

## Distanstentamen i Elektromagnetisk fältteori för F2 och TM2.

EEF031 2020-02-05, kl. 14:00-18:00

<b>Tillåtna hjälpmedel:</b>	Alla hjälpmedel tillåtna. Det är dock absolut förbjudet att kommunicera muntligt eller skriftligt med andra personer än examinator och tentavakt. Det är förbjudet att använda alla former av hörlurar, hörsnäckor eller liknande anordningar.
<b>Förfrågningar:</b>	Andreas Fhager är tillgänglig för frågor via Zoom
<b>Lösningar:</b>	Anslås på kursens hemsida senast första vardagen efter tentan
<b>Resultatet:</b>	Anslås i LADOK
<b>Granskning:</b>	Plats och tid annonseras på kurshemsidan
<b>Kom ihåg</b>	Poängavdrag görs för otydliga figurer, utelämnade referensriktningar, dimensionsfel och utelämnade motiveringar.
<b>Betygsgränser:</b>	<b>Betyg 3:</b> Totalt 30, varav $\geq 16$ på problemdelen och $\geq 8$ på teorin <b>Betyg 4:</b> Totalt 40, varav $\geq 20$ på problemdelen och $\geq 10$ på teorin <b>Betyg 5:</b> Totalt 50, varav $\geq 24$ på problemdelen och $\geq 12$ på teorin

---

# OBS!

Resultat från **läsårets** dugga får tillgodoräknas på elektrostatiktalet (tal 1) respektive magnetostatiktalet (tal 2). Bästa resultatet från duggan eller tentan räknas. Poäng på teoridelen respektive problemlösningssdelen räknas separat. Bonuspoäng från **läsårets** omgång av webb-frågorna får också tillgodoräknas till tentaresultatet.

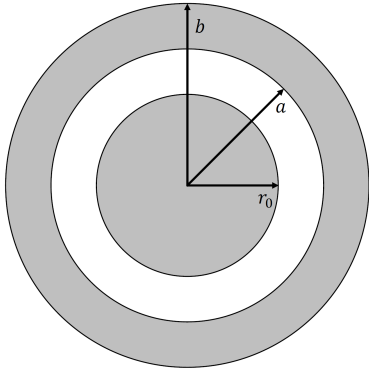
Var vänlig ange den **email-adress** som används för bonusgrundande inlämningsuppgifter på den första sidan med lösningar som lämnas in.

# 1 (Elektrostatik)

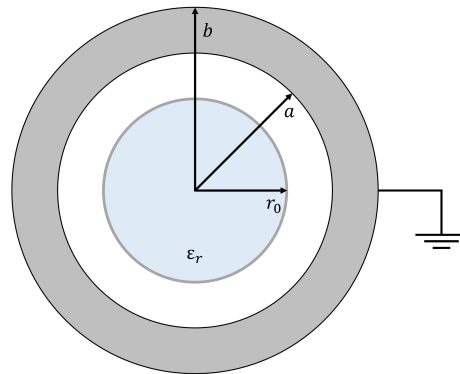
## Problemlösningsdel (8 poäng)

En metallsfär med radie  $r_0$  har tillförts en laddning  $Q$ . Sfären är omgiven av ett tjockt koncentriskt metallskal med inre radie  $a$  och yttre radie  $b$ . Det omgivande skalet har ingen nettoladdning. Denna geometri visas i Figur 1.

- Vad är ytladdningstätheten vid  $r_0$ ,  $a$  och  $b$ ? Motivera svaret! (2p)
- Bestäm det elektriska fältet och den elektriska potentialen överallt. (2p)
- Den inre sfären byts nu ut mot ett tunt metalliskt skal fyllt med ett dielektriskt material med relativ permittivitet  $\epsilon_r$ . Det tunna skalet har en laddning  $Q$ . Dessutom jordas den yttre ytan av det tjocka skalet. Se Figur 2.  
Vad blir svaret på a) och b) i detta fall? (4p)



