

Tentamen i Elektromagnetisk fältteori för F2 och TM2.

EEF031 2016-08-18 kl. 14:00-18:00

Tillåtna hjälpmedel:	BETA, Physics Handbook, Formelsamling i Elektromagnetisk fältteori, Valfri kalkylator men inga egna anteckningar utöver egna formler på sista bladet i formelsamlingen i Elektromagnetisk fältteori
Förfrågningar:	Pegah Takook, tel. 073-687 23 96
Examinator:	Andreas Fhager, tel. 076-125 70 12
Lösningar:	anslås på kursens hemsida
Resultatet:	anslås i LADOK
Granskning:	Sker på plats och tid annonseras på kurshemsidan
Kom ihåg	Poängavdrag görs för otydliga figurer, utelämnade referensriktningar, dimensionsfel och utelämnade motiveringar.

OBS!

Resultat från **läsårets** dugga får tillgodoräknas på elektrostatik- (tal 1) respektive magnetostatiktalet (tal 2). Bästa resultatet från duggan eller tentan räknas. Poäng på teoridelen respektive problemlösningsdelen räknas separat. Bonuspoäng från **årets** omgång av webb-frågorna får också tillgodoräknas till tentaresultatet.

Svaren på förståelsedelen skall ges på tesen som skall lämnas in.

Förståelsefrågorna besvaras genom att markera en av rutorna efter varje påstående till höger. En och endast en ruta på varje rad skall markeras. De tre svarsalternativen (från vänster till höger är) Ja, Vet ej och Nej. Riktigt svar ger +0,2 poäng oriktigt svar ger -0,2p. Vet ej är neutralt och ger noll poäng. Förståelseuppgifterna ger maximalt 1 poäng och lägst -1 poäng och man kan därför få 1 poäng även med ett vet ej svar.

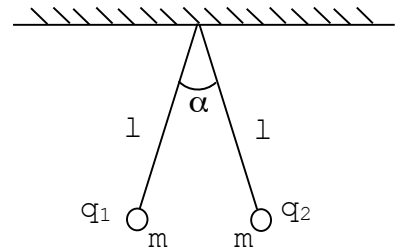
Anonym kod:

(Var vänlig ange den **email-adress** som används för inlämningsuppgifterna bland den dolda personinformationen på omslaget)

1 (Elektrostatik)

Problemlösningsdel (8 poäng)

a) Två kulor med samma massa, m , laddningar q_1 och q_2 är upphängda med hjälp av snören av längden l i en gemensam punkt. Beräkna vinkelseparationen mellan de två snörena pga. att kulorna repellerar varandra. Beräkna ett numeriskt värde på vinkeln α om $l = 2$ m, $m = 2$ kg, $q_1 = 2 \mu\text{C}$ och $q_2 = 2 \mu\text{C}$.



Förståelsedel (4 poäng)

b) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

	ja	?	nej
För att fullständigt beskriva den grundläggande fysiken i uppgiften ovan räcker ett av Maxwells postulat.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
För att fullständigt beskriva den grundläggande fysiken i uppgiften ovan behövs två av Maxwells postulat.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Den grundläggande fysiken i problemlösningsdelen ovan bygger bland annat på Gauss lag.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Den grundläggande fysiken i problemlösningsdelen ovan bygger bland annat på att B-fältet är källfritt.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Den grundläggande fysiken i problemlösningsdelen ovan bygger bland annat på att E-fältet är källfritt.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Den grundläggande fysiken i problemlösningsdelen ovan bygger bland annat på att rotationen av B-fältet är lika med den fria strömtätheten gånger permeabiliteten.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

c) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

	ja	?	nej
Eftersom divergensen av det elektriska fältet är skilt från noll kan en potential definieras.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Den elektriska potentialen kan definieras som $E = -\nabla V$.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Den elektriska potentialen kan definieras som $E = \nabla V$.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
En perfekt ledare har alltid samma potential i hela sin volym.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Randvillkoret för E-fältets tangentialkomponent härleds utifrån divergensen av E-fältet.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Randvillkoret för E-fältets normalkomponent härleds utifrån att E-fältet är konservativt.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

d) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

	ja	?	nej
Källan till förskjutningsfältet D är de fria laddningarna.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Sambandet $D = \epsilon E$ mellan E- och D-fältet kan härledas utifrån postulaten för elektrostatiken.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Polarisationsfältet P är fältet från bundna polarisationsladdningar i ett material.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Om permeabiliteten för ett dielektriskt material är en konstant skalär oberoende av fältstyrkan betyder det att materialet är homogent, isotropt och linjärt.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Om permeabiliteten för ett dielektriskt material är beroende av fältstyrkan betyder det att materialet är anisotropt.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Vakuum har oändligt stor relativ permittiviteten, dvs $\epsilon_r = \infty$.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

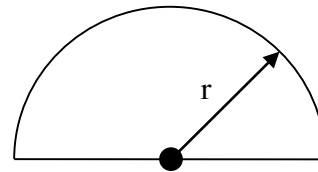
e) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

	ja	?	nej
Poissons ekvation kan härledas direkt från kontinuitetsekvationen och definitionen av elektrostatisk potential.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
I vissa fall kan vi lösa Poissons ekvation med hjälp av spegling i isolerade ytor.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Det är möjligt att lösa Poissons ekvation med hjälp av spegling i metallytor som kan tillåtas ha en <i>godtycklig form</i> .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Laplaces ekvation är ett specialfall av Poissons ekvation.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
I härledningen av entydighetssatsen för Poissons ekvation antar man att först att det finns flera lösningar med samma randvillkor...	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
...sedan visar man att lösningen av Poissons ekvation är oberoende av randvillkoren.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

2 (Magnetostatik)

Problemlösningsdel (8 poäng)

a) En likström I flyter i en lång metallstång med radie r som delats på längden och har ett tvärsnitt som en halvcirkel enligt figuren. Antag att strömmen är jämt fördelad över hela tvärsnittet. Bestäm magnetfältet till storlek och riktning i centrumaxeln av den ursprungliga stången. (Vid den svarta pricken.)



Förståelsedel (4 poäng)

b) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

	ja	?	nej
För att fullständigt beskriva den grundläggande fysiken i uppgiften ovan räcker ett av Maxwells postulat.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
För att fullständigt beskriva den grundläggande fysiken i uppgiften ovan behövs två av Maxwells postulat.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Den grundläggande fysiken i problemlösningsdelen ovan bygger bland annat på Gauss lag.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Den grundläggande fysiken i problemlösningsdelen ovan bygger bland annat på att B-fältet är källfritt.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Den grundläggande fysiken i problemlösningsdelen ovan bygger bland annat på att E-fältet är källfritt.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Den grundläggande fysiken i problemlösningsdelen ovan bygger bland annat på att rotationen av B-fältet är lika med den fria strömtätheten gånger permeabiliteten.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

c) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

	ja	?	nej
Vid härledningen av Biot-Savarts lag kan man utgå från den magnetiska vektorpotentialen och dess allmänna lösning till Poissons ekvation.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Man kan teckna Biot-Savarts lag som en volymintegral.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Man kan teckna Biot-Savarts lag för en ytström.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Man kan teckna Biot-Savarts lag för en strömförande tråd	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Biot-Savarts lag kan endast användas för fältberäkning om strömmen beskriver en sluten slinga.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Amperes lag kan alltid användas istället för Biot-Savarts lag vid fältberäkningar.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

d) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

	ja	?	nej
Kontinuitetsekvationen för stationär ström följer om man tar divergensen av Amperes lag.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$ om vi har tidsvarierande laddningsfördelningar.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Från $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$ kan Kirchoffs strömlag härledas.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Från $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$ kan Kirchoffs spänningslag härledas.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$ är en konsekvens av att laddningen är bevarad.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Strömtäthetsfältet har enheten A/m^2 .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

