

Tentamen i Elektromagnetisk fältteori för F2 och TM2.

EEF031 2017-01-12, kl. 14:00-18:00

Tillåtna hjälpmedel:	BETA, Physics Handbook, Formelsamling i Elektromagnetisk fältteori, Valfri kalkylator men inga egna anteckningar utöver egna formler på sista bladet i formelsamlingen i Elektromagnetisk fältteori
Förfrågningar:	Tomas Rydholm, tel. 072 – 170 47 48
Examinator:	Andreas Fhager, tel. 076 – 125 70 12
Lösningar:	anslås på kursens hemsida
Resultatet:	anslås i LADOK
Granskning:	Sker på plats och tid annonseras på kurshemsidan
Kom ihåg	Poängavdrag görs för otydliga figurer, utelämnade referensriktningar, dimensionsfel och utelämnade motiveringar.

OBS!

Resultat från **läsårets** dugga får tillgodoräknas på elektrostatik- (tal 1) respektive magnetostatiktalet (tal 2). Bästa resultatet från duggan eller tentan räknas. Poäng på teoridelen respektive problemlösningsdelen räknas separat. Bonuspoäng från **årets** omgång av webb-frågorna får också tillgodoräknas till tentaresultatet.

Svaren på förståelsedelen skall ges på tesen som skall lämnas in.

Förståelsefrågorna besvaras genom att markera en av rutorna efter varje påstående till höger. En och endast en ruta på varje rad skall markeras. De tre svarsalternativen (från vänster till höger är) Ja, Vet ej och Nej. Riktigt svar ger +0,2 poäng oriktigt svar ger -0,2p. Vet ej är neutralt och ger noll poäng. Förståelseuppgifterna ger maximalt 1 poäng och lägst -1 poäng och man kan därför få 1poäng även med ett vet ej svar.

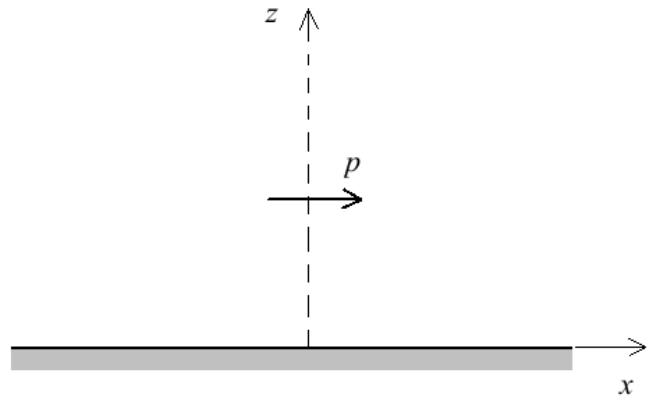
Anonym kod:

(Var vänlig ange den **email-adress** som används för inlämningsuppgifterna bland den dolda personinformationen på omslaget)

1 (Elektrostatik)

Problemlösningsdel (8 poäng)

En elektrisk dipol är placerad i punkten $(x,y,z) = (0,0,h)$ ovanför ett mycket stort ledande och jordat plan som ligger i xy -planet ($z=0$). Dipolmomentet är $\mathbf{p} = p\hat{x}$



A) Använd spegling för att hitta ett ekvivalent problem. Markera tydligt avstånden till spegelbilden samt dess magnitud och riktning.

B) Beräkna det elektriska fältet längs med z -axeln. För vilka värden på z är din funna lösning en korrekt beskrivning av fältet?

Förståelsedel (4 poäng)

c) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

- För att fullständigt beskriva den grundläggande fysiken i uppgiften ovan räcker ett av Maxwells postulat. ja ? nej
- För att fullständigt beskriva den grundläggande fysiken i uppgiften ovan behövs två av Maxwells postulat. ja ? nej
- Den grundläggande fysiken i problemlösningsdelen ovan bygger **bland annat** på Gauss lag. ja ? nej
- Den grundläggande fysiken i problemlösningsdelen ovan bygger **bland annat** på att B-fältet är källfritt. ja ? nej
- Den grundläggande fysiken i problemlösningsdelen ovan bygger **bland annat** på att E-fältet är källfritt. ja ? nej
- Den grundläggande fysiken i problemlösningsdelen ovan bygger **bland annat** på att rotationen av B-fältet är lika med den fria strömtätheten gånger permeabiliteten. ja ? nej

d) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

- Poissons ekvation kan härledas direkt från kontinuitetsekvationen och definitionen av elektrostatisk potential. ja ? nej
- I vissa fall kan vi lösa Poissons ekvation med hjälp av spegling i isolerade ytor. ja ? nej
- Det är möjligt att lösa Poissons ekvation med hjälp av spegling i metallytor som kan tillåtas ha en *godtycklig form*. ja ? nej
- På stort avstånd från en elektrisk dipol avtar E-fältet som $1/R^3$. ja ? nej
- På litet avstånd (av samma storleksordning som avståndet mellan laddningarna i en elektrisk dipol) avtar E-fältet som $1/R^3$ från en elektrisk dipol. ja ? nej
- Coulombs lag uttrycker hur stor kraften är mellan två laddningar. ja ? nej
- Ohms lag är ett av postulaten i elektrostatiken. ja ? nej

e) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

- Källan till förskjutningsfältet \mathbf{D} är polarisationsladdningarna. ja ? nej
- Sambandet $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$, där ϵ är en skalär konstant, beskriver alla existerande material med god noggrannhet. ja ? nej
- Polarisationsfältet \mathbf{P} är fältet från de fria laddningarna i ett material. ja ? nej
- Om permeabiliteten för ett dielektriskt material är en konstant skalär oberoende av fältstyrkan betyder det att materialet är homogent, isotropt och linjärt. ja ? nej
- Om permeabiliteten för ett dielektriskt material är beroende av fältstyrkan betyder det att materialet är anisotropt. ja ? nej
- Vakuüm har den relativa permittiviteten $\epsilon_r = 1$. ja ? nej

f) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

- Om man definierar den elektrostatiska potentialen är som $E = -\nabla V$ betyder det att den elektriska lägesenergin hos en positiv testladdning minskar då man tillför arbete för att flytta laddningen från en punkt till en annan. ja ? nej
- En ekvipotentialyta definieras som den yta där E-fältet har konstant storlek. ja ? nej
- Dielektriska egenskaper modelleras med elektriska dipoler. ja ? nej
- Dielektriska material modelleras med fria laddningar som tillförs materialet. ja ? nej
- I elektrostatiken modelleras perfekt ledande metaller som ekvipotentialytor. ja ? nej
- Elektrostatiken säger att det på ytan av en metall kan existera tangentiella fältkomponenter. ja ? nej

2 (Magnetostatik)

Problemlösningsdel (8 poäng)

A) A thin conducting wire is bent into the shape of a regular polygon of N sides. A current, I , flows in the wire. Show that the magnetic flux density at the centre of the polygon is

$$\mathbf{B} = \mathbf{a}_n \frac{\mu_0 N I}{2\pi b} * \tan(\pi/N)$$

where b is the radius of the circle circumscribing the polygon and \mathbf{a}_n is a unit vector normal of the plane of the polygon. What is the expression for \mathbf{B} when N becomes very large?

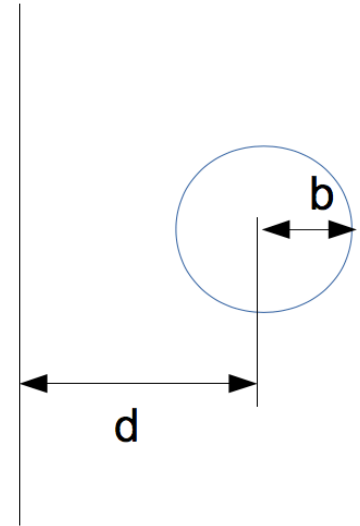
Förståelsedel (4 poäng)