Figur 1. Figur för uppgift 1a och 1b



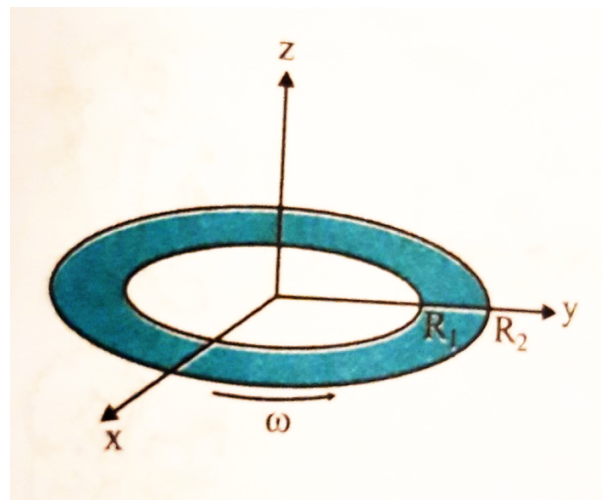
Figur 2. Figur för uppgift 1c

# 2 (Magnetostatik)

## Problemlösningsdel (8 poäng)

En mycket tunn, cirkulär ring är placerad i fri rymd i x-y planet enligt figur här intill. Innerradien på ringen är  $R_1$  och yttre radie är  $R_2$ . Ringen har tillförts en laddningstäthet som är jämt fördelad över ringen, och beskrivs av ytladdningstätheten  $\rho_s$ . Vidare roterar ringen med vinkelfrekvensen,  $\omega$ , runt z-axeln.

- Beräkna H-fältet i origo. (4 p)
- Beräkna H-fältet på avståndet  $h$  från origo längs z-axeln.

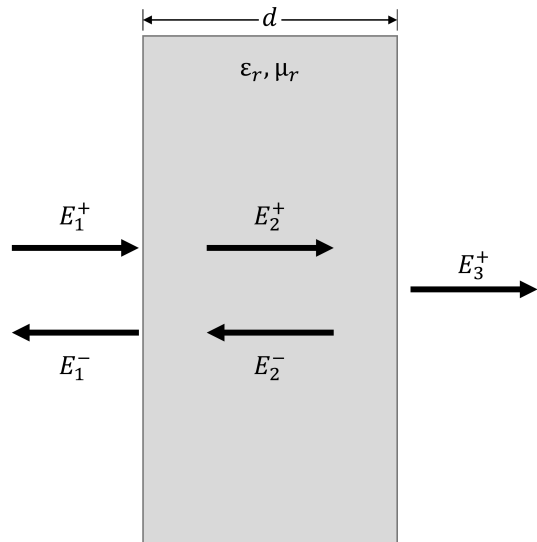


### 3

#### Problemlösningsdel (8 poäng)

En plan våg infaller vinkelrätt mot en dielektrisk skiva med tjocklek  $d$ , enligt figuren här intill. Dielektrikat är förlustfritt, och befinner sig i vakuum. Härled uttryck för dom totala reflektions- och transmissionskoefficienterna, alltså  $E_1^-/E_1^+$  och  $E_3^+/E_1^+$ .

- Beskriv och motivera hur dessa uttryck kan härledas. Finns det flera sätt? (3p)
- Härled uttrycken enligt din beskrivning i uppgift a). (5p)



### 4

#### Problemlösningsdel (8 poäng)

Beräkna Poyntingvektorn i följande situationer.

