Tentamen i Elektromagnetisk fältteori för F2 och TM2.
EEF031 2018-01-11, kl. 14:00-18:00

Tillåtna hjälpmedel:	BETA, Physics Handbook, Formelsamling i Elektromagnetisk fältteori, Valfri kalkylator men inga egna anteckningar utöver egna formler på sista bladet i formelsamlingen i Elektromagnetisk fältteori
Förfrågningar:	Tomas Rydholm, tel. 072 - 170 47 48
Lösningar:	Anslås på kursens hemsida
Resultatet:	Anslås i LADOK
Granskning:	Sker på plats och tid annonseras på kurshemsidan
Kom ihåg	Poängavdrag görs för otydliga figurer, utelämnade referensriktningar, dimensionsfel och utelämnade motiveringar.

OBS!

Resultat från **läsårets** dugga får tillgodoräknas på elektrostatik- (tal 1) respektive magnetostatiktalet (tal 2). Bästa resultatet från duggan eller tentan räknas. Poäng på teoridelen respektive problemlösningsdelen räknas separat. Bonuspoäng från **årets** omgång av webb-frågorna får också tillgodoräknas till tentaresultatet.

Svaren på förståelsedelen skall ges på tesen som skall lämnas in.

Förståelsefrågorna besvaras genom att markera en av rutorna efter varje påstående till höger. En och endast en ruta på varje rad skall markeras.
De tre svarsalternativen (från vänster till höger är) Ja, Vet ej och Nej.
Riktigt svar ger +0,2 poäng oriktigt svar ger -0,2p. Vet ej är neutralt och ger noll poäng. Förståelseuppgifterna ger maximalt 1 poäng och lägst -1 poäng och man kan därför få 1poäng även med ett vet ej svar.

Anonym kod:

(Var vänlig ange den **email-adress** som används för inlämningsuppgifterna bland den dolda personinformationen på omslaget)

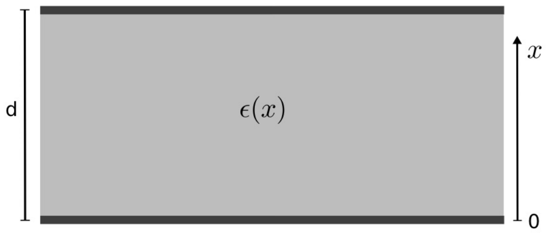
1 (Elektrostatik)

Problemlösningsdel (8 poäng)

A) Utrymmet mellan två plattor hos en kondensator är fylld med ett material vars permittivitet varierar enligt sambandet

$$\epsilon(x) = \epsilon_0 \frac{1}{1+\frac{\epsilon_1}{3d^2}x^2},$$

där x är avståndet från undre plattan, se figur. Avståndet mellan de två plattorna är d och plattornas area är S. Bestäm ϵ_1 givet att kapacitansen är C. Kanteffekter kan försummas.



Förståelsedel (4 poäng)

c) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?	**ja**	**?**	**nej**
För att fullständigt beskriva den grundläggande fysiken i uppgiften ovan räcker ett av Maxwells postulat.	❑	❑	❑
För att fullständigt beskriva den grundläggande fysiken i uppgiften ovan behövs två av Maxwells postulat.	❑	❑	❑
Den grundläggande fysiken i problemlösningsdelen ovan bygger **bland annat** på Gauss lag.	❑	❑	❑
Den grundläggande fysiken i problemlösningsdelen ovan bygger **bland annat** på att B-fältet är källfritt.	❑	❑	❑
Den grundläggande fysiken i problemlösningsdelen ovan bygger **bland annat** på att E-fältet är källfritt.	❑	❑	❑
Den grundläggande fysiken i problemlösningsdelen ovan bygger **bland annat** på att rotationen av B-fältet är lika med den fria strömtätheten gånger permeabiliteten.	❑	❑	❑

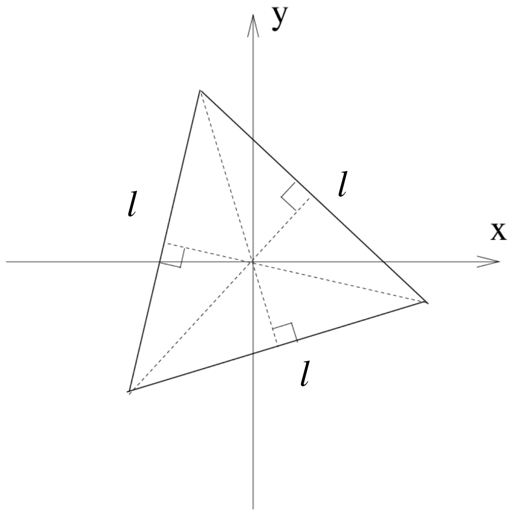
d) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?	**ja**	**?**	**nej**
Speglingsmetoden är en metod som kan användas för att lösa Poissons ekvation.	❑	❑	❑
Lösningen till Poissons ekvation är unik om randvillkoren uppfylls.	❑	❑	❑
Speglingsmetoden kan användas för att lösa Poissons ekvation i godtycklig geometri.	❑	❑	❑
Speglingsmetoden kan användas vid spegling i metallcylindrar.	❑	❑	❑
Man kan använda speglingsmetoden i ett hörn som utgörs av två jordade halvplan.	❑	❑	❑
Poissons ekvation härleds från enbart Gauss lag.	❑	❑	❑

e) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?	**ja**	**?**	**nej**
Eftersom rotationen av det elektrostatiska fältet är lika med noll kan en potential definieras.	❑	❑	❑
Anledningen till att definiera den elektrostatiska potentialen om $E = -\nabla V$ är att få en naturlig koppling av V till lägesenergin hos en testladdning som befinner sig i E-fältet.	❑	❑	❑
En perfekt ledare har alltid samma potential i hela sin volym.	❑	❑	❑
På litet avstånd (av samma storleksordning som avståndet mellan laddningarna i en elektrisk dipol) avtar E-fältet som $1/R^3$ från en elektrisk dipol.	❑	❑	❑
Coulumbs lag uttrycker hur stor kraften är mellan två laddningar.	❑	❑	❑
Coulumbs lag kan användas för att beräkna de krafter som verkar mellan tre olika punktladdningar.	❑	❑	❑

f) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?	**ja**	**?**	**nej**
Enheten för det elektriska fältet är V/m^3.	❑	❑	❑
Sambandet $D=\varepsilon E$ mellan E- och D-fältet kan härledas utifrån postulaten för elektrostatiken.	❑	❑	❑
Polarisationsfältet P är fältet från de bundna laddningarna i ett dielektriskt material.	❑	❑	❑
Dielektriska materialegenskaper modelleras med hjälp av elektriska dipoler.	❑	❑	❑
Antagande om approximativ strömfördelning ger en för hög resistans vid resistansberäkning.	❑	❑	❑
Antagande om approximativ potentialfördelning ger en för låg resistans vid resistansberäkning.	❑	❑	❑

2 (Magnetostatik)

Problemlösningsdel (8 poäng)



A) I formelbladet finner ni ett uttryck för B-fältet kring en ändlig ledare. **Härled** detta uttryck för specialfallet då ledaren sträcker sig längs z-axeln från $z = -l/2$ till $z = l/2$ och fältpunkten ligger i xy-planet (dvs. $z=0$). Ledaren leder en ström $\boldsymbol{I} = I\hat{z}$. (4 p)

B) Antag nu att ledaren sträcker sig från $(x, y, z) = \left(-a, -\frac{l}{2}, 0\right)$ till $\left(-a, \frac{l}{2}, 0\right)$ och leder strömmen $\boldsymbol{I} = I\hat{y}$. Baserat på ditt resultat ovan, bestäm **B**-fältet i origo till storlek och riktning. (1 p)

C) Tre raka ledare bildar en liksidig triangel (sidlängd l) centrerad i origo enligt figuren. Strömmen I flyter medsols i slingan. Beräkna **B** i origo. (3 p)

Förståelsedel (4 poäng)

d) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?	**ja**	**?**	**nej**
För att fullständigt beskriva den grundläggande fysiken i uppgiften ovan räcker ett av Maxwells postulat.	❑	❑	❑
För att fullständigt beskriva den grundläggande fysiken i uppgiften ovan behövs två av Maxwells postulat.	❑	❑	❑
Den grundläggande fysiken i problemlösningsdelen ovan bygger **bland annat** på Gauss lag.	❑	❑	❑
Den grundläggande fysiken i problemlösningsdelen ovan bygger **bland annat** på att B-fältet är källfritt.	❑	❑	❑
Den grundläggande fysiken i problemlösningsdelen ovan bygger **bland annat** på att E-fältet är källfritt.	❑	❑	❑
Den grundläggande fysiken i problemlösningsdelen ovan bygger **bland annat** på att rotationen av B-fältet är lika med den fria strömtätheten gånger permeabiliteten.	❑	❑	❑

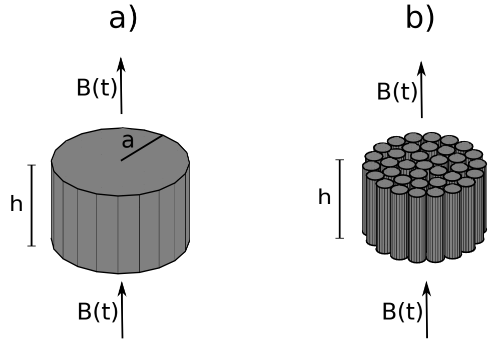
e) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?	**ja**	**?**	**nej**
B-fältets tangentialkomponent är alltid kontinuerlig i gränsen mellan två material.	❑	❑	❑
H-fältets tangentialkomponent är alltid kontinuerlig i gränsen mellan två material.	❑	❑	❑
B-fältets normalkomponent är alltid kontinuerlig i gränsen mellan två material.	❑	❑	❑
H-fältets normalkomponent är alltid kontinuerlig i gränsen mellan två material.	❑	❑	❑
En bra permanentmagnet ska ha en bred hystereskurva.	❑	❑	❑
På stort avstånd från en cirkulär strömförande slinga har magnetfältet samma matematiska form som fältet från en magnetisk dipol.	❑	❑	❑

f) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?	**ja**	**?**	**nej**
Magnetiska monopoler används för att modellera magnetiska material.	❑	❑	❑
Ferromagnetiska material har stor relativa permeabilitetstal.	❑	❑	❑
Paramagnetiska material har negativa relativa permeabilitetstal.	❑	❑	❑
Reluktans för en magnetfältskrets motsvarar ungefär resistans för en elektrisk krets.	❑	❑	❑
H-fältets roll i magnetostatiken påminner om E-fältets roll i elektrostatiken.	❑	❑	❑
Järns magnetiska egenskaper ett exempel på ett linjärt materialsamband som ger ett perfekt linjärt samband mellan B och H-fälten.	❑	❑	❑

g) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?	**ja**	**?**	**nej**
Kontinuitetsekvationen för stationär ström följer om man tar divergensen av Amperes lag.	❑	❑	❑
$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$ gäller alltid, även för tidsvarierande laddningsfördelningar.	❑	❑	❑
Kirchoffs strömlag kan härledas från $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$.	❑	❑	❑
Kirchoffs spänningslag kan härledas från $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$.	❑	❑	❑
$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$ är en konsekvens av att laddningen är bevarad.	❑	❑	❑
Strömtäthetsfältet har enheten A/m^2.	❑	❑	❑

3

Problemlösningsdel (8 poäng)



En metod för att minska förluster på grund av inducerade virvelströmmar i transformatorer är att dela upp dess cylindriska kärna i N stycken mindre cylindrar enligt figur. Antag att dessa två typer av kärnor är placerade i ett magnetfält $B(t) = B_0 \sin\omega t$ riktade längs med den cylindriska kärnan enligt figuren. Antag vidare att den totala arean hos de N cylindrarna i fall b) tillsammans upptar 95% av tväsnittsarean hos cylindern i a). Materialet har konduktivitet σ, höjden h samt radien a, där h och a är små jämfört med inträngningsdjupet i materialet. I båda fallen kan magnetfältet från de inducerade virvelströmmarna försummas.

A) Beräkna medeleffekten som utvecklas på grund av virvelströmmar i cylindern i fall a) (5p)

B) Beräkna den totala medeleffekten som utvecklas på grund av virvelströmmar i samtliga cylindrar i fall b), hur relaterar den till effekten i A? (3p)

Förståelsedel (4 poäng)

c) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?	**ja**	**?**	**nej**
För att fullständigt beskriva den grundläggande fysiken i uppgiften ovan räcker två av Maxwells postulat.	❑	❑	❑
För att fullständigt beskriva den grundläggande fysiken i uppgiften ovan behövs alla fyra Maxwells postulat.	❑	❑	❑
Den grundläggande fysiken i uppgiften ovan bygger **bland annat** på att rotationen av H-fältet är den fria strömtätheten plus tidsderivatan av förskjutningsfältet.	❑	❑	❑
Den grundläggande fysiken i uppgiften ovan bygger **bland annat** på att B-fältet är konservativt.	❑	❑	❑
Den grundläggande fysiken i uppgiften ovan bygger **bland annat** på att rotationen av E-fältet är lika med minus tidsderivatan av B-fältet.	❑	❑	❑
Den grundläggande fysiken i uppgiften ovan bygger **bland annat** på att E-fältet är källfritt.	❑	❑	❑

d) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?	**ja**	**?**	**nej**
E-fältet är rotationsfritt för tidsvarierande fält.	❑	❑	❑
B-fältet är källfritt för tidsvarierande fält.	❑	❑	❑
Lenz lag är ett av Maxwells postulat.	❑	❑	❑
Lenz lag säger att en inducerad spänning motverkar förändringen i det pålagda magnetfältet.	❑	❑	❑
En spänning kan induceras i en krets även om B-fältet är kontant i tiden.	❑	❑	❑
En transformator är ett exempel på en komponent som bygger på induktion för sin funktion.	❑	❑	❑

e) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?	**ja**	**?**	**nej**
Den skalära potentialen beskriver elektriska fält som härrör sig från laddningsseparation.	❑	❑	❑
Den skalära potentialen kan även beskriva elektriska fält som härrör sig från induktion.	❑	❑	❑
Två spolars ömsesidiga induktans beror på hur stor strömmen är i spolarna.	❑	❑	❑
Två spolars ömsesidiga induktans beror på hur många lindningsvarv som finns i de två spolarna.	❑	❑	❑
Självinduktansen i en strömslinga beror på antalet lindningsvarv i slingan.	❑	❑	❑
Det magnetiska flödet genom en slinga kan tecknas i termer av den magnetiska vektorpotentialen.	❑	❑	❑

f) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?	**ja**	**?**	**nej**
Vågimpedansen hos guld är Z=377Ω.	❑	❑	❑
Vågimpedansen för destillerat vatten är lägre än för luft.	❑	❑	❑
Vågimpedansen kan vara ett komplext tal.	❑	❑	❑
Beloppet av vågimpedansen för järn är lägre än för luft.	❑	❑	❑
Om den karakteristiska impedansen är reell betyder det att H- och E-fältet ligger i fas med varandra.	❑	❑	❑
Fasen för H- fältet ligger före fasen för E-fältet i metaller.	❑	❑	❑

4

Problemlösningsdel (8 poäng)

För en plan elektromagnetisk våg som färdas i vakuum ges det magnetiska fältet av

$B = B_o \sin\left(\omega\left(t - \frac{a_z z}{c_0}\right)\right)\hat{x}$ där B_0 är en konstant och c_0 är ljushastigheten i vakuum