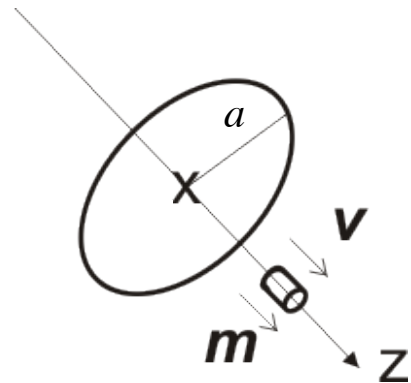
e) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

	ja	?	nej
Magnetiska monopoler används för att modellera magnetiska material.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Ferromagnetiska material har stor relativa permeabilitetstal.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Paramagnetiska material har negativa relativa permeabilitetstal.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Reluktans för en magnetfältskrets motsvarar ungefär resistans för en elektrisk krets.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
H-fältets roll i magnetostatiken påminner om E-fältets roll i elektrostatiken.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
I en permanentmagnet vill man ha ferromagnetiskt material med en bred hystereskurva.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

3

Problemlösningsdel (8 poäng)

a) En magnetisk dipol med det magnetiska dipolmomentet $\mathbf{m} = m\hat{\mathbf{z}}$ kan röra sig fritt längs z-axeln. I xy planet finns en tunn metallisk ring med radie a och centrum i origo. Ringen har resistans R och försumbar självinduktans. Den magnetiska dipolen rör sig med konstant hastighet $\mathbf{v} = v\hat{\mathbf{z}}$ längs positiva z-axeln. Vad blir den inducerade strömmen $I(t)$ i ringen till belopp och riktning om dipolen vid tiden $t = 0$ passerar origo, O.



Förståelsedel (4 poäng)

b) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

	ja	?	nej
För att fullständigt beskriva den grundläggande fysiken i uppgiften ovan räcker två av Maxwells postulat.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
För att fullständigt beskriva den grundläggande fysiken i uppgiften ovan behövs alla fyra Maxwells postulat.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Den grundläggande fysiken i uppgiften ovan bygger endast på att rotationen av H-fältet är den fria strömtätheten plus tidsderivatan av förskjutningsfältet.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Den grundläggande fysiken i uppgiften ovan bygger endast på att B-fältet är konservativt.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Den grundläggande fysiken i uppgiften ovan bygger endast på att rotationen av E-fältet är lika med minus tidsderivatan av B-fältet.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Den grundläggande fysiken i uppgiften ovan bygger endast på att E-fältet är källfritt.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

c) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

	ja	?	nej
Amperes lag modifieras när man går från magnetostatik till elektromagnetism.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Faradays induktionslag modifieras när man går från magnetostatik till elektromagnetism.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Gauss lag modifieras när man går från elektrostatik till elektromagnetism.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Lenz lag är ett av Maxwells postulat.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Lenz lag säger att en inducerad spänning är sådan att den motverkar förändring i det externt pålagda magnetfältet.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Egeninduktansen förstärker flödesändringar i kretsen.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

d) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

	ja	?	nej
I elektromagnetismen är E-fältets tangentialkomponent kontinuerlig i gränsen mellan två material med olika permittivitet.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
I elektromagnetismen är E-fältets normalkomponent kontinuerlig i gränsen mellan två material med olika permittivitet.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
I elektromagnetismen är B-fältets tangentialkomponent kontinuerlig i gränsen mellan två material med olika permeabilitet.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
I elektromagnetismen är B-fältets normalkomponent kontinuerlig i gränsen mellan två material med olika permeabilitet.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Randvillkoret för B-fältets tangentialkomponent förändras då man går från statik till tidsvarierande fält.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Randvillkoret för E-fältets tangentialkomponent förändras då man går från statik till tidsvarierande fält.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

e) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

	ja	?	nej
Den retarderade potentialen uppkommer som en lösning till vågekvationen.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Den retarderade potentialen beskriver hur ljushastigheten avtar med avståndet från källan.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Vågekvationen för vektorpotentialen \mathbf{A} kan härledas från Maxwells ekvationer.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
I elektromagnetismen väljer man oftast $\nabla \cdot \mathbf{A}$ till samma som i magnetostatiken.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Man får välja $\nabla \cdot \mathbf{A}$ som man vill.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Den magnetiska vektorpotentialen relateras till magnetfältet som $\nabla \cdot \mathbf{B} = \mathbf{A}$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