- En lång rak cylindrisk tråd med den elektriska ledningsförmågan, (konduktiviteten)  $\sigma$  och radien  $a$  som leder en jämt fördelad strömtäthet  $\mathbf{J}$ . Beräkna Poyntingvektorn på ytan av tråden, ange både belopp och riktning. (3 p)
- En plan elektromagnetisk våg som varierar sinusformigt med amplituderna  $\mathbf{E}_0$  and  $\mathbf{B}_0$  propagerar in mot ett tjockt, ledande rätklock, (antag att rätklocket har en konduktiviteten  $\sigma$ , och att det är ett mycket gott ledande material, dvs att  $\sigma \gg \omega\epsilon$ ). För enkelhets skull kan vi anta att ytan på rätklocket är parallell med propagationsriktningen hos den elektromagnetiska vågen, och att propagationen sker i positiv z-led. Beräkna tidsmedelvärdet av Poyntingvektorn inne i rätklocket. (3 p)
- Antag att ledningsförmågan i uppgift b istället är oändligt hög. Beräkna Poyntingvektorn överallt. (2 p)

### 5

#### Problemlösningsdel (8 poäng)

En Hertzdipol är placerad på avståndet  $a/2$  från ett mycket stort och perfekt ledande plan. Dipolen är orienterad så att den ligger parallellt längs med planet. Dipolen drivs av en sinusformad ström så att antennens dipolmoment kan beskrivas av uttrycket  $P = P_0 e^{-i\omega t}$

- Beräkna E-och H-fälten som dipolen ger upphov till Det räcker att ta fram dessa uttryck i fjärrfältet på samma sida av planet där Hertzdipolen är placerad. (5 p)
- Beräkna tidsmedelvärdet av motsvarande Poyntingvektor. (2 p)

1

a) Då  $\vec{E}=0$  i metaller kräver Gauss lag  $\rho_s(r_0) = \frac{Q}{4\pi r_0^2}$ , alltså att laddningen hos den inre sfären är jämnt fördelad över dess yta.

För att  $\vec{E}=0$  även i det tjocka metallskalet kräver Gauss lag  $\rho_s(a) = \frac{-Q}{4\pi a^2}$ , och eftersom skalet är oladdat får vi  $\rho_s(b) = \frac{Q}{4\pi b^2}$ .

b) För en sfärisk Gaussyta med  $r < r_0$  finns ingen innesluten laddning. Alltså:

$$\vec{E}=0, \quad r < r_0$$

En sfärisk Gaussyta med  $r_0 < r < a$  ger

$$\int_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{Q}{\epsilon_0} \Rightarrow \vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{n}, \quad r_0 < r < a$$

för  $a < r < b$  finns ingen innesluten laddning:

$$\vec{E}=0, \quad a < r < b$$

Och vid  $b < r$  är den inneslutna laddningen återigen  $Q$ :

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{n}, \quad b < r$$



Potentialen räknas ut med oändligheten  
Som referens:

$$\begin{aligned} b < r: \quad V(r) &= \int_r^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{r}' = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_r^{\infty} \frac{1}{r'^2} dr' \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 b} \end{aligned}$$

$$a < r < b: \quad V(r) - V(b) = \int_r^b \vec{E} \cdot d\vec{r}' = 0 \Rightarrow V(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 b}$$

$$\begin{aligned} r_0 < r < a: \quad V(r) - V(a) &= \int_r^a \vec{E} \cdot d\vec{r}' = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_r^a \frac{1}{r'^2} dr' \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{a} \right) \\ V(r) &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r} + \frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right) \end{aligned}$$

$$r < a: \quad V(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_0} + \frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right)$$

c) Då det yttre skalet jordas  
vid  $r=b$  kommer ytladdningen  
där att försvinna:  $\rho_s(b) = 0$ .

Dielektrikat polariseras ej då  
det är omgivet av ett metalliskt  
skal. Vi får alltså:

$$\vec{E} = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} & , \quad r_0 < r < a \\ 0 & , \quad \text{annars} \end{cases}$$