A) Skriv uttrycket för vågen på komplex form (1p)
B) Bestäm det tillhörande elektriska fältet på komplex form (2p)
C) Utgå från de elektromagnetiska postulaten på reell form och härled den källfria vågekvationen för det magnetiska fältet i vakuum på komplex form (3p)
D) Vilket villkor måste a_z uppfylla för att vågekvation ska vara uppfylld? (2p)

Förståelsedel (4 poäng)

e) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?	**ja**	**?**	**nej**
Kontinuitetsekvationen kan härledas från Maxwells fyra postulat.	❑	❑	❑
Utöver Maxwells fyra postulat är kontinuitetsekvationen nödvändig för en fullständig beskrivning av den elektromagnetiska teorin.	❑	❑	❑
Den grundläggande fysiken i uppgiften ovan bygger **endast** på att rotationen av H-fältet är den fria strömtätheten plus tidsderivatan av förskjutningsfältet.	❑	❑	❑
Den grundläggande fysiken i uppgiften ovan bygger **endast** på att B-fältet är konservativt.	❑	❑	❑
Den grundläggande fysiken i uppgiften ovan bygger **endast** på att rotationen av E-fältet är lika med minus tidsderivatan av B-fältet.	❑	❑	❑
Den grundläggande fysiken i uppgiften ovan bygger **endast** på att E-fältet är källfritt.	❑	❑	❑

f) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?	**ja**	**?**	**nej**
Snells lag gäller endast i gränsytor där permeabiliteten är samma på båda sidor.	❑	❑	❑
Snells reflektionslag säger att då infallsvinkeln är större än en kritisk vinkel reflekteras inget fält.	❑	❑	❑
Snells brytningslag relaterar infallsvinkel till utfallsvinkeln för det transmitterade fältet.	❑	❑	❑
Snells reflektionslag säger att reflekterad vinkel är samma som infallsvinkeln.	❑	❑	❑
Snells lag säger att när infallsvinkeln är större än kritiska vinkeln uppstår totalreflektion.	❑	❑	❑
Totalreflektion uppstår då fältet går från ett optiskt tunnare till ett optiskt tätare medium.	❑	❑	❑

g) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?	**ja**	**?**	**nej**
En evanescent våg uppfyller vågekvationen.	❑	❑	❑
Totalreflektion ger upphov till evanescenta vågor.	❑	❑	❑
En cirkulärpolariserad plan våg träffar en plan gränsyta till ett förlustfritt dielektrikum under Brewstervinkeln. Reflektionen blir då linjärpolariserad.	❑	❑	❑
En cirkulärpolariserad plan våg träffar en plan gränsyta till ett förlustfritt dielektrikum under Brewstervinkeln. Reflektionen blir då cirkulärpolariserad.	❑	❑	❑
En cirkulärpolariserad plan våg träffar en plan gränsyta till ett förlustfritt dielektrikum under Brewstervinkeln. Reflektionen blir då elliptiskt polariserad.	❑	❑	❑
Brewstervinkeln definieras både för vågor med polarisering parallellt och vinkelrätt mot infallsplanet.	❑	❑	❑

h) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?	**ja**	**?**	**nej**
Man kan välja divergensen av den magnetiska vektorpotentialen fritt i elektromagnetismen.	❑	❑	❑
Man väljer ofta divergensen av den magnetiska vektorpotentialen till samma som i statiken för att förenkla beräkningarna.	❑	❑	❑
Vågekvationen för vektorpotentialen **A** kan härledas från Maxwells ekvationer.	❑	❑	❑
Den retarderade potentialen är lösningen till vågekvationen för vektorpotentialen **A**.	❑	❑	❑
Den magnetiska vektorpotentialen relateras till magnetfältet som $\nabla x B = A$.	❑	❑	❑
Den magnetiska vektorpotentialen **A**, är riktad åt samma håll som **B**-fältet.	❑	❑	❑

Problemlösningsdel (8 poäng)

A) En Hertzdipol är belägen i punkten $(x, y, z) = (a, 0,0)$. Dess dipolmoment ges (på komplex form) av $\bar{\boldsymbol{p}} = \bar{p}\hat{z}$ och vinkelfrekvensen är ω. I yz-planet ($x = 0$) finns ett stort, perfekt ledande jordat plan. Beräkna avståndet a, dvs avståndet mellan Hetzdipolen och planet, så att amplituden av fältet i punkten $(x, y, z) = (R, 0,0)$ blir så stor som möjligt, där R är mycket större än både våglängden λ och avståndet a.
Vad blir amplituden i denna punkt?

Förståelsedel (4 poäng)

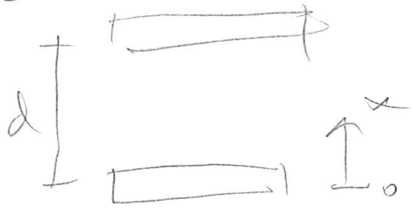
b) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?	**ja**	**?**	**nej**
För att fullständigt beskriva den grundläggande fysiken i uppgiften ovan räcker två av Maxwells postulat.	❑	❑	❑
För att fullständigt beskriva den grundläggande fysiken i uppgiften ovan behövs alla fyra Maxwells postulat.	❑	❑	❑
Den grundläggande fysiken i uppgiften ovan bygger **bland annat** på att B-fältet är lika med minus tidsderivatan av B-fältet.	❑	❑	❑
Den grundläggande fysiken i uppgiften ovan bygger **bland annat** på att B-fältet är källfritt.	❑	❑	❑
Den grundläggande fysiken i uppgiften ovan bygger **bland annat** på att rotationen av E-fältet är lika med minus tidsderivatan av B-fältet.	❑	❑	❑
Den grundläggande fysiken i uppgiften ovan bygger **bland annat** på att E-fältet är källfritt.	❑	❑	❑

c) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?	**ja**	**?**	**nej**
jω–metoden för fältberäkningar fungerar bara för harmoniskt varierande fält.	❑	❑	❑
Tidsderivata i Maxwells ekvationer övergår i jω–metoden till multiplikation med (-1).	❑	❑	❑
Ett komplext uttryck på E-fältet innehåller ett explicit tidsberoende.	❑	❑	❑
För att konvertera från komplext till reellt fält multiplicerar man med $e^{j\omega t}$ och tar imaginärdelen.	❑	❑	❑
Komplexa fält kan användas för att beskriva plana vågor.	❑	❑	❑
Kontinuitetsekvationen kan uttryckas på komplex form.	❑	❑	❑

d) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?	**ja**	**?**	**nej**
Vid snett infall mot en gränsyta skiljer sig uttrycken på reflektionskoefficienten för vinkelrät polarisering jämfört med parallell polarisering mot infallsplanet.	❑	❑	❑
Brewstervinkeln kan härledas från Fresnells ekvationer.	❑	❑	❑
Vid Brewstervinkeln transmitteras ingen energi genom gränsytan mellan två material.	❑	❑	❑
En optisk fiber bygger på fenomenet totalreflektion för sin funktion.	❑	❑	❑
Totalreflektion sker vid Brewstervinkeln	❑	❑	❑
Totalreflektion är möjlig då ljusstrålen går från ett optiskt tätare till ett optiskt tunnare medium.	❑	❑	❑

e) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?	**ja**	**?**	**nej**
En bra sändarantenn bör ha låg strålningsresistans.	❑	❑	❑
En parabolantenn är ett exempel på en antenn där man eftersträvar hög direktivitet.	❑	❑	❑
En antenn som sänder ut TV-sändningarna är ett exempel man eftersträvar hög direktivitet hos antennen.	❑	❑	❑
Det är en fördel om en antenn för som används för att ta emot GPS signaler har låg direktivitet.	❑	❑	❑
Genom att placera ett antal halvvågsantenner bredvid varandra på lämpligt sätt kan man styra antennanordningens antennförstärkning så den blir maximal i önskad riktning.	❑	❑	❑
En Hertzdipol är en halv väglängd läng.	❑	❑	❑

1) Elektrostatik $\quad (a = \varepsilon_1)$



$$\varepsilon(x) = \frac{\varepsilon_0}{1 + \frac{a}{3d^2} x^2}$$

kapacitans C

Ansätt laddningar $+Q$ (övre plattan), $-Q$ (undre plattan)

mellan plattorna, $\mathbf{D} = D\hat{x}$, $\mathbf{E} = \frac{\mathbf{D}}{\varepsilon}$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x} D = 0 \Rightarrow D = C$$

konstant

C ges av randvillkor

$D_{1n} - D_{2n} = \rho_S$

vid undre plattan: $D = -\frac{q}{S}$

$D_{1n} = D$
$D_{2n} = 0$
$\rho_s = -\frac{q}{S}$

$$\Rightarrow \mathbf{E} = -\frac{q}{S} \cdot \frac{1}{\varepsilon(x)} \hat{x}$$

$$\Delta V = -\int_0^d E_x \, dx = \frac{q}{S} \cdot \frac{1}{\varepsilon_0} \int_0^d \left(1 + \frac{a}{3d^2} x^2\right) dx$$

$$= \frac{q}{S} \cdot \frac{1}{\varepsilon_0} \left[x + \frac{a}{9d^2} x^3 \right]_0^d = \frac{q}{S\varepsilon_0} \left(d + \frac{a}{9} \cdot \frac{d^3}{d^2} \right)$$

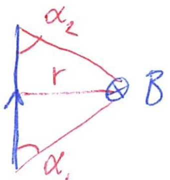
$$= \frac{qd}{S\varepsilon_0} \left(1 + \frac{a}{9} \right)$$

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{S\varepsilon_0}{d} \cdot \frac{1}{1 + \frac{a}{9}}$$

$$\Rightarrow \boxed{a = 9\left(\frac{S\varepsilon_0}{Cd} - 1 \right)}$$

2.

a) Vi ska härleda följande formel



$$\mathbb{B}(r,z) = \hat{\varphi}\frac{\mu_0 I}{2\pi r}\cdot\frac{\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2}{2}$$

för specialfallet $x=y=0$, $-l/2 \leq z' \leq l/2$
och fältpunkten ligger i $z=0$.

