

Tentamen i Elektromagnetisk fältteori för F2.

EEF031 2013-04-05 kl. 14.00-18.00

Tillåtna hjälpmedel:	BETA, Physics Handbook, Formelsamling i Elektromagnetisk fältteori, Valfri kalkylator men inga egna anteckningar utöver egna formler på sista bladet i formelsamlingen i Elektromagnetisk fältteori
Förfrågningar:	Andreas Fhager, 076-125 7012, 031-772 1723
Lösningar:	anslås på kursens hemsida
Resultatet:	anslås via LADOK
Granskning:	Sker på plats och tid enligt resultatlistan
Kom ihåg	Poängavdrag görs för otydliga figurer, utelämnade referensriktningar, dimensionsfel och utelämnade motiveringar.

OBS!

Resultat från **årets** dugga får tillgodoräknas på elektrostatik- (tal 1) respektive magnetostatiktalet (tal 2). Bästa resultatet från duggan eller tentan räknas. Poäng på teoridelen respektive problemlösningsdelen räknas separat. Bonuspoäng från **årets** omgång av webb-frågorna får också tillgodoräknas till tentaresultatet.

Svaren på förståelsedelen skall ges på tesen som skall lämnas in.

Förståelsefrågorna besvaras genom att markera en av rutorna efter varje påstående till höger. En och endast en ruta på varje rad skall markeras.

De tre svarsalternativen (från vänster till höger är) 'Ja', 'Vet ej' och 'Nej'.

Riktigt svar ger +0,2 poäng oriktigt svar ger -0,2p. 'Vet ej' är neutralt och ger noll poäng. Förståelseuppgifterna ger maximalt 1 poäng och lägst -1 poäng och man kan därför få 1poäng även med ett 'Vet ej' svar.

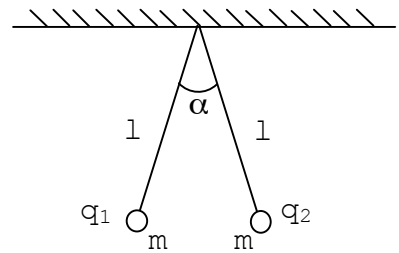
Anonym kod:

(Var vänlig ange den email-adress som används för inlämningsuppgifterna bland den dolda personinformationen på omslaget)

1 (Elektrostatik)

Problemlösningsdel (8 poäng)

a) Två kulor med samma massa, m , laddningar q_1 och q_2 är upphängda med hjälp av snören av längden l i en gemensam punkt. Beräkna vinkelseparationen mellan de två snörena pga. att kulorna repellerar varandra. Beräkna ett numeriskt värde på vinkeln α om $l = 1$ m, $m = 1$ kg, $q_1 = 1$ μC och $q_2 = 0.5$ μC .



Förståelsedel (4 poäng)

b) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

	ja	?	nej
För att fullständigt beskriva den grundläggande fysiken i uppgiften ovan räcker två av Maxwells postulat.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
För att fullständigt beskriva den grundläggande fysiken i uppgiften ovan behövs alla fyra Maxwells postulat.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Den grundläggande fysiken i problemlösningsdelen ovan bygger bland annat på Gauss lag.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Den grundläggande fysiken i problemlösningsdelen ovan bygger bland annat på att B-fältet är källfritt.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Den grundläggande fysiken i problemlösningsdelen ovan bygger bland annat på att E-fältet är källfritt.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Om man dubblar laddningen q_2 i problemet ovan så dubblas vinkeln α .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

c) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

	ja	?	nej
En elektrisk potential kan definieras tack vare att E-fältet är divergensfritt.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Den elektriska potentialen har enheten V/m^2 .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Den elektriska potentialen kan definieras som $E = -\nabla V$.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Den elektriska potentialen kan definieras som $E = \nabla V$.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Om vi använder $E = -\nabla V$ som definition av potentialen betyder det att om man rör sig i riktning mot E-fältslinjerna så kommer potentialen att minska.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Den elektrostatiska potentialen är en skalär storhet.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

d) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

	ja	?	nej
P-fältet spelar ungefär samma roll i elektrostatiken som H-fältet i magnetostatiken.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
D-fältet spelar ungefär samma roll i elektrostatiken som B-fältet i magnetostatiken.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Potentialen V spelar ungefär samma roll i elektrostatiken som A-fältet i magnetostatiken.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Källan till förskjutningsfältet, \mathbf{D} , är polarisationsladdningarna.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Dielektriska egenskaper modelleras med elektriska dipoler.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Summan av alla polarisationsladdningar och ytpolarisationsladdningar i ett oladdat objekt kan vara skild från noll.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

e) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

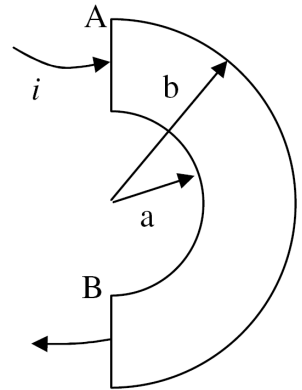
	ja	?	nej
Permeabilitet och konduktivitet är olika namn på samma fysikaliska egenskap.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Sambandet $D = \epsilon E$ mellan E- och D-fältet kan härledas utifrån postulaten för elektrostatiken.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Polarisationsfältet \mathbf{P} är fältet från bundna laddningar i ett material.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Om permeabiliteten för ett dielektriskt material är en konstant skalär oberoende av fältstyrkan betyder det att materialet är homogent, isotropt och linjärt.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Om permeabiliteten för ett dielektriskt material är beroende av fältstyrkan betyder det att materialet är anisotropt.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
I härledningen av entydighetssatsen för Poissons ekvation antar man att först att det finns flera lösningar med samma randvillkor.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

2 (Magnetostatik)

Problemlösningsdel (8 poäng)

Ett tunt bleck med utseende enligt figuren har tjockleken $d = 0,2 \text{ mm}$ och ledningsförmågan $\sigma = 10^5 \text{ S/m}$. Vid A respektive B är elektroder anslutna.

- Ställ upp och lös Laplace ekvation för detta bleck. Antag ett spänningsfall U mellan elektroderna och att elektroderna A och B är gjorda av perfekt ledande metall. (3 poäng)
- Beräkna strömmen i som flyter genom blecket. (3 poäng)
- Beräkna resistansen mellan elektrod A och B. (1 poäng)
- Är den beräknade resistansen ett exakt värde eller en övre eller undre uppskattning av den verkliga resistansen? Motivation krävs. (1 poäng)



Förståelsedel (4 poäng)

e) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

För att fullständigt beskriva den grundläggande fysiken i uppgiften ovan behövs endast ett av Maxwells postulat.

ja ? nej

För att fullständigt beskriva den grundläggande fysiken i uppgiften ovan behövs endast två av Maxwells postulat.

Den grundläggande fysiken i problemlösningsdelen ovan bygger **endast** på Gauss lag.

Den grundläggande fysiken i problemlösningsdelen ovan bygger **endast** på att B-fältet är källfritt.

Den grundläggande fysiken i problemlösningsdelen ovan bygger **endast** på att E-fältet är källfritt.

Den grundläggande fysiken i problemlösningsdelen ovan bygger **endast** på att rotationen av B-fältet är lika med den fria strömtätheten gånger permeabiliteten.

f) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

ja ? nej

Vid härledningen av Biot-Savarts lag kan man utgå från den magnetiska vektorpotentialen och dess allmänna lösning till Poissons ekvation.

Man kan teckna Biot-Savarts lag som en volymsintegral.

Man kan teckna Biot-Savarts lag för en ytström.

Man kan teckna Biot-Savarts lag för en strömförande tråd

Biot-Savarts lag kan endast användas för fältberäkning om strömmen beskriver en sluten slinga.

Amperes lag kan alltid användas istället för Biot-Savarts lag vid fältberäkningar.

g) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

ja ? nej

Kontinuitetsekvationen för stationär ström följer om man tar divergensen av Amperes lag.

$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$ om vi har tidsvarierande laddningsfördelningar.

