frac{(z^2 + a^2)^{-1/2}}{a} - \frac{(z^2 + a^2)^{1/2}}{az^2} - \left[\frac{(z-a)^{-1}}{a} - \frac{(z-a)^{-1}}{z} - \frac{z-a}{az^2} \right] \right] \\
&= \frac{\hat{z} \rho_s a^2}{2\pi \epsilon_0} \left[\frac{1}{a} \left(\frac{1}{\sqrt{z^2 + a^2}} - \frac{1}{z-a} \right) + \frac{1}{z(z-a)} - \frac{1}{az^2} \left(\frac{1}{z-a} - \frac{1}{\sqrt{z^2 + a^2}} \right) \right] \quad \checkmark / m
\end{aligned}$$

(2)

$$\int H \cdot dl = NI \Rightarrow 2\pi\rho H_\varphi = NI \rightarrow H_\varphi = \frac{NI}{2\pi\rho}$$

$$B_\varphi = \begin{cases} \frac{\mu_{r1} NI}{2\pi\rho} & 0 < z < \frac{H}{2} \\ \frac{\mu_{r2} NI}{2\pi\rho} & -\frac{H}{2} < z < 0 \end{cases}$$

$$\Phi = \int B \cdot dS = \int_{-\frac{H}{2}}^0 \int_a^b \frac{\mu_{r2} NI}{2\pi\rho} d\rho dz + \int_0^{\frac{H}{2}} \int_a^b \frac{\mu_{r1} NI}{2\pi\rho} d\rho dz$$

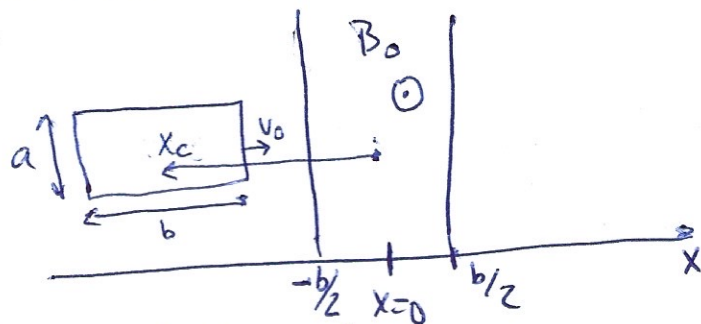
$$= \frac{H}{2} \mu_{r2} \frac{NI}{2\pi} \ln \frac{b}{a} + \frac{H}{2} \mu_{r1} \frac{NI}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$$

$$\Rightarrow \Phi = \frac{H NI}{4\pi} \ln \frac{b}{a} (\mu_{r1} + \mu_{r2})$$

$$L = \frac{\Phi}{I} = \frac{H N}{4\pi} \ln \frac{b}{a} (\mu_{r1} + \mu_{r2}) \quad \text{H}$$

③ a)

Beräkna först flödet i slingan. Vi behöver skilja på tre fall, när slingan är utanför området med B-fältet, när den är på väg in, och när den är på väg ut. Vi lägger in ett koordinatsystem enligt följande. Vi låter koordinaten x_c markera slingans centrum från origo.



Nu kan vi teckna Φ

- $x_c < -b$ $\Phi = 0$ ty $B = 0$
- $-b \leq x_c \leq 0$ $\Phi = B_0 a (b + x_c)$
- $0 \leq x_c \leq b$ $\Phi = B_0 a (b - x_c)$
- $x_c > b$ $\Phi = 0$

Inducerad spänning för som $\mathcal{E}_{ind} = -\frac{d\Phi}{dt}$, (med $\frac{dx_c}{dt} = v_0$)

$$x_c < -b: \quad \mathcal{E}_{ind} = -\frac{d\Phi}{dt} = 0$$

$$-b \leq x_c \leq 0 \quad \mathcal{E}_{ind} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}(B_0 a (b + x_c)) = -B_0 a \frac{dx_c}{dt} = -B_0 a v_0$$

$$0 \leq x_c \leq b \quad \mathcal{E}_{ind} = -\frac{d}{dt}(B_0 a (b - x_c)) = B_0 a v_0$$

$$x_c > b \quad \mathcal{E}_{ind} = 0$$

b) Inducerad ström

$$x_c < -b \quad : \quad i_{ind} = 0$$

$$-b \leq x_c \leq 0 \quad : \quad |i_{ind}| = \frac{|\mathcal{E}_{ind}|}{R} = \frac{B_0 a v_0}{R}$$

$$0 \leq x_c \leq b \quad |i_{ind}| = \frac{|\mathcal{E}_{ind}|}{R} = \frac{B_0 a v_0}{R}$$

$$x_c > b \quad : \quad i_{ind} = 0$$

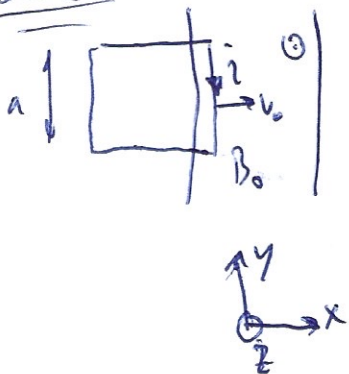
Vi ser att både spänning och ström har olika tecken då slingan är på väg in respektive ut ur området med B-fält. Polariteten, och strömmens riktning bestäms enklast via Lenz lag