Dvs.

$$B(r,z) = \hat{\varphi}\frac{\mu_0 I}{2\pi r}\cdot\frac{l}{\sqrt{l^2+(2r)^2}}$$

$$\left(= \hat{\varphi}\frac{\mu_0 I}{2\pi r}\cdot\cos\alpha, \quad \alpha = \frac{l/2}{\sqrt{(l/2)^2+r^2}} \right)$$

För att göra detta utgår vi från Biot-Savart och integrerar längs ledaren.

$$\mathbb{B}(\mathbb{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}}\frac{I\,dz'\cdot\hat{z}\times\hat{R}_{12}}{R_{12}^2}$$

Källpunkt: $\mathbb{r}' = z'\hat{z}$
Fältpunkt: $\mathbb{r} = r\hat{r}$

med $\mathbb{R}_{12} = \mathbb{r} - \mathbb{r}'$
$= r\hat{r} - z'\hat{z}$

$$\Rightarrow \begin{cases} R_{12} = \sqrt{r^2+z'^2} \\ \hat{R}_{12} = \mathbb{R}_{12}/R_{12} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \mathbb{B}(\mathbb{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}}\frac{I\,dz'\,\hat{z}\times(r\hat{r}-z'\hat{z})}{(r^2+z'^2)^{3/2}}$$

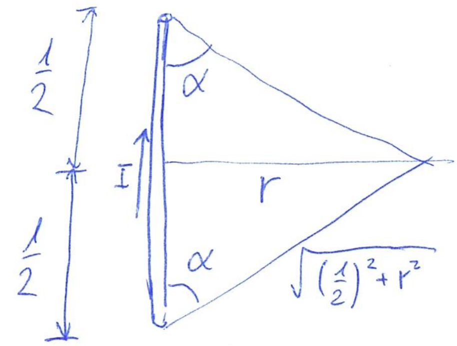
$$= \frac{\mu_0 I r}{4\pi}\hat{\varphi}\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}}dz'\,\frac{1}{(r^2+z'^2)^{3/2}}$$

Slå upp i Beta
Integral # 111

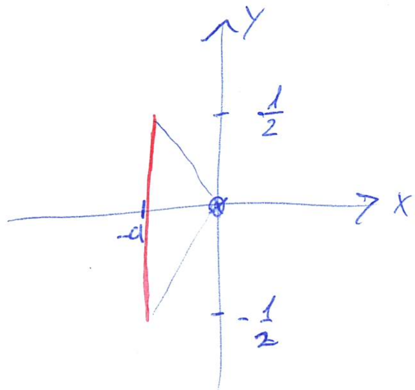
$$= \frac{\mu_0 I r}{4\pi} \hat{\varphi} \left[\frac{z'}{r^2\sqrt{z'^2+r^2}} \right]_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}}$$

$$= \hat{\varphi} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \cdot \frac{l/2}{\sqrt{(l/2)^2+r^2}}$$

$$= \hat{\varphi} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \cos\alpha$$



B) Vi utgår nu från samma ledare men förskjuter den till $x=-a$.



Vi har då att

$$r=a$$

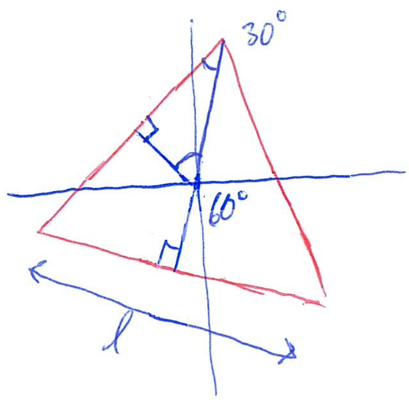
och $\hat{\varphi}$ ersätts med $-\hat{z}$ för en fältpunkt i origo.

$$B(0,0,0) = -\hat{z} \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \cdot \frac{l/2}{\sqrt{(\frac{l}{2})^2+a^2}}$$

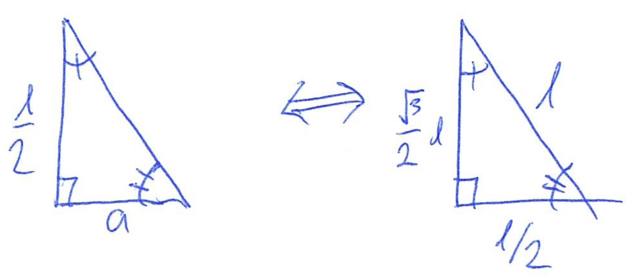
$$= -\hat{z} \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \cdot \frac{l}{\sqrt{l^2+(2a)^2}}$$

C) Vi kan först notera att hur triangeln vrids kring z-axeln är irelevant.

Vi kan utnyttja resultatet från B om vi finner ett samband mellan a och l.



Två likformiga trianglar:



$$\Rightarrow \quad \frac{a}{\frac{l}{2}} = \frac{\frac{l}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2} l} \quad \Rightarrow \quad a = \frac{\cancel{l}}{\cancel{2}} \cdot \frac{1/2}{\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}} \cancel{l}} = \frac{l}{2\sqrt{3}}$$

Totala fältet fås då av att summera bidragen från de tre ledarna.

$$B = 3 \cdot \left(-\hat{z} \frac{\mu_0 I}{\cancel{2}\pi \left(\frac{l}{\cancel{2}\sqrt{3}} \right)} \cdot \frac{l}{\sqrt{l^2 + \left(2 \cdot \frac{l}{2\sqrt{3}}\right)^2}} \right)$$

$$= -\hat{z} \frac{3\mu_0 I}{\pi/\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{l^2 + l^2/3}}$$

$$= -\hat{z} \frac{3\mu_0 I}{\pi/\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot l \cdot \sqrt{3+1}}$$