	ja	?	nej
b) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?			
För att fullständigt beskriva den grundläggande fysiken i uppgiften ovan räcker ett av Maxwells postulat.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
För att fullständigt beskriva den grundläggande fysiken i uppgiften ovan behövs två av Maxwells postulat.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Den grundläggande fysiken i problemlösningsdelen ovan bygger bland annat på Gauss lag.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Den grundläggande fysiken i problemlösningsdelen ovan bygger bland annat på att B-fältet är källfritt.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Den grundläggande fysiken i problemlösningsdelen ovan bygger bland annat på att E-fältet är källfritt.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Den grundläggande fysiken i problemlösningsdelen ovan bygger bland annat på att rotationen av B-fältet är lika med den fria strömtätheten gånger permeabiliteten.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
c) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?	ja	?	nej
Lorentzkraften beror både på B- och E-fältet.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Laddningar i rörelse som utsätts för ett B-fält <i>kan</i> påverkas av en kraft orsakad av B-fältet.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Laddningar som rör sig <i>parallellt</i> med B-fältslinjerna utsätts för en kraft orsakad av B-fältet.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Laddningar i rörelse som utsätts för ett E-fält påverkas av en kraft orsakad av E-fältet.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Laddningar i <i>vila</i> som <i>endast</i> utsätts för ett B-fält <i>kan</i> påverkas av en kraft orsakad av B-fältet.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
I ett koordinatsystem som följer med en laddning som rör sig vinkelrätt mot B-fältslinjerna kommer $\mathbf{u} \times \mathbf{B}$ att bli noll och därmed påverkas inte laddningen av någon kraft.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
d) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?	ja	?	nej
Två långa raka parallella ledare som leder en likström i samma riktning känner av en attraktiv kraft, som orsakas av likströmmen och att det uppstår ett B-fält runt ledarna.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Två långa raka parallella ledare känner av en attraktiv kraft om bara den ena ledaren leder en likström, som orsakas av likströmmen och att det uppstår ett B-fält runt den ledare som leder en ström.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Magnetiska krafter kan förstås ur ett resonemang som baseras på att kontinuitetsekvationen alltid ska vara uppfylld.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Om vi använder metoden med virtuella förflyttningar för att beräkna den magnetiska kraften kan både flöde och ström hållas konstanta samtidigt under den tänkta förflyttningen.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Om man håller strömmen konstant blir kraften större än om man håller flödet konstant eftersom batteriet i det fallet levererar energi till systemet för att hålla strömmen konstant.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Om vi håller det magnetiska flödet konstant ska vi ha ett minustecken framför derivatan av energin.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
e) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?	ja	?	nej
Magnetiska dipoler används för att modellera magnetiska material.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Ferromagnetiska material har små relativa permeabilitetstal.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Diamagnetiska material har negativa relativa permeabilitetstal.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Reluktans för en magnetfältskrets motsvarar ungefär resistans för en elektrisk krets.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
H-fältets roll i magnetostatiken påminner om D-fältets roll i elektrostatiken.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
I en permanentmagnet vill man ha ferromagnetiskt material med en smal hystereskurva.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

3

Problemlösningsdel (8 poäng)

a) A conducting circular loop, with a radius $b = 0.1$ m, is placed in the neighbourhood of a very long power line carrying a 60 Hz alternating current. The circular loop is placed with its centre point at a distance $d = 0.15$ m from the power line. An AC Amperemeter that is inserted in the loop reads 0.3 mA. Assume the total impedance of the loop, including the Amperemeter, is 0.01 Ohm. Find the magnitude of the current in the power line.



Förståelsedel (4 poäng)

b) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

- | | | | |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| För att fullständigt beskriva den grundläggande fysiken i uppgiften ovan räcker två av Maxwells postulat. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| För att fullständigt beskriva den grundläggande fysiken i uppgiften ovan behövs alla fyra Maxwells postulat. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| Den grundläggande fysiken i uppgiften ovan bygger bland annat på att rotationen av H-fältet är den fria strömtätheten plus tidsderivatan av förskjutningsfältet. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| Den grundläggande fysiken i uppgiften ovan bygger bland annat på att B-fältet är konservativt. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| Den grundläggande fysiken i uppgiften ovan bygger bland annat på att rotationen av E-fältet är lika med minus tidsderivatan av B-fältet. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| Den grundläggande fysiken i uppgiften ovan bygger bland annat på att E-fältet är källfritt. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

c) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

- | | | | |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| Amperes lag modifieras när man går från magnetostatik till dynamik (dvs tidsvarierande fält). | ja | ? | nej |
| Divergensen av B-fältet är noll även för det tidsvarierande fältet. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| Gauss lag modifieras när man går från elektrostatik till dynamik (dvs tidsvarierande fält). | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| Faradays lag modifieras då man går från elektrostatik till dynamik (dvs tidsvarierande fält). | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| Lenz lag säger att en inducerad spänning är sådan att den motverkar förändring i det externt pålagda magnetfältet. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| Egeninduktansen förstärker flödesändringar i kretsen. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

d) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

- | | | | |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| I elektromagnetismen är E-fältets tangentialkomponent kontinuerlig i gränsen mellan två material med olika permittivitet. | ja | ? | nej |
| I elektromagnetismen är E-fältets normalkomponent kontinuerlig i gränsen mellan två material med olika permittivitet. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| I elektromagnetismen är B-fältets tangentialkomponent kontinuerlig i gränsen mellan två material med olika permeabilitet. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| I elektromagnetismen är B-fältets normalkomponent kontinuerlig i gränsen mellan två material med olika permeabilitet. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| Randvillkoret för B-fältets tangentialkomponent förändras då man går från statik till tidsvarierande fält. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| Randvillkoret för E-fältets tangentialkomponent förändras då man går från statik till tidsvarierande fält. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

e) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

- | | | | |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| Man kan välja divergensen av den magnetiska vektorpotentialen fritt i elektromagnetismen. | ja | ? | nej |
| Man väljer ofta divergensen av den magnetiska vektorpotentialen till samma som i statiken för att förenkla Faradays induktionslag uttrycker att ett elektriskt fält kan genereras utan laddningsseparation. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| Lenz lag följer av Faradays lag. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| Lenz lag kan användas för att bestämma polariteten hos en inducerad spänning. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| Man kan inducera spänning i en ledare trots att $-dB/dt$ termen i Faradays lag är noll. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