$-b \leq x_c \leq 0$: Slingan på väg in. \odot i slingan ökar. Inducerad ström vill motverka detta och måste därför ha riktning så att den genererar ett B-fält som är motriktat B_0 . Inducerad ström måste således cirkulera medurs i slingan

$0 \leq x_c \leq b$ Inducerad ström måste istället generera ett B-fält som är riktat åt samma håll som B_0 . Således cirkulerar strömmen moturs.

c) Den del av slingan som befinner sig i området med B-fält påverkas av en kraft $F = \int i d\mathbf{l} \times \mathbf{B}$

$-b \leq x_c \leq 0$

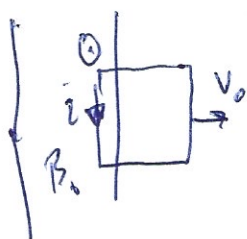


Bara den vertikala delen bidrar med netto kraft på slingan enligt

$$F = \int_{y=0}^a -\frac{B_0 a v_0}{R} dl \hat{y} \times B_0 \hat{z} = -\frac{B_0^2 a^2 v_0}{R} \hat{x}$$

Alltså en kraft motriktad rörelseriktningen

$0 \leq x_c \leq b$



$$F = \int_{y=0}^a -\frac{B_0 a v_0}{R} dl \hat{y} \times B_0 \hat{z} = -\frac{B_0^2 a^2 v_0}{R} \hat{x}$$

Alltså motriktad rörelseriktningen

④ a) $N_r=1$ $\epsilon_r=4$ $\delta=1$

$$\vec{H} = 7 C_0 (2n \times 10^9 t - \beta n) e^{-\alpha n} \hat{a}_y \Rightarrow H = 7 e^{-(\alpha+j\beta)n} \hat{a}_y$$

① $\nabla \times H = \underbrace{J}_{\delta E} + \frac{\partial D}{\partial t} \xrightarrow{\text{phasor}} \nabla \times H = \delta E + j\omega \epsilon E = (\delta + j\omega \epsilon) E$

$$\Rightarrow E = \frac{1}{\delta + j\omega \epsilon} \nabla \times H = \frac{1}{\delta + j\omega \epsilon} \left(\frac{\partial}{\partial n} 7 e^{-(\alpha+j\beta)n} \hat{a}_z \right) = \frac{-7(\alpha+j\beta)}{\delta + j\omega \epsilon} e^{-(\alpha+j\beta)n} \hat{a}_z$$

② $\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t} \Rightarrow \nabla \times E = -j\omega \mu H \xrightarrow{*} \frac{-7(\alpha+j\beta)^2}{\delta + j\omega \epsilon} e^{-(\alpha+j\beta)n} = -j\omega \mu 7 e^{-(\alpha+j\beta)n}$

$$\Rightarrow (\alpha+j\beta)^2 = j\omega \mu (\delta + j\omega \epsilon) = -\omega^2 \mu \epsilon \left(1 - j \frac{\delta}{\omega \epsilon} \right) \quad **$$

$$\alpha^2 - \beta^2 - 2j\alpha\beta = -\omega^2 \mu \epsilon \left(1 - j \frac{\delta}{\omega \epsilon} \right)$$

~~**~~ $\text{Re}\{ \} \Rightarrow \alpha^2 - \beta^2 = -\omega^2 \mu \epsilon$

~~**~~ $\text{Im}\{ \} \Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 = \omega^2 \mu \epsilon \sqrt{1 + \frac{\delta^2}{\omega^2 \epsilon^2}}$

$$\Rightarrow \alpha = \omega \sqrt{\frac{\mu \epsilon}{2}} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\delta}{\omega \epsilon}\right)^2} - 1 \right] = 106.8$$

$$\beta = \omega \sqrt{\frac{\mu \epsilon}{2}} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\delta}{\omega \epsilon}\right)^2} + 1 \right] = 166.1$$