Vilket ger Potentialerna

$$a < r: V = 0, \quad a < r$$

$$r < a: V(r) - V(a) = \int_r^a \vec{E} \cdot d\vec{r}' = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{a} \right).$$

$$r < a: V(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{a} \right)$$

# 2

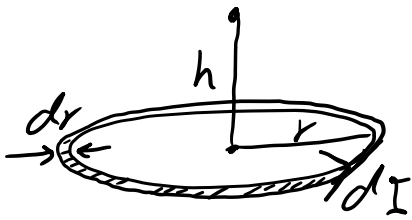
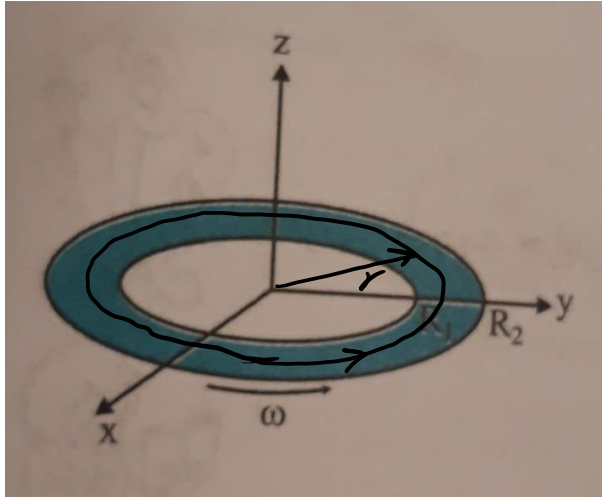
>> Magnetostatic

There is a ring in x-y plane in free-space. Its inner radius and outer radius are  $R_1$  and  $R_2$ , respectively. If it has a uniform charge density of  $\rho_s$  and it's rotating with angular frequency of  $\omega$  around its z-axis, then calculate magnetic field (H) at

- Origin (4p)
- Distance h on the z-axis (4p)

For one element which is a ring, we have:

$$d\vec{H} = \hat{z} \frac{r^2 dI}{2(h^2 + r^2)^{3/2}}$$



$$\vec{J}_s = J_s \vec{r} = J_s r \omega \hat{z}, \quad dI = J_s dr$$

a)  $h=0 \Rightarrow$

$$\vec{H} = \int_{R_1}^{R_2} d\vec{H} = \hat{z} \int_{R_1}^{R_2} \frac{J_s dr}{2r}$$

$$= \hat{z} \int_{R_1}^{R_2} \frac{J_s r \omega}{2r} dr = \hat{z} \frac{J_s \omega}{2} (R_2 - R_1)$$

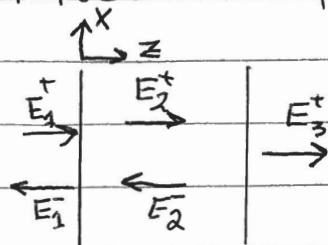
$$b) \vec{H} = \int_{R_1}^{R_2} \frac{r^2 J_s r \omega dr}{2(h^2 + r^2)^{3/2}} = \frac{J_s \omega}{2} \int_{R_1}^{R_2} \frac{r^3}{(h^2 + r^2)^{3/2}} dr$$

(From Beta:  $\int \frac{x^3 dx}{(x^2 + a^2)^{3/2}} = \sqrt{x^2 + a^2} + \frac{a^2}{\sqrt{x^2 + a^2}}$ )

$$\Rightarrow \vec{H} = \frac{J_s \omega}{2} \left[ \sqrt{r^2 + h^2} + \frac{h^2}{\sqrt{r^2 + h^2}} \right]_{R_1}^{R_2}$$

3

Låt koordinatsystemet vara valt  
 Så att vågorna propagerar i z-led  
 och att E-fältet är polariserat i  
 x-led.



Fälten kan då skrivas som

$$z < 0 \begin{cases} \vec{E}_1 = (E_1^+ e^{-j\beta_0 z} + E_1^- e^{j\beta_0 z}) \hat{x} \\ \vec{H}_1 = \frac{1}{Z_0} (E_1^+ e^{-j\beta_0 z} - E_1^- e^{j\beta_0 z}) \hat{y} \end{cases}$$

$$0 < z < d \begin{cases} \vec{E}_2 = (E_2^+ e^{-j\beta_1 z} + E_2^- e^{j\beta_1 z}) \hat{x} \\ \vec{H}_2 = \frac{1}{Z_1} (E_2^+ e^{-j\beta_1 z} - E_2^- e^{j\beta_1 z}) \hat{y} \end{cases}$$

$$d < z \begin{cases} \vec{E}_3 = E_3^+ e^{-j\beta_0(z-d)} \hat{x} \\ \vec{H}_3 = \frac{E_3^+}{Z_0} e^{-j\beta_0(z-d)} \hat{y} \end{cases}$$