Från $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$ kan Kirchoffs strömlag härledas.

Från $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$ kan Kirchoffs spänningslag härledas.

$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$ är en konsekvens av att laddningen är bevarad.

Strömtäthetsfältet har enheten A/m^3 .

h) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

ja ? nej

Ett diamagnetiskt material motverkar ett pålagt externt fält.

Ett ferromagnetiskt material förstärker ett pålagt externt fält.

Permanentmagneter har ett magnetiseringsfält \mathbf{M} som är skilt från noll.

Ju kraftigare magnetisering som önskas i en permanentmagnet desto smalare bör hystereskurvan vara.

I järnkärnan i en transformator är det önskvärt med en smal hystereskurva för att minimera förlusterna.

En hystereskurva är ett exempel på ett icke-linjärt samband mellan H- och B-fälten.

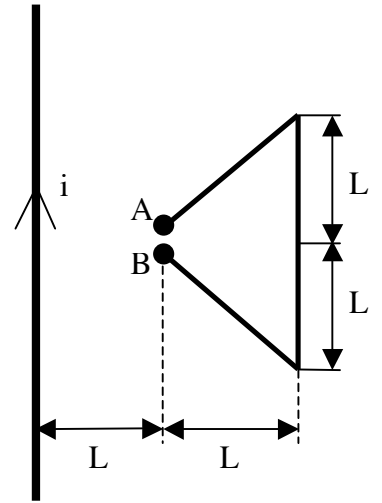
3

Problemlösningsdel (8 poäng)

I den långa raka ledaren går en i tiden avtagande ström $i(t) = I_0 e^{-\alpha t}$ ($\alpha > 0$) med riktning enligt figuren. Nära ledaren ligger en triangulär slinga, se figuren.

a) I slingan finns en liten öppning mellan punkterna A-B. Beräkna den inducerade spänningen mellan dessa punkter. Ange även spänningens polaritet. (6 poäng)

b) Om vi kopplar in en resistor med resistansen R mellan A-B kommer en ström att gå i slingan. I vilken riktning går strömmen? Hur stor är den momentana effektutvecklingen i resistansen? (2 poäng)



Förståelsedel (4 poäng)

c) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

	ja	?	nej
För att fullständigt beskriva den grundläggande fysiken i uppgiften ovan räcker två av Maxwells postulat.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
För att fullständigt beskriva den grundläggande fysiken i uppgiften ovan behövs alla fyra Maxwells postulat.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Den grundläggande fysiken i uppgiften ovan bygger bland annat på att rotationen av H-fältet är den fria strömtätheten plus tidsderivatan av förskjutningsfältet.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Den grundläggande fysiken i uppgiften ovan bygger bland annat på att B-fältet är konservativt.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Den grundläggande fysiken i uppgiften ovan bygger bland annat på att rotationen av E-fältet är lika med minus tidsderivatan av B-fältet.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Den grundläggande fysiken i uppgiften ovan bygger bland annat på att B-fältet är källfritt.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

d) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

	ja	?	nej
I elektromagnetismen är E-fältets tangentialkomponent alltid kontinuerlig i gränsen mellan två material med olika permittivitet.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
I elektromagnetismen är E-fältets normalkomponent alltid kontinuerlig i gränsen mellan två material med olika permittivitet.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
I elektromagnetismen är H-fältets tangentialkomponent alltid kontinuerlig i gränsen mellan två material med olika permeabilitet.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
I elektromagnetismen är B-fältets normalkomponent alltid kontinuerlig i gränsen mellan två material med olika permeabilitet.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
I elektromagnetismen är J-fältets tangentialkomponent alltid kontinuerlig i gränsen mellan två material med olika permeabilitet.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
I elektromagnetismen är J-fältets normalkomponent alltid kontinuerlig i gränsen mellan två material med olika permeabilitet.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

e) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

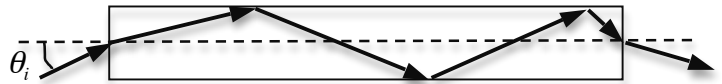
	ja	?	nej
Man kan välja divergensen av den magnetiska vektorpotentialen fritt i elektromagnetismen.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Man väljer ofta divergensen av den magnetiska vektorpotentialen till samma som i statiken för att förenkla beräkningarna.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Vågekvationen för vektorpotentialen \mathbf{A} kan härledas från Maxwells ekvationer.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Den retarderade potentialen är lösningen till vågekvationen för vektorpotentialen \mathbf{A} .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Den magnetiska vektorpotentialen relateras till magnetfältet som $\nabla \cdot \mathbf{B} = \mathbf{A}$.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Den magnetiska vektorpotentialen relateras till magnetfältet som $\nabla \cdot \mathbf{A} = \mathbf{B}$.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

f) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

	ja	?	nej
Retarderade potentialer kan användas för att beskriva hur fältet från en punktladdning som rör sig breder ut sig i rummet.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Retarderade potentialer är en konsekvens av att inget kan färdas snabbare än ljuset.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Retarderade potentialer är lösningar till Poissons ekvation.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Den retarderade potentialen har formen $A(t-R/c)$.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Det är praktiskt att använda komplex notation då man beskriver retarderade potentialer.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Den retarderade potentialen kan endast uttryckas med hjälp av den magnetiska vektorpotentialen, \mathbf{A} .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Problemlösningsdel (8 poäng)

a) Figuren visar en optisk fiber och en illustration av hur en optisk stråle propagerar genom fibern.



Bestäm minsta möjliga ϵ_r hos fibern som gör att

oavsett infallsvinkeln, θ_i hos en stråle som tränger in i fibern från ena änden, så innesluts strålen helt och hållet inuti fibern med hjälp av totalreflektion ända tills den tränger ut ur fibern i andra änden.

Förståelsedel (4 poäng)

b) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

Elektromagnetisk fältteori tillhör den klassiska fysiken.

ja ? nej

Utöver Maxwells fyra postulat är kontinuitetsekvationen nödvändig för en fullständig beskrivning av den elektromagnetiska teorin.

Den grundläggande fysiken i uppgiften ovan bygger **endast** på att rotationen av H-fältet är den fria strömtätheten plus tidsderivatan av förskjutningsfältet.

Den grundläggande fysiken i uppgiften ovan bygger **endast** på att E-fältet är källfritt.

Den grundläggande fysiken i uppgiften ovan bygger **endast** på att rotationen av E-fältet är lika med minus tidsderivatan av B-fältet.

Den grundläggande fysiken i uppgiften ovan bygger **endast** på att B-fältet är källfritt.

c) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

För att Snells lag ska gälla måste permittiviteten vara samma på båda sidor om gränssytan.

ja ? nej

Snells reflektionslag säger att infallande och reflekterande fält har samma vinkel mot ytnormalen.

Snells brytningslag relaterar infallsvinkel till vinkeln på det transmitterade fältet.

Snells brytningslag härleds genom att betrakta randvillkoren för normalkomponenterna av E- och H-fälten i gränssytan.

Snells lag säger att när infallsvinkeln är större än kritiska vinkeln uppstår totalreflektion.

Totalreflektion uppstår då fältet går från ett optiskt tätare till ett optiskt tunnare medium.

d) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

Vågimpedansen hos luft är $Z=733\Omega$.

ja ? nej

I en god ledare ligger H-fältet i fas med E-fältet.

Absolutbeloppet av vågimpedansen för en *icke-ferromagnetisk* god ledare är lägre än för luft.

Vågimpedansen kan vara ett komplext tal.

Vågimpedansen relaterar E-fältet till J-fältet.

Vågimpedansen kan vara *frekvensberoende*.

e) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

En evanescent våg uppfyller vågekvationen.

ja ? nej

Totalreflektion ger upphov till evanescenta vågor.

En cirkulärpolariserad plan våg träffar en plan gränssyta till ett förlustfritt dielektrikum under Brewstervinkeln. Reflektionen blir då linjärpolariserad.