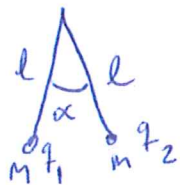
Problemlösningsdel (8 poäng)

a) En antenn strålar med intensitetsfördelningen (given i sfäriska koordinater) $P = P_0 \cos^4(\theta) \sin^2(\phi)$ för $0 \leq \theta \leq \pi/2$ och $0 \leq \phi \leq 2\pi$, dvs i den övre halvrymden. I den undre halvrymden, dvs för $\pi/2 \leq \theta \leq \pi$ och $0 \leq \phi \leq 2\pi$ utstrålas ingen effekt, dvs $P = 0$. Beräkna antennförstärkning och direktivitet.

Förståelsedel (4 poäng)

b) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?	ja	?	nej
För att fullständigt beskriva den grundläggande fysiken i uppgiften ovan räcker två av Maxwells postulat.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
För att fullständigt beskriva den grundläggande fysiken i uppgiften ovan behövs alla fyra Maxwells postulat.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Den grundläggande fysiken i uppgiften ovan bygger endast på att rotationen av H-fältet är den fria strömtätheten plus tidsderivatan av förskjutningsfältet.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Den grundläggande fysiken i uppgiften ovan bygger endast på att E-fältet är rotationsfritt.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Den grundläggande fysiken i uppgiften ovan bygger endast på att rotationen av E-fältet är lika med minus tidsderivatan av B-fältet.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Den grundläggande fysiken i uppgiften ovan bygger endast på att B-fältet är källfritt.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
c) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?	ja	?	nej
En kvartsvågsdipol har ett isotropt strålningsdiagram, dvs den strålar lika mycket effekt i alla riktningar.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
En bra sändarantenn bör ha så hög strålningsresistans som möjligt.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Antennen i en GPS mottagare bör ha så låg direktivitet som möjligt.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
En TV-antenn, av den typ som man brukar se på hustak för mottagning av marksänd TV, är ett exempel på en antenn med hög direktivitet.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Man kan använda många halvvågspoler monterade bredvid varandra för att öka direktiviteten hos sin antennenordning jämfört med om man bara använder en enda halvvågspol.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Reciprocitet för en antenn betyder att den har samma egenskaper vid sändning som vid mottagning.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
d) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?	ja	?	nej
En monokromatisk våg innehåller flera frekvenskomponenter.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
För en god ledare är $\sigma/\omega\epsilon \ll 1$.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
I en god ledare är $\alpha \approx \beta$.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
För en god isolator är vågimpedansen $Z \approx \sqrt{j\omega\mu/\sigma}$.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
För höga frekvenser är inträngningsdjupet större än för låga frekvenser.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
En mycket god ledare har ett stort värde på σ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
e) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?	ja	?	nej
Vid snett infall mot en gränssyta skiljer sig uttrycken på reflektionskoefficienten för vinkelrät polarisering jämfört med parallell polarisering mot infallsplanet.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Snells lag kan härledas genom att studera randvillkoren i gränsen mellan olika material.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Snells lag gäller endast i gränssytor där permeabiliteten är samma på båda sidorna, dvs $\mu_1 = \mu_2$.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
En optisk fiber bygger på totalreflektion.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Totalreflektion sker vid Brewstervinkeln.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Totalreflektion är möjlig då ljusstrålen går från ett optiskt tätare till ett optiskt tunnare medium.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

1 Kraften mellan sfärerna balanseras av tyngdkraften

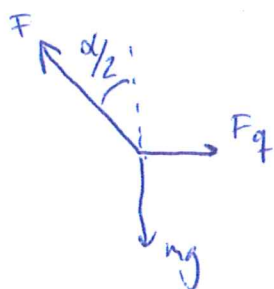


Kraft mellan laddningarna

$$F_q = \frac{q_1 q_2}{4\pi \epsilon_0 x^2}$$

(där x är avståndet mellan laddningarna)