Problemlösningsdel (8 poäng)

a) A very small filamentary rectangular loop of dimensions L_x and L_y lies in the xy -plane with its center in the origin and sides parallel to the x - and y -axes. The loop carries an alternating current $i(t) = I_0 \cos(\omega t)$. Assuming L_x and L_y to be much smaller than the wavelength, find the instantaneous expression for magnetic field intensity \mathbf{H} in an arbitrary point in the far field, i.e. at a point with a distance from the loop that is much larger than the wavelength.

Förståelsedel (4 poäng)

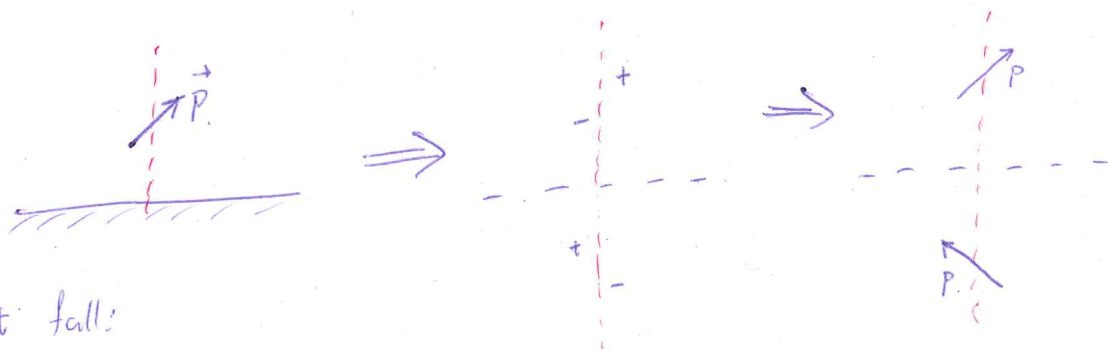
- b) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?**
- | | ja | ? | nej |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| För att fullständigt beskriva den grundläggande fysiken i uppgiften ovan räcker två av Maxwells postulat. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| För att fullständigt beskriva den grundläggande fysiken i uppgiften ovan behövs alla fyra Maxwells postulat. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| Den grundläggande fysiken i uppgiften ovan bygger bland annat på att rotationen av H-fältet är den fria strömtätheten plus tidsderivatan av förskjutningsfältet. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| Den grundläggande fysiken i uppgiften ovan bygger bland annat på att B-fältet är konservativt. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| Den grundläggande fysiken i uppgiften ovan bygger bland annat på att rotationen av E-fältet är lika med minus tidsderivatan av B-fältet. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| Den grundläggande fysiken i uppgiften ovan bygger bland annat på att E-fältet är källfritt. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
- c) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?**
- | | ja | ? | nej |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| En Hertzdipol är <i>mycket längre</i> än en våglängd. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| Strömmen i en Hertzdipol kan i varje ögonblick variera längs antennen. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| En Hertzdipol har en strålningsresistans som indikerar att antennen är en mycket effektiv och bra sändarantenn. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| En Hertzdipol har ett helt isotropt strålningsdiagram. Med andra ord Hertzdipolen strålar lika mycket i alla riktningar. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| En kvartsvågsantenn är ekvivalent med en fjärdedel så lång som en Hertzdipol. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| Strömmen antas ha ett maximum i de båda ändarna av en kvartsvågsantenn. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
- d) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?**
- | | ja | ? | nej |
|-----------------------------------------------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| En monokromatisk våg innehåller endast en frekvenskomponent. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| För en god ledare är $\sigma/\omega\varepsilon = 1$. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| I en god ledare är $\alpha \gg \beta$. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| För en god isolator är vågimpedansen $Z \approx \sqrt{j\omega\mu/\sigma}$. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| För höga frekvenser är inträngningsdjupet mindre än för låga frekvenser. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| En mycket god ledare har $\sigma = 0$. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
- e) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?**
- | | ja | ? | nej |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| $j\omega$ -metoden för fältberäkningar fungerar bara för harmoniskt varierande fält. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| Tidsderivata i Maxwells ekvationer övergår i $j\omega$ -metoden till multiplikation med (-1). | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| Ett komplext uttryck på E-fältet innehåller ett explicit tidsberoende. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| För att konvertera från komplext till reellt fält multiplicerar man med $e^{j\alpha}$ och tar imaginärdelen. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| Komplexa fält kan användas för att beskriva plana vågor. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| Kontinuitetsekvationen kan uttryckas på komplex form. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