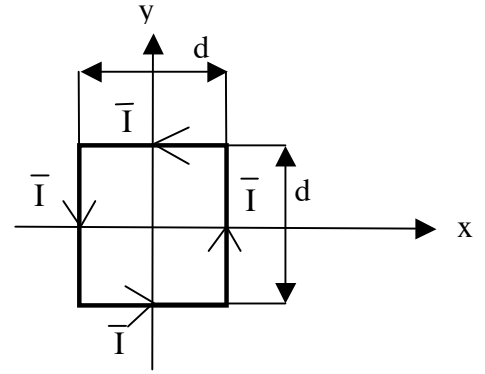
En cirkulärpolariserad plan våg träffar en plan gränssyta till ett förlustfritt dielektrikum under Brewstervinkeln. Reflektionen blir då cirkulärpolariserad.

En cirkulärpolariserad plan våg träffar en plan gränssyta till ett förlustfritt dielektrikum under Brewstervinkeln. Reflektionen blir då elliptiskt polariserad.

Brewstervinkeln definieras både för vågor med polarisering parallellt och vinkelrätt mot infallsplanet.

Problemlösningsdel (8 poäng)

- a) Betrakta en kvadratisk slinga som leder den komplexa strömmen \bar{I} . Antag att slingan är liten i förhållande till våglängden så att vi kan anta att \bar{I} i varje ögonblick är konstant till amplitud och fas längs antennen. Bestäm det elektriska fältet på avståndet $R \gg d$ genom att betrakta varje sida i den kvadratiske slingan som Hertz-dipoler. Ta fram ett uttryck på fältet längs x-axeln. Förenkla uttrycken så långt det är möjligt under fjärrfältsapproximationen.



Förståelsedel (4 poäng)

- b) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

	ja	?	nej
För att fullständigt beskriva den grundläggande fysiken i uppgiften ovan räcker två av Maxwells postulat.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
För att fullständigt beskriva den grundläggande fysiken i uppgiften ovan behövs alla fyra Maxwells postulat.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Den grundläggande fysiken i uppgiften ovan bygger bland annat på att rotationen av H-fältet är den fria strömtätheten plus tidsderivatan av förskjutningsfältet.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Den grundläggande fysiken i uppgiften ovan bygger bland annat på att E-fältet är källfritt.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Den grundläggande fysiken i uppgiften ovan bygger bland annat på att rotationen av E-fältet är lika med minus tidsderivatan av B-fältet.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Den grundläggande fysiken i uppgiften ovan bygger bland annat på att B-fältet är källfritt.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

- c) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

	ja	?	nej
Poyntings teorem uttrycker energikonservering.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Poyntingvektorn kan vara tidsberoende.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Poyntingvektorn kan definieras med hjälp av komplexa B- och E-fält.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Poyntingvektorn har enheten W/m.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Definitionen av Poyntingvektorn kommer ur härledningen av energikonserveringsrelationen "Poyntings teorem".	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Poyntingvektorn kan definieras som tidsmedelvärde eller som momentanvärde.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

- d) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

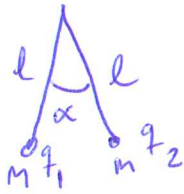
	ja	?	nej
En Hertzdipol är mycket kortare än våglängden.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Strömmen kan vid varje tidpunkt antas vara konstant längs en Hertzdipol.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Strömmen i en Hertzdipol kan antas vara konstant i tiden, dvs den är en likström.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Strålningsresistansen ökar med längden i kvadrat för en Hertzdipol.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
En kvartsvågsantenn är ekvivalent med en halvvågsantenn över ett ledande plan.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Strömmen antas vara noll i änden av en kvartsvågsantenn.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

- e) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

	ja	?	nej
En monokromatisk våg innehåller flera frekvenskomponenter.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
För en god ledare är $\sigma/\omega\epsilon \gg 1$.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
I en god ledare är $\alpha \gg \beta$.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
För en metall är vågimpedansen $Z \approx \sqrt{j\omega\mu/\sigma}$.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Inträngningsdjupet är mindre för höga frekvenser än för låga frekvenser.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Normalt gäller för dielektriska material med små förluster att $\alpha \approx \beta$.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Tenta 2013-04-05