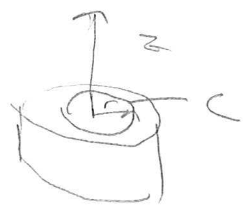
$$= -\hat{z} \frac{9\mu_0 I}{2\pi l}$$

Uppgift 3

A)

Faradays lag $\quad \nabla \times \mathbb{E} = -\frac{\partial \mathbb{B}}{\partial t} \Rightarrow \oint_L \mathbb{E} \cdot d\mathbb{l} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t}$

$\mathbb{E} = E_\varphi(r)\,\hat{e}_\varphi$



$$\Rightarrow 2\pi r E_\varphi(r) = -\frac{\partial}{\partial t} \pi r^2 \cdot B_0 \sin \omega t$$

$$= -B_0 \omega \pi r^2 \cos \omega t$$

$$\Rightarrow E_\varphi(r) = -\frac{B_0 \omega r}{2} \cos \omega t$$

Utvecklad effekt enl. Joules lag

$$P = \int_V \mathbb{J} \cdot \mathbb{E} = \int_{r=0}^{a} \int_{z=0}^{h} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \sigma E_\varphi^2 \, r \, d\varphi \, dz \, dr$$

$$= 2\pi h \sigma \int_{r=0}^{a} \left(\frac{B_0 \omega r}{2} \cos \omega t\right)^2 r \, dr$$

$$= 2\pi h \sigma \left(\frac{B_0 \omega}{2} \cos \omega t\right)^2 \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^a$$

$$= 2\pi h \sigma \frac{B_0^2 \omega^2}{4} \cos^2 \omega t \, \frac{a^4}{4} = \frac{\pi B_0^2 \omega^2 h \sigma a^4}{8} \cos^2 \omega t$$

Tidsmedelvärde $\quad$ periodtid

$$\langle P \rangle = \frac{1}{T} \int_{t=0}^{T} P(t)\,dt = \frac{\pi B_0^2 \omega^2 h \sigma a^4}{8} \cdot \frac{1}{T} \int_{t=0}^{T} \cos^2 \omega t \, dt$$

$$= \boxed{\frac{\pi B_0^2 \omega^2 h \sigma a^4}{16}}$$

B)

ansätt radien b på varje cylinder
95% av tvärsnittsytan

$$\Rightarrow \quad N \cdot \pi b^2 = 0.95 \cdot \pi a^2 \Rightarrow b = a\sqrt{\frac{0.95}{N}}$$

N trecblad effekt i en av cylindrarna
(använd uttryck från A)

$$P' = \frac{\pi B_0^2 \omega^2 h \sigma \left(a\sqrt{\frac{0.95}{N}}\right)^4}{16} = \frac{0.95^2}{N^2} \cdot \frac{\pi B_0^2 \omega^2 h \sigma a^4}{16}$$

$$P_{tot} = NP' = \frac{0.95^2}{N} \underbrace{\frac{\pi B_0^2 \omega^2 h \sigma a^4}{16}}_{P_A}$$

Uppgift 4

A)

$$B(\mathbb{R},t) = \mathrm{Re}\left\{ B_0(-j)\cdot e^{-j\frac{\omega}{c}a_z z} e^{j\omega t} \right\}$$

$$\boxed{\overline{B}(\mathbb{R}) = -j B_0 \, e^{-j\frac{\omega}{c}a_z z} \, \hat{x}}$$

B)

$$\overline{E}(R) = Z_0 \, \overline{H}(R) \times \hat{k}$$

$$\overline{H}(R) = \frac{\overline{B}(R)}{\mu_0}$$

$$\hat{k} = \hat{z}$$

$$= Z_0 \frac{\overline{B}(R)}{\mu_0} \times \hat{x}$$

$$= \frac{Z_0}{\mu_0}\left(-j B_0 \, e^{-j\frac{\omega}{c}a_z z} \, \hat{x} \times \hat{z}\right)$$

$$\boxed{= \frac{Z_0}{\mu_0}\cdot j B_0 \, e^{-j\frac{\omega}{c}a_z z} \, \hat{y}}$$

C) $\nabla \times \overline{H} = j\omega \overline{D}$ (Maxwell då $J=0$)

$$\nabla \times (\nabla \times \overline{H}) = \nabla \times (j\omega \overline{D})$$

VL: $\nabla(\nabla \cdot \overline{H}) - \nabla^2 \overline{H} = -\frac{1}{\mu_0}\nabla^2 \overline{B}$

HL: $j\omega \; \nabla \times \overline{D} = j\omega \varepsilon_0 \; \nabla \times \overline{E}$

$$= j\omega \varepsilon_0 (-j\omega)\overline{B} = \omega^2 \varepsilon_0 \overline{B} =$$

VL = HL

for $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}$

$$\Rightarrow \boxed{\nabla^2 \bar{B} + \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 \bar{B} = 0} \quad *$$

$k = \frac{\omega}{c}$

$$\boxed{\nabla^2 \bar{B} + k^2 \bar{B} = 0}$$

D) $\nabla^2 \bar{B} = -j B_0 \frac{\partial^2}{\partial z^2} e^{-j \frac{\omega}{c} a_z z}$

$= -j B_0 \cdot \left(-j \frac{\omega}{c} a_z\right)^2 e^{-j \frac{\omega}{c} a_z z}$