1 Elektrostatik

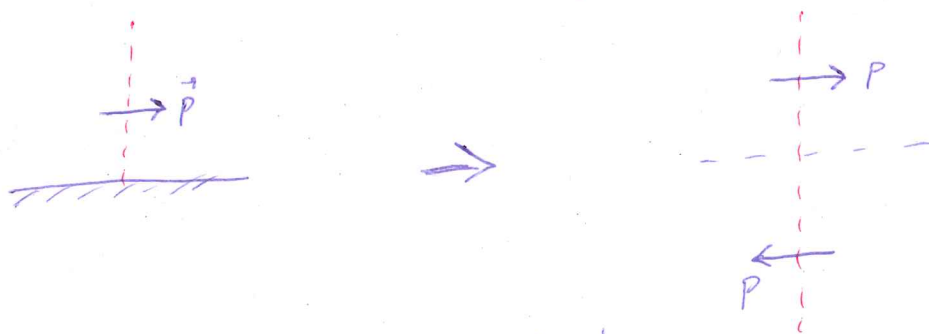
Tenta 2017-01-12

A) Riktningen på den speglade dipolen kan fås genom att "dela upp" den i två laddningar.

Generellt:



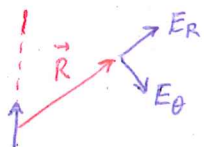
Och i vårt fall:



B) I formelsamlingen ges fältet från en dipol av

$$\vec{E}(R, \theta) = \frac{P}{4\pi\epsilon_0 R^3} (\hat{R} \cdot 2 \cos\theta + \hat{\theta} \sin\theta)$$

Detta uttryck gäller dock för en z-riktad dipol i origo.



\hat{R} får vi ersätta med $\pm \hat{z}$ och $\hat{\theta}$ ersätts med $\pm \hat{x}$.

Vi ersätter också θ med 90° och R med

$$\begin{cases} z-h & \text{för den verkliga dipolen, } z > h \\ -z+h & \text{--- " ---, } 0 < z < h \\ z+h & \text{för spegelbilden, } z > 0 \end{cases}$$

Notera att vi inte behöver något uttryck där $z < 0$ eftersom speglingsmetoden endast ger en korrekt lösning för $z > 0$.

Det totala E-fältet blir då

$$\bullet \quad 0 < z < h: \quad \vec{E}(x=0, y=0, z) = \left(-\frac{P}{4\pi\epsilon_0(-z+h)^3} \hat{x} + \frac{P}{4\pi\epsilon_0(z+h)^3} \hat{x} \right)$$

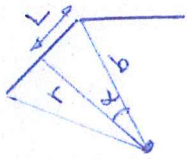
$$\bullet \quad z > h: \quad \vec{E}(x=0, y=0, z) = \frac{P}{4\pi\epsilon_0(-z+h)^3} \hat{x} + \frac{P}{4\pi\epsilon_0(z+h)^3} \hat{x}$$

Eller något förenklat

$$\vec{E}(0, 0, z) = \begin{cases} \hat{x} \frac{P}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{(z-h)^3} + \frac{1}{(z+h)^3} \right) & , \quad 0 < z < h \\ \hat{x} \frac{P}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{(h-z)^3} + \frac{1}{(z+h)^3} \right) & , \quad z > h \\ 0 & , \quad z < 0 \end{cases}$$

(Notera att fältet blir noll på randen.)