1 Kraften mellan sfärena balanseras av tyngdkraften

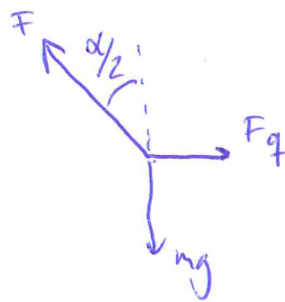


Kraft mellan laddningarna

$$F_q = \frac{q_1 q_2}{4\pi \epsilon_0 x^2}$$

(där x är avståndet mellan laddningarna)

Krafter:



Vid jämvikt:

$$mg \tan \frac{\alpha}{2} = \frac{q_1 q_2}{4\pi \epsilon_0 (2l \sin \frac{\alpha}{2})^2}$$

$$mg \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{q_1 q_2}{16\pi \epsilon_0 l^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}} \Rightarrow \frac{\sin^3 \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{q_1 q_2}{16\pi \epsilon_0 l^2}$$

Antag $m = 1\text{kg}$ $l = 1\text{m}$ $q_1 = 1\mu\text{C}$ $q_2 = 0,5\mu\text{C}$

Med små vinklar approximation: $\sin^3 \frac{\alpha}{2} \approx \left(\frac{\alpha}{2}\right)^3$

$$\cos \frac{\alpha}{2} \approx 1$$

$$\left(\frac{\alpha}{2}\right)^3 = \frac{q_1 q_2}{16mg\pi \epsilon_0 l^2} \Rightarrow \alpha = \sqrt[3]{\frac{q_1 q_2}{2mg\pi \epsilon_0 l^2}} = 0,097 \text{ radianer} \approx 5,6^\circ$$

(Således är antagandet om små vinklar ok)

2. a) På elektroderna är potentialen konstant.
Dvs den varierar inte med radren

I blekhet kan vi därför anta $\frac{\partial V}{\partial r} = 0$ $\frac{\partial V}{\partial z} = 0$

Laplace ekvation blir då

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad V(\phi) = a\phi + b$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Med randvillkor} \\ \phi_1 = -\frac{\pi}{2} \quad V(\phi_1) = -\frac{U}{2} \\ \phi_2 = \frac{\pi}{2} \quad V(\phi_2) = \frac{U}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow V(\phi) = \frac{U}{\pi} \phi$$

b) Strömstätheten $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} = -\sigma \nabla V$
$$= -\hat{\phi} \sigma \frac{\partial V}{r \partial \phi} = -\hat{\phi} \frac{\sigma U}{\pi r}$$

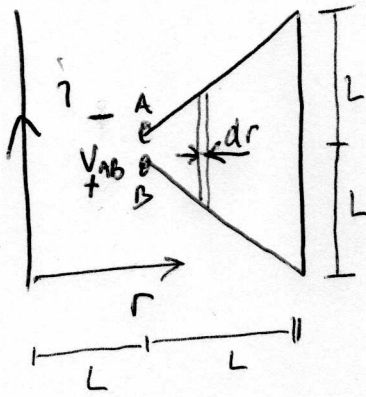
Ström: Integrera \mathbf{J} över tvärsnittet

$$I = \int_s \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} = \left\{ ds = -\hat{\phi} d\phi dr \right\} = \frac{\sigma U}{\pi} d \int_a^b \frac{dr}{r} = \frac{\sigma U d}{\pi} \ln \frac{b}{a}$$

c) Resistansen $R = \frac{U}{I} = \frac{\pi}{\sigma d \ln(b/a)}$

d) Lösningen är exakt eftersom vi löst Laplace ekvation exakt
och därmed även har exakt strömfördelning

3



B-fältet från den långa
räta ledaren ges av
Amperes lag

$$B(r) = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} \quad (\text{där } r \text{ är avståndet från ledaren})$$

Vi behöver nu beräkna det magnetiska flödet genom den triangulära slingan.