$= -\frac{\omega^2}{c^2} a_z^2 \bar{B}$

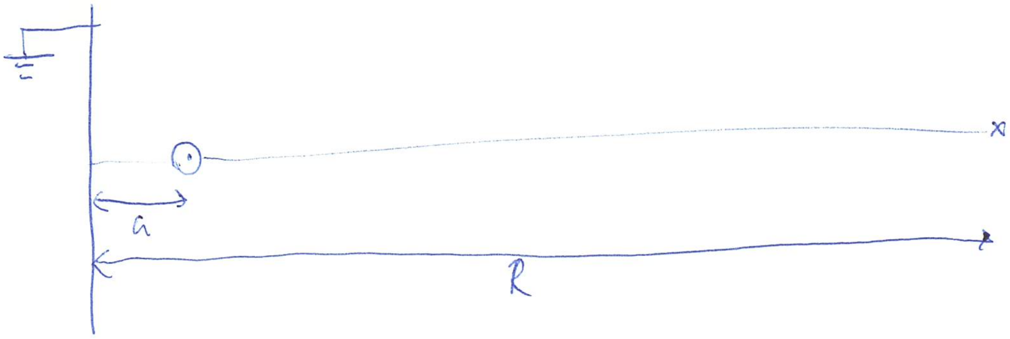
(satt in i $*$)

$$\Rightarrow -\frac{\omega^2}{c^2} a_z^2 + \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 = 0 \qquad \varepsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2}$$

$$\Rightarrow a_z^2 \omega^2 = \omega^2$$

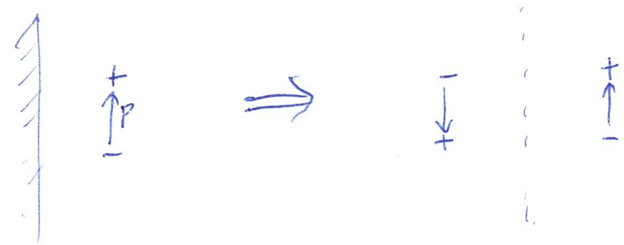
$$a_z^2 = 1$$

5.



Vi börjar med att spegla dipolen i planet.

(För att se hur dipoler speglas, se dem som ett laddningspar.



)

Det komplexa fältet från en Hertz-dipol <u>i origo</u> ges av

$$\bar{E}(R,\theta,\varphi) = \hat{\theta} Z_0 \frac{j\omega l \bar{I} \sin\theta}{4\pi c R} e^{-j\omega R/c}$$

med $\bar{p} = \hat{z}\frac{l\bar{I}}{j\omega} \Rightarrow -\omega^2 \bar{p} = j\omega l \bar{I}$

$$\Rightarrow \bar{E}(R,\theta,\varphi) = \hat{\theta} Z_0 \frac{(-\bar{p})\cdot\omega^2 \sin\theta}{4\pi c R} e^{-j\omega R/c}$$

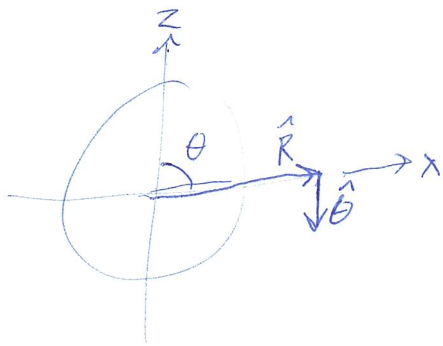
(Gäller enbart för $x>0$. Spegling)

Våra avstånd är

$$R_I = R - a$$

$$R_{II} = R + a$$

och riktningen $\hat{\theta} = -\hat{z}$.



Totala fältet blir:

$$\bar{E}(R, \tfrac{\pi}{2}, 0) = \hat{z} Z_0 \frac{\bar{p}\omega^2}{4\pi c}\left(\frac{e^{-j\omega(R-a)/c}}{R-\cancel{a}} - \frac{e^{-j\omega(R+a)/c}}{R\cancel{+a}}\right)$$

$$= \hat{z} Z_0 \frac{\bar{p}\omega^2}{4\pi c} \cdot \frac{e^{-j\omega R}}{R} \cdot \left(e^{j\omega a/c} - e^{-j\omega a/c}\right)$$

$$= \hat{z} Z_0 \frac{2j\bar{p}\omega^2}{4\pi c} \cdot \frac{e^{-j\omega R}}{R} \cdot \sin\frac{\omega a}{c}$$

Fältstyrkan ges av beloppet:

$$|\bar{E}(R, \tfrac{\pi}{2}, 0)| = 2 \cdot \left|Z_0 \cdot \frac{\bar{p}\omega^2}{4\pi c}\right| \cdot \frac{1}{R} \cdot \left|\sin\frac{\omega a}{c}\right|$$

Detta maximeras om sinusfaktorn blir 1.

$$\Rightarrow \frac{\pi}{2} + n\pi = \frac{\omega a}{c} \qquad n = 0, 1, 2 \ldots$$

$$= \frac{2\pi a}{\lambda}$$

$$\Rightarrow \quad a = \left(n + \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{\lambda}{2}$$

Amplituden: 2 ggr starkare.

$$|\bar{E}(R, \tfrac{\pi}{2}, 0)| = 2 \cdot Z_0 \cdot \frac{|\bar{p}|\omega^2}{4\pi c R}$$