Krafter:



Vid jämvikt:

$$mg \tan \frac{\alpha}{2} = \frac{q_1 q_2}{4\pi \epsilon_0 (2l \sin \frac{\alpha}{2})^2}$$

$$mg \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{q_1 q_2}{16\pi \epsilon_0 l^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}} \Rightarrow \frac{\sin^3 \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{q_1 q_2}{16\pi \epsilon_0 l^2}$$

Antag $m=2\text{kg}$ $l=2\text{m}$ $q_1=2\text{C}$ $q_2=2\text{mC}$

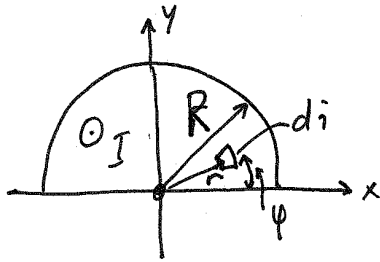
Med små vinklar approximation: $\sin^3 \frac{\alpha}{2} \approx \left(\frac{\alpha}{2}\right)^3$

$$\cos \frac{\alpha}{2} \approx 1$$

$$\left(\frac{\alpha}{2}\right)^3 = \frac{q_1 q_2}{16mg\pi \epsilon_0 l^2} \Rightarrow \alpha = \sqrt[3]{\frac{q_1 q_2}{2mg\pi \epsilon_0 l^2}} = 0,097 \text{ radianer} \approx 5,6^\circ$$

(Således är antagandet om små vinklar ok)

②



I stänger flyter strömmen I
i riktning ut ur papperet.

Om vi antar homogent fördelad strömstäthet kan den
beräknas till $J = \frac{I}{\frac{1}{2}\pi R^2}$

Vi kan dela upp strömmen i små element di enligt

$$di = J dr r d\varphi$$

Varje litet di ger ett magnetfältbidrag enligt Amperes lag:

$$|dB| = \frac{\mu_0 di}{2\pi r}$$

Således kan vi skriva $dB_x = |dB| \sin \varphi$, $dB_y = |dB| (-\cos \varphi)$

Integrera för att få fram fältet i origo.

$$B_x = \int_{r=0}^R \int_{\varphi=0}^{\pi} dB_x = \int_{r=0}^R \int_0^{\pi} \frac{\mu_0}{2\pi r} \frac{2I}{\pi R^2} dr r d\varphi \sin \varphi$$

$$= \frac{\mu_0 I}{\pi^2 R^2} R \underbrace{\int_0^{\pi} \sin \varphi d\varphi}_2 = 2 \frac{\mu_0 I}{\pi^2 R}$$

$$B_y = \int_{r=0}^R \int_{\varphi=0}^{\pi} dB_y = \frac{\mu_0 I}{\pi^2 R} \underbrace{\int_0^{\pi} -\cos \varphi d\varphi}_{=0} = 0 \quad (\text{kan även inses med symmetriargument})$$

3

Vektorpotentialen från en magnetisk dipol.

$$A(\mathbf{R}_2) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{R}_{12}}{R_{12}^3}$$

Källpunkt $\mathbf{R}_1 = z\hat{z}$

Fältpunkt $\mathbf{R}_2 = a\hat{r}$ (På ringen)

$$\text{Då fås } A(\mathbf{R}_2) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\hat{z} \times (a\hat{r} - z\hat{z})}{(a^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{ma\mu_0}{4\pi} \frac{\hat{\phi}}{(a^2 + z^2)^{3/2}}$$

Flödet genom ringen blir

$$\Phi = \oint_{\mathcal{L}} A(\mathbf{R}_2) \cdot d\mathbf{l} = \int_0^{2\pi} A(\mathbf{R}_2) \cdot a\hat{\phi} d\phi = \frac{ma^2\mu_0}{2(a^2 + z^2)^{3/2}}$$