* Magnetostatics: Question 2



use equation 6-35 for a wire of length $2L$.

$$\vec{B} = \hat{a}_\phi \frac{\mu_0 I L}{2\pi r \sqrt{L^2 + r^2}}$$

in this problem:

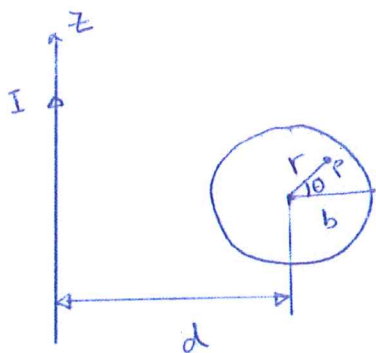
$$\alpha = \frac{2\pi}{2N} = \frac{\pi}{N}$$

$$\tan \alpha = \frac{L}{r} = \tan \frac{\pi}{N}$$

$$\vec{B} = \hat{a}_N \left(\frac{\mu_0 I L}{2\pi r b} \right) = \hat{a}_N \frac{\mu_0 N I}{2\pi b} \tan \frac{\pi}{N}$$

when N is very large, $\tan \frac{\pi}{N} \approx \frac{\pi}{N} \rightarrow \vec{B} = \hat{a}_n \frac{\mu_0 I}{2b}$

* - induction : question 3



Assume a current \vec{I} .

$$\vec{B} \text{ at } P(r, \theta) \text{ is } \hat{a}_\phi \frac{\mu_0 \vec{I}}{2\pi(d+r\cos\theta)}$$

$$\vec{\Phi} = \frac{\mu_0 \vec{I}}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^b \frac{r dr d\theta}{d+r\cos\theta} = \frac{\mu_0 \vec{I}}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{2\pi r dr}{\sqrt{d^2-r^2}}$$

$$= \mu_0 \vec{I} (d - \sqrt{d^2-b^2})$$

$$b = 0.1 \text{ m}$$

$$d = 0.15 \text{ m}$$

$$f = 60 \text{ Hz} \rightarrow \omega = 2\pi \cdot f = 2\pi \cdot 60 = 120\pi$$

$$i_{\text{induced}} = 0.3 \text{ mA} = \frac{\vec{V}_{\text{induced}}}{|Z|} = \frac{\vec{V}_{\text{induced}}}{0.01} \rightarrow \vec{V}_{\text{ind}} = \frac{3}{10} \cdot \frac{1}{100} \cdot 10^{-3}$$

$$= 3 \mu\text{V}$$

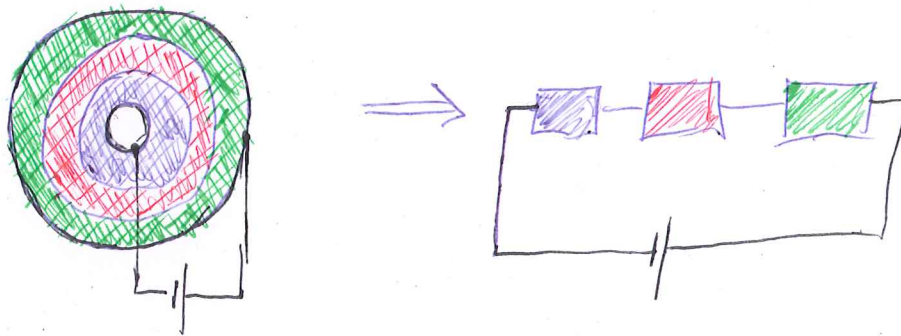
$$\text{if } \vec{I} = \vec{I} \cos \omega t \rightarrow -\frac{d\vec{\Phi}}{dt} = \mu_0 \vec{I} (d - \sqrt{d^2-b^2}) \cdot (+\omega) \sin \omega t$$

$$\vec{V}_{\text{induced}} = -\frac{d\vec{\Phi}}{dt} = \mu_0 \vec{I} (d - \sqrt{d^2-b^2}) \cdot \omega \rightarrow \vec{I} = \frac{\vec{V}_{\text{ind}}}{\mu_0 (d - \sqrt{d^2-b^2}) \cdot \omega}$$

4A)

Den varierande konduktiviteten gör att vi får se det ena fallet som en seriekoppling och det andra som en parallellkoppling.

Då vi lägger en spänning mellan in- och utsidan av cylindern kan vi se varje cylindriskt skikt som en resistans vilka kopplas i serie.



Vi summerar (integrerar) därför resistansen för alla lager.

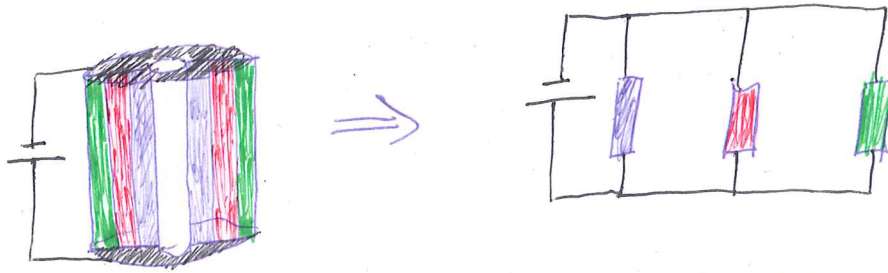
Resistansen för ett lager är

$$\begin{aligned} dR &= \frac{dr}{\sigma(r) \cdot A} \\ &= \frac{dr}{\sigma(r) \cdot 2\pi r l} \end{aligned}$$