Tangentialkomponenten av  $\vec{E}$  och  $\vec{H}$  är  
 kontinuerlig vid  $z=0$  och  $z=d$ . Vid  $z=0$   
 får vi

$$E_1^+ + E_1^- = E_2^+ + E_2^- \quad (1)$$

$$\frac{E_1^+}{Z_0} - \frac{E_1^-}{Z_0} = \frac{E_2^+}{Z_1} - \frac{E_2^-}{Z_1} \quad (2)$$

Addering av ① till ② multiplicerat med  $Z_0$  ger

$$2E_1^+ = E_2^+ \left(1 + \frac{Z_0}{Z_1}\right) + E_2^- \left(1 - \frac{Z_0}{Z_1}\right)$$

$$E_1^+ = E_2^+ \left(\frac{Z_1 + Z_0}{2Z_1}\right) + E_2^- \left(\frac{Z_1 - Z_0}{2Z_1}\right)$$

Subtrahering av ② multiplicerat med  $Z_0$  från ① ger

$$E_1^- = E_2^+ \left(\frac{Z_1 - Z_0}{2Z_1}\right) + E_2^- \left(\frac{Z_1 + Z_0}{2Z_1}\right)$$

Kontinuitet vid  $Z=d$  ger

$$E_2^+ e^{-j\beta_1 d} + E_2^- e^{j\beta_1 d} = E_3^+ \quad \text{③}$$

$$\frac{1}{Z_1} (E_2^+ e^{-j\beta_1 d} - E_2^- e^{j\beta_1 d}) = \frac{E_3^+}{Z_0} \quad \text{④}$$

Lösning av  $E_2^+$  och  $E_2^-$  från ③ och ④ ger

$$E_2^+ = E_3^+ e^{j\beta_1 d} \left(\frac{Z_1 + Z_0}{2Z_0}\right)$$

$$E_2^- = E_3^+ e^{-j\beta_1 d} \left(\frac{Z_0 - Z_1}{2Z_0}\right) = -E_3^+ e^{-j\beta_1 d} \left(\frac{Z_1 - Z_0}{2Z_0}\right)$$

Vi kan nu skriva

$$E_1^+ = E_3^+ \frac{e^{j\beta_1 d}}{Z_1 Z_0} \left(\frac{Z_1 + Z_0}{2}\right)^2 - E_3^+ \frac{e^{-j\beta_1 d}}{Z_1 Z_0} \left(\frac{Z_1 - Z_0}{2}\right)^2$$
$$= E_3^+ \frac{1}{4Z_1 Z_0} \left( e^{j\beta_1 d} (Z_1 + Z_0)^2 - e^{-j\beta_1 d} (Z_1 - Z_0)^2 \right)$$

Vilket ger transmissionskoefficienten

$$\begin{aligned}\frac{E_3^-}{E_1^+} &\equiv T = \frac{4Z_1Z_0}{(Z_1+Z_0)^2 e^{j\beta_1 d} - (Z_1-Z_0)^2 e^{-j\beta_1 d}} \\ &= \frac{4Z_1Z_0 e^{-j\beta_1 d}}{(Z_1+Z_0)^2 - (Z_1-Z_0)^2 e^{-j2\beta_1 d}}\end{aligned}$$

För reflektionskoefficienten skriver vi

$$\begin{aligned}E_1^- &= E_3^+ e^{j\beta_1 d} \frac{1}{4Z_1Z_0} (Z_1-Z_0)(Z_1+Z_0) + \\ &\quad + E_3^- e^{-j\beta_1 d} \frac{1}{4Z_0Z_1} (Z_0-Z_1)(Z_1+Z_0) \\ &= E_3^+ \frac{(Z_1-Z_0)(Z_1+Z_0)}{4Z_1Z_0} (e^{j\beta_1 d} - e^{-j\beta_1 d})\end{aligned}$$