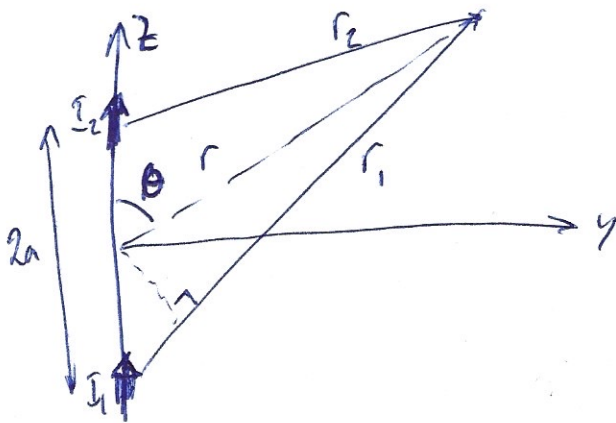
b) $J_d = j\omega \epsilon E = \frac{-7j(\alpha+j\beta)}{\delta + j\omega \epsilon} \omega \epsilon e^{-(\alpha+j\beta)n} \hat{a}_z \Big|_{n=0} = \frac{-7j(106.8+166j)}{1+0.22j}$

$$J_d = 1349.27 C_0 (2n \times 10^9 t - 0.79) A/m$$

$$J_d = 949.44 - 958.7j$$

c) $I = \int J_i \cdot dS = \int_0^{0.1} 1349.27 C_0 (2n \times 10^9 t - 0.79 - 166.1n) e^{-106.8n} du \quad (0.2 \text{ dB})$
 $= (5.7 \text{ Si} (2n \times 10^9 t - 0.79) + 3.6 C_0 (2n \times 10^9 t - 0.79)) \times 10^{-5} A$

5



Fältet från en Hertzdipol

$$E_{\theta} = \frac{j\beta dI}{4\pi R} \frac{\sin\theta}{R} e^{-j\beta R} =$$

$$= j\bar{E}_0 \frac{\sin\theta}{R} e^{-j\beta R}$$

- a) Låt θ beteckna vinkeln mellan vektorn r och z -axeln
 Totala E -fältet fås genom att summera fältbidrag

$$E_{\theta} = E_{\theta_1} + E_{\theta_2} = j\bar{E}_{\theta_1} \frac{\sin\theta}{r_1} e^{-j\beta r_1} + j\bar{E}_{\theta_2} \frac{\sin\theta}{r_2} e^{-j\beta r_2}$$

Approximeras $r_1 \approx r + a\cos\theta$ $r_2 \approx r - a\cos\theta$

Vi kan även skriva $\bar{I}_1 = \bar{I}_2 e^{-j\beta}$

Därmed kan vi approximeras

$$E_{\theta} \approx j\bar{E}_0 \frac{\sin\theta}{r} \left[e^{-j\beta r - j\beta a\cos\theta} + e^{-j\beta r + j\beta a\cos\theta - j\beta} \right]$$

$$= j\bar{E}_0 \frac{\sin\theta}{r} e^{-j\beta r} \left[e^{-j\beta a\cos\theta} + e^{+j\beta a\cos\theta - j\beta} \right]$$

$$= j\bar{E}_0 \frac{\sin\theta}{r} e^{-j(\beta r - \frac{\beta}{2})} \left[e^{-j(\beta a\cos\theta - \frac{\beta}{2})} + e^{j(\beta a\cos\theta - \frac{\beta}{2})} \right]$$

$$= j\bar{E}_0 \frac{\sin\theta}{r} e^{-j(\beta r - \frac{\beta}{2})} \left[2\cos(\beta a\cos\theta - \frac{\beta}{2}) \right]$$

Med utvärderade H -fält.

$$H_{\phi} = \frac{E_{\theta}}{Z_0}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b)} \quad P_{av} &= \frac{1}{2} |E_0| |H_0| = \frac{1}{2} \frac{|E_0|^2}{Z_0} = \\
 &= \frac{2 |E_0|^2}{Z_0} \frac{1}{r^2} \sin^2 \theta \cos^2 \left(\beta a \cos \theta - \frac{\pi}{2} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{c)} \quad P_{av} &= 0 \quad \text{då} \quad \beta a \cos \theta - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \quad (\text{eller en annan multipl av} \\
 &\quad \pi \text{ adderat till det}) \\
 \text{således} \quad \beta a \cos \theta - \frac{\pi}{2} &= (2n+1) \frac{\pi}{2} \quad (n \text{ är ett heltal}) \\
 \Rightarrow \theta &= \arccos \left[\frac{(2n+1) \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}}{\beta a} \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P_{av} &= \text{"maximum"} \quad \text{då} \quad \beta a \cos \theta - \frac{\pi}{2} = n\pi \quad (n \text{ är ett heltal}) \\
 \Rightarrow \theta &= \arccos \left[\frac{n\pi + \frac{\pi}{2}}{\beta a} \right]
 \end{aligned}$$