Totala resistansen blir då

$$\begin{aligned} R &= \int_{r_0}^{r_1} \frac{dr}{\frac{r_0 \sigma_0}{r} \cdot 2\pi r \cdot l} \\ &= \int_{r_0}^{r_1} \frac{dr}{r_0 \sigma_0 \cdot 2\pi l} \\ &= \frac{r_1 - r_0}{r_0 \sigma_0 \cdot 2\pi l} \end{aligned}$$

För resistansen i riktning med axeln måste vi istället se skikten som parallellkopplade.



Vi måste därför summera konduktanserna.

$$dG = \frac{\sigma(r) \cdot A}{l}$$
$$= \frac{\sigma(r) \cdot 2\pi r \cdot dr}{l}$$

$$\Rightarrow G = \int_{r_0}^{r_1} \frac{r_0 \sigma_0}{r} \cdot 2\pi r \cdot dr$$
$$= \frac{(r_1 - r_0) \cdot r_0 \sigma_0 \cdot 2\pi}{l}$$

$$\Rightarrow R = \frac{1}{G} = \frac{l}{(r_1 - r_0) r_0 \sigma_0 \cdot 2\pi}$$

B

Att vi nu har en växelström innebär att strömmen inte nödvändigtvis fördas genom hela tvärsnittet av ledaren. Istället måste vi ta hänsyn till inträngningsdjupet.

Vi börjar med att konstatera att $\sigma \gg \omega \epsilon$
varpå vi kan använda formeln

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega \sigma \mu}}$$

från formelbladet.

Insättning av givna värden ger att $\delta \approx 1,4 \cdot r_1$.

Vi kan då konstatera att $r_1 - r_0 < \delta < l$.

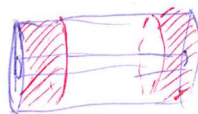
Att beräkna resistansen för fallet med strömmar längs cylinderns axel blir nu ganska rakt fram.

$$R = \frac{l}{\sigma \cdot A}$$
$$= \frac{l}{\sigma \cdot \pi (r_1^2 - r_0^2)}$$
$$(\approx 2 \text{ m}\Omega)$$

För den radiellt riktade strömmen måste vi dock tänka på inträngningsdjupet samt att "tvärsnittet" varierar med r .

$$R = \int_{r_0}^{r_1} \frac{dr}{\sigma \delta \cdot 2\pi r \cdot l}$$

Båda sidorna



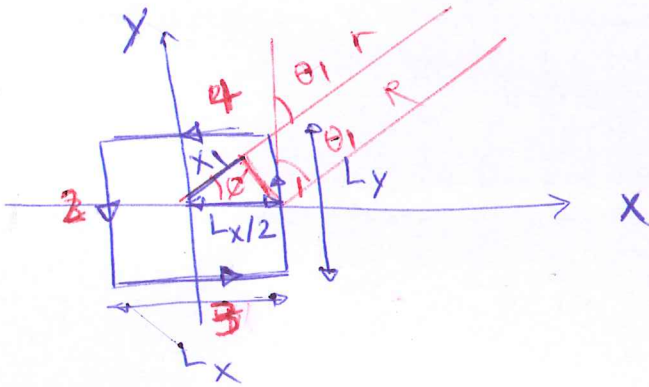
$$= \frac{1}{\sigma \delta \cdot 4\pi l} \cdot \ln \frac{r_1}{r_0}$$

$$(\approx 180 \mu\Omega)$$

* - Antenna : - question 5

far-zone fields for a Herzian dipole :

$$H_{\phi} = j \frac{I dl}{4\pi R} \left(\frac{e^{-j\beta R}}{R} \right) \beta \sin \theta \quad \left(\frac{A}{m} \right)$$