Med $z = z(t) = vt$

Inducerad spänning i slingan $V = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt} \left(\frac{ma^2\mu_0}{2(a^2 + z^2(t))^{3/2}} \right)$

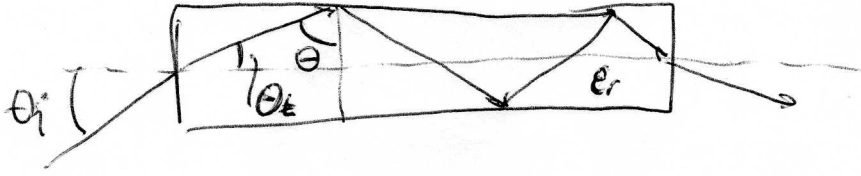
$$= \frac{3z(t)vm a^2\mu_0}{2(a^2 + z^2(t))^{5/2}}$$

Strömmen i ringen fås nu som

$$I(t) = \frac{V}{R} = \frac{3v^2 t m a^2 \mu_0}{2R(a^2 + v^2 t^2)^{5/2}}$$

Riktningen är $+\hat{\phi}$ för $t > 0$ och $-\hat{\phi}$ för $t < 0$
Fås tex oha Lenz's lag.

4



Vi kaner att $\theta = 90^\circ - \theta_t \geq \theta_c \quad \forall \theta_i$

Detta ger

$$\cos \theta_t = \sin \theta \geq \sin \theta_c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_r}} \quad \text{eller} \quad \cos^2 \theta_t \geq \frac{1}{\epsilon_r}$$

Men vi kan också uttrycka

$$\cos^2 \theta_t = 1 - \sin^2 \theta_t = \underbrace{\{ \text{Snells lag} \}} = 1 - \frac{1}{\epsilon_r} \sin^2 \theta_i$$

Således kan vi göra följande omskrivning

$$1 - \frac{1}{\epsilon_r} \sin^2 \theta_i \geq \frac{1}{\epsilon_r} \Rightarrow \epsilon_r \geq 1 + \sin^2 \theta_i$$

För att olikheten ska gälla för alla θ_i måste vi alltså ha $\epsilon_r > 2$

$$\text{Svar: } \epsilon_r > 2$$

5. Utstrålad effekt:

$$P_{\text{utstrålad}} = \iint R^2 \cdot P(R, \phi, \theta) \cdot d\Omega \quad d\Omega = \sin\theta \, d\theta \, d\phi$$

$$= \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{\phi=0}^{2\pi} R^2 \cdot P_0 \cos^4\theta \sin^2\phi \sin\theta \, d\theta \, d\phi =$$

$$= R^2 P_0 \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\theta \sin\theta \, d\theta \int_{\phi=0}^{2\pi} \sin^2\phi \, d\phi$$

$u = \cos\theta$
$du = -\sin\theta \, d\theta$
$\theta \mid 0 \mid \frac{\pi}{2}$
$u \mid 1 \mid 0$

$$= R^2 P_0 \int_0^1 u^4 \, du \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos 2\phi}{2} \, d\phi =$$

$$= R^2 P_0 \cdot \left[\frac{u^5}{5} \right]_0^1 \cdot \left(\frac{2\pi}{2} - \int_0^{2\pi} \frac{\cos 2\phi}{2} \, d\phi \right) =$$

$$= \underline{\underline{\frac{\pi R^2}{5} P_0}}$$

Antennförstärkning:

$$G_D(\theta, \phi) = \frac{P(R, \theta, \phi) \cdot 4\pi R^2}{P_{\text{utstrålad}}} = \frac{P_0 \cos^4\theta \sin^2\phi \cdot 4\pi R^2}{\frac{\pi R^2}{5} P_0} =$$

$$= 20 \cos^4\theta \sin^2\phi$$

Direktivitet:

$$D = G_D \text{ max} = 20 \quad \left(\theta = 0, \phi = \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2} \right)$$