Vilket tillsammans med uttrycket för  $E_1^+$  ger

$$\frac{E_1^-}{E_1^+} \equiv R = \frac{(Z_1-Z_0)(Z_1+Z_0)(1-e^{-j2\beta_1 d})}{(Z_1+Z_0)^2 - (Z_1-Z_0)^2 e^{-j2\beta_1 d}}$$

# 4

## >> Poynting Vector

Calculate Poynting vector in the following situations.

- Consider a long straight cylindrical wire of electrical conductivity  $\sigma$  and radius  $a$  carrying a uniform axial current of density  $J$ . Calculate the magnitude and direction of the Poynting vector at the surface of the wire. (3p)
- Consider a thick conducting slab (conductivity  $\sigma$  which is large, i.e.  $\sigma \gg \omega \epsilon_0$ ) exposed to a plane EM wave with peak amplitudes  $E_0$  and  $B_0$  (for simplicity, suppose that the normal to the surface of the slab is parallel to the direction of wave propagation, i.e. along the  $+z$  direction). Calculate the Poynting vector within the slab, averaged in time over a wave period. (3p)
- In part (b), if  $\sigma$  is infinite, what's the value of the average Poynting vector everywhere in space? (2p)

a) In cylindrical coordinate  $(r, \phi, z)$ ,  
let the current flow in  $+z$  direction.

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} \Rightarrow \vec{E} = \frac{\vec{J}}{\sigma} = \frac{J_0}{\sigma} \hat{z}$$



Poynting vector  $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} \Big|_{r=a}$ ;  $\vec{H} = ?$

Due to continuity of the tangential component of  $\vec{E}$  across the interface, we also have  $\vec{E} \Big|_{r=a+\epsilon} = \frac{J_0}{\sigma} \hat{z}$  just outside the surface of the wire. In other words,  $E_z(a) = E_z(a+\epsilon)$ .

Then using Ampere's law, we have:

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = I \Rightarrow H \oint 2\pi r = J_0 \pi a^2 \Rightarrow \vec{H} = \hat{\phi} \frac{J_0 a}{2}$$

$$\Rightarrow \vec{S} = \frac{J_0}{\sigma} \hat{z} \times \hat{\phi} \frac{J_0 a}{2} = -\hat{r} \frac{J_0^2 a}{2\sigma}$$

b) For the plane wave propagating in +z direction,

$$\vec{E}(r) = \hat{x} E_0(r) e^{-\gamma z} \quad ; \quad \gamma = \alpha + j\beta$$

And for a good conductor (when  $\sigma \gg \omega\epsilon_0$ ), we have

$$\alpha = \beta \approx \sqrt{\frac{\omega\mu_0\sigma}{2}} \quad (\text{formula 8-45 Cheng})$$

$$\Rightarrow \vec{E} = \hat{x} E_0 e^{-\alpha z} \cdot e^{-j\beta z}$$

and for a plane wave, we have the following relation between

$\vec{E}$  and  $\vec{H}$ :

$$\vec{H} = \frac{1}{\eta_c} \hat{z} \times \vec{E} \quad ;$$

where for a good conductor  $\eta_c \approx \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma}} = (1+j)\frac{\alpha}{\sigma}$   
(eq. 8-46)

$$\text{So, } \vec{H} = \frac{1}{\eta_c} \underbrace{\hat{z} \times \hat{x}}_{\hat{y}} E_0 e^{-\alpha z} \cdot e^{-j\beta z}$$