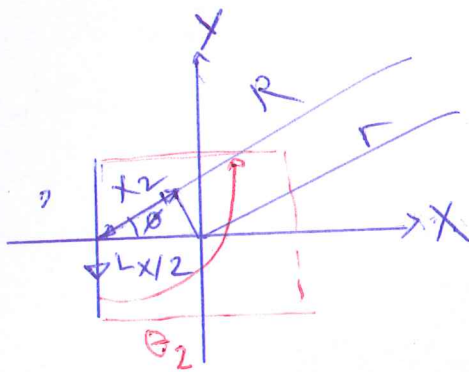
①

$$\theta_1 = \frac{\pi}{2} - \phi$$

$$R = r - X_1$$

$$X_1 = \frac{L_x}{2} \cdot \cos \phi$$

distance from origin to the field point



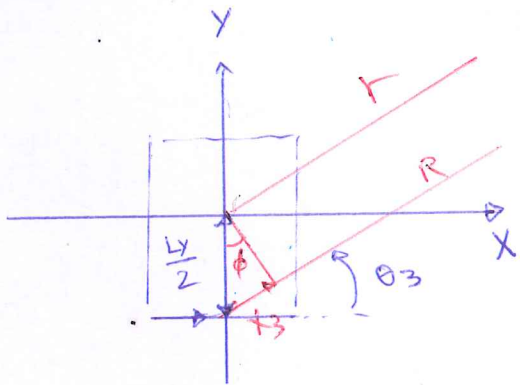
②

$$\theta_2 = \frac{\pi}{2} + \phi$$

$$R = r + X_2$$

$$X_2 = \frac{L_x}{2} \cdot \cos \phi$$

distance from antenna center to field point

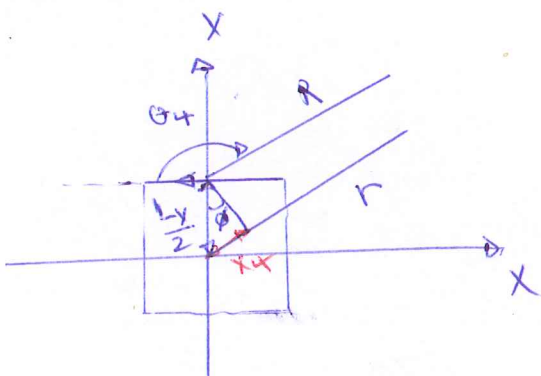


③

$$R = r + X_3$$

$$X_3 = \frac{L_y}{2} \cdot \sin \phi$$

$$\theta_3 = \phi$$



④

$$R = r - X_4$$

$$X_4 = \frac{L_y}{2} \cdot \sin \phi$$

$$\theta_4 = \pi - \phi$$

$$H_{\phi} \Big|_{y_{II}} = j \frac{I L_y \beta}{4\pi} \frac{\sin(\frac{\pi}{2} - \phi)}{r} e^{-j\beta(r - \frac{L_x}{2} \cos\phi)} - jK \frac{\sin(\frac{\pi}{2} + \phi)}{r} e^{-j\beta(r + \frac{L_x}{2} \cos\phi)}$$

$$\left[\sin\left(\frac{\pi}{2} - \phi\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \phi\right) = \cos\phi \right]$$

$$\begin{aligned} \rightarrow H_{\phi} \Big|_{y_{II}} &= jK \frac{\cos\phi}{r} e^{-j\beta r} \left(e^{j\beta \frac{L_x}{2} \cos\phi} - e^{-j\beta \frac{L_x}{2} \cos\phi} \right) \frac{2j}{2j} \\ &= -2K \frac{\cos\phi}{r} e^{-j\beta r} \frac{\sin\left(\beta \frac{L_x}{2} \cos\phi\right)}{\frac{\beta L_x}{2} \cos\phi} \\ &= -2K \frac{\cos\phi}{r} e^{-j\beta r} \beta \frac{L_x}{2} \cos\phi \quad (1) \end{aligned}$$

for dipoles Parallel to x-axis :

$$H_{\phi} \Big|_{x_{II}} = jK \frac{\sin(\pi - \phi)}{r} e^{-j\beta(r - \frac{L_y}{2} \sin\phi)} - jK \frac{\sin\phi}{r} e^{-j\beta(r + \frac{L_y}{2} \sin\phi)}$$

$$= -2K \frac{\sin\phi}{r} e^{-j\beta r} \left(\beta \frac{L_y}{2} \sin\phi \right) \quad (2)$$

sum $H_{\phi} \Big|_{x_{II}}$ & $H_{\phi} \Big|_{y_{II}}$:

$$\begin{aligned} H_{\phi} \Big|_{\text{total}} &= H_{\phi} \Big|_{y_{II}} + H_{\phi} \Big|_{x_{II}} = -\frac{2K}{r} e^{-j\beta r} \left(\cos\phi \beta \frac{L_x}{2} \cos\phi + \sin\phi \beta \frac{L_y}{2} \sin\phi \right) \\ &= -\frac{2K}{r} e^{-j\beta r} \beta \left(\cos^2\phi \frac{L_x}{2} + \sin^2\phi \frac{L_y}{2} \right) \end{aligned}$$