For average Poynting vector, based on eq 8-69, we have

$$\begin{aligned} \bar{S} &= \frac{1}{2} \text{Re} \{ \vec{E} \times \vec{H}^* \} = \frac{1}{2} \text{Re} \left\{ E_0 e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} \underbrace{\hat{z} \times \hat{y}}_{\hat{x}} \frac{E_0}{\eta_c^*} e^{\alpha z} e^{j\beta z} \right\} \\ &= \hat{z} \frac{E_0^2 e^{-2\alpha z}}{2} \text{Re} \left\{ \frac{1}{\eta_c^*} \right\} \\ &= \hat{z} \frac{E_0^2 e^{-2\alpha z}}{2} \text{Re} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2} \frac{\alpha}{\sigma} e^{-j\pi/4}} \right\} \end{aligned}$$



$$\Rightarrow \bar{S} = \hat{z} \frac{E_0^2 e^{-2\alpha z}}{2} \frac{\sigma}{\alpha \sqrt{2}} \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \hat{z} \frac{E_0^2}{4} e^{-2\alpha z} \frac{\sigma}{\alpha}$$

$$= \hat{z} \frac{E_0^2 \sqrt{2}}{4} e^{-2\alpha z} \sqrt{\frac{\sigma}{\omega \mu_0}}$$

c) As  $\sigma \rightarrow \infty$ ,  $\alpha \rightarrow \infty$  and  $\sqrt{\sigma} e^{-2\alpha z} \rightarrow 0$  which means  $\bar{S}$  inside the conducting slab becomes zero. In this case, the wave will be totally reflected at the surface of the slab. Moreover, outside the slab the incident and reflected waves will combine to form stationary waves. Hence  $\bar{S} = 0$  everywhere.

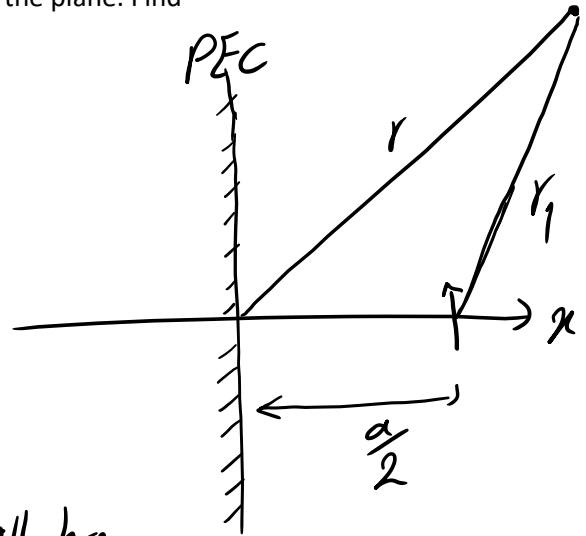
# 5

>> EM radiation

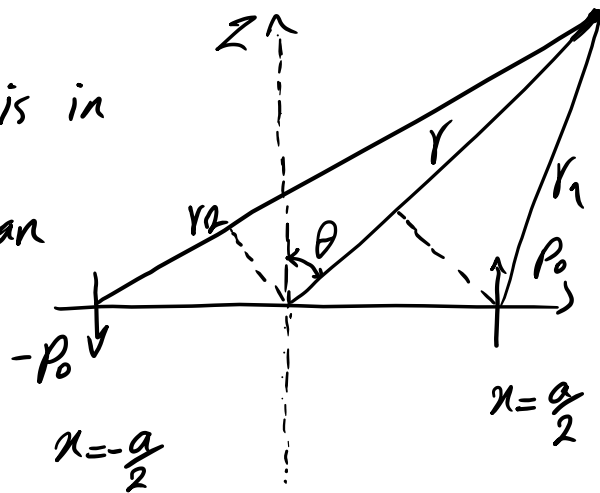
An electric dipole oscillates with frequency of  $\omega$  and amplitude  $P_0$ . It is placed at a distant  $a/2$  from an infinite perfectly conducting plane and the dipole is parallel to the plane. Find

- EM field (6p)
- The average Poynting vector (2p)

a) According to the image theory, we can remove the metallic plate by putting another Hertzian dipole at  $x = -\frac{a}{2}$ . So in this case, we'll have



Because the observation point is in the far-field ( $r \gg \frac{a}{2}$ ), we can approximate  $r_1$  and  $r_2$  based on  $r$  as follows:



$$r_1 \simeq r - \frac{a}{2} \hat{n} \cdot \hat{r}$$

$$r_2 \simeq r + \frac{a}{2} \hat{n} \cdot \hat{r}$$

and  $\hat{n}$ , expressed in the spherical coordinate, can be written as  $\hat{n} = \sin\theta \cos\varphi \hat{r} + \cos\theta \cos\varphi \hat{\theta} - \sin\varphi \hat{\varphi}$

SO:  $r_1 \simeq r - \frac{a}{2} \sin\theta \cos\varphi$  ① ,  $r_2 = r + \frac{a}{2} \sin\theta \cos\varphi$  ②

For a Hertzian dipole, we know the vector potential  $\vec{A}$  as

$$\vec{A} = \hat{z} \frac{\mu_0 I L}{4\pi} \frac{e^{-ikr}}{r}$$

or in terms of dipole moment ( $p_0 = \frac{IL}{j\omega}$ ),

$$\vec{A} = \hat{z} \frac{\mu_0 j\omega p_0}{4\pi} \frac{e^{-ikr}}{r}$$

In this problem we have two Hertzian dipoles pointing at the opposite directions along the z-axis. So

$$\vec{A} = \hat{z} \frac{j\mu_0 \omega p_0}{4\pi} \left[ \frac{e^{-ikr_1}}{r_1} - \frac{e^{-ikr_2}}{r_2} \right]$$

And based on the discussion that we had earlier about being in the far-field zone, we can substitute  $r_1$  and  $r_2$  in the exponents with ① and ② respectively, while  $r_1$  and  $r_2$  in the denominator can be safely approximated as  $r$  because they are not gonna make a phase shift, thus they are less important than the ones in the numerator. So

$$\vec{A} = \hat{z} \frac{j\omega\mu_0 P_0}{4\pi r} e^{-jkr} \left[ \begin{array}{c} jk\frac{a}{2} \sin\theta \cos\phi \\ e \\ -jk\frac{a}{2} \sin\theta \cos\phi \\ e \end{array} \right]$$

$$= \hat{z} \frac{j\omega\mu_0 P_0}{2\pi r} e^{-jkr} \sin\left(\frac{ka}{2} \sin\theta \cos\phi\right)$$

Finally,  $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$  which is again simplified in far-field by neglecting terms of orders higher than  $\frac{1}{r}$ . And  $\hat{z}$  in the spherical coordinate is  $\hat{z} = \cos\theta \hat{r} - \sin\theta \hat{\theta}$ .

$$\vec{B} \approx \hat{\phi} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r A_\theta) = \hat{\phi} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(-r A \sin\theta)$$

$$= -\hat{\phi} \frac{j\omega^2 P_0}{2\pi \epsilon_0 c^3 r} e^{-jkr} \sin\theta \sin\left(\frac{k}{2} a \sin\theta \cos\phi\right)$$

Where  $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$  is the speed of light in free-space.

Associated electric field can be calculated from plane-wave relation between  $E$  and  $H$  in the far-field. So

$$\vec{E} = c \vec{B} \times \hat{r} \approx -\hat{\theta} \frac{j\omega^2 P_0}{2\pi \epsilon_0 c^2 r} e^{-jkr} \sin\theta \sin\left(\frac{k}{2} a \sin\theta \cos\phi\right)$$

$$b) \vec{S} = \frac{1}{2} \text{Re}\{\vec{E} \times \vec{H}^*\}$$

$$= \frac{\epsilon_0 c}{2} |\vec{E}|^2 \hat{r} = \frac{\omega^4 P_0^2 \sin^2\theta}{8\pi^2 \epsilon_0 c^3 r^2} \sin^2\left(\frac{k}{2} a \sin\theta \cos\phi\right) \hat{r}$$