$$\Phi = \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \int_L^{2L} \frac{\mu_0 i}{2\pi r} \cdot 2(r-L) dr = \frac{\mu_0 i}{\pi} [r-L \ln r]_L^{2L} = \frac{\mu_0 i L}{\pi} (1 - \ln 2)$$

a) Inducerad spänning $V_{AB} = -\frac{d\Phi}{dt}$ med strömmen $i = I_0 e^{-\alpha t}$ fas

$$-\frac{d\Phi}{dt} = \frac{d}{dt} \left[\frac{\mu_0 I_0 e^{-\alpha t} L}{\pi} (1 - \ln 2) \right] = -\frac{\mu_0 I_0 L}{\pi} (1 - \ln 2) \alpha e^{-\alpha t}$$

Strömmen i genererar ett i tiden avtagande flöde Φ i slingan.

Lenz lag säger att inducerade spänningar vill motverka förändringar

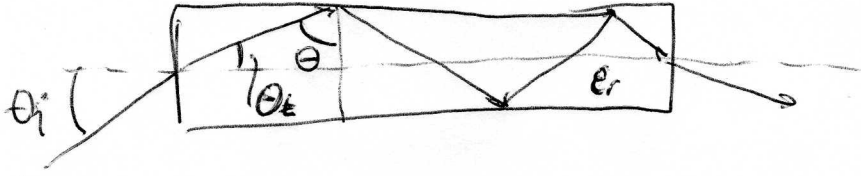
Den inducerade spänningen bör således ha polaritet så att den vill driva en ström medsols i den triangulära slingan

$$\text{Således } V_{AB} = -\frac{\mu_0 I_0 L}{\pi} (1 - \ln 2) \alpha e^{-\alpha t}$$

b) Strömmen går medsols. Effektuträkningen $P(t) = \frac{V_{AB}^2}{R}$

c) Räkningar tar ej hänsyn till egeninduktansen. Man kan ta hänsyn till denna genom att beräkna egeninduktansen L och ta med den i krets-ekvationen då man beräknar strömmen. Alternativt beräkna vilket flöde Φ_{egen} som genereras av strömmen vi använt i uppgift b. Sedan beräknar vi $\frac{d\Phi_{egen}}{dt}$ och ser hur totala inducerade spänningar ändras.

4



Vi kaner att $\theta = 90^\circ - \theta_t \geq \theta_c \quad \forall \theta_i$

Detta ger

$$\cos \theta_t = \sin \theta \geq \sin \theta_c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_r}} \quad \text{eller} \quad \cos^2 \theta_t \geq \frac{1}{\epsilon_r}$$

Men vi kan också uttrycka

$$\cos^2 \theta_t = 1 - \sin^2 \theta_t = \underbrace{\{ \text{Snells lag} \}} = 1 - \frac{1}{\epsilon_r} \sin^2 \theta_i$$

Således kan vi göra följande omskrivning

$$1 - \frac{1}{\epsilon_r} \sin^2 \theta_i \geq \frac{1}{\epsilon_r} \Rightarrow \epsilon_r \geq 1 + \sin^2 \theta_i$$

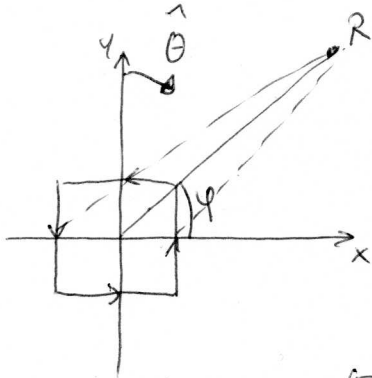
För att olikheten ska gälla för alla θ_i måste vi alltså ha $\epsilon_r > 2$

$$\text{Svar: } \epsilon_r > 2$$

5/

Fjärrfältet från en Hertzdipol: $E_{rad} = \hat{\theta} Z_0 \frac{j\omega d \bar{I}_0 \sin\theta}{4\pi r} e^{-j\beta_0 r}$

Skriv som $E_{rad} = \hat{\theta} jk \frac{\sin\theta}{r} e^{-j\beta_0 r}$ där $k = Z_0 \frac{\omega d \bar{I}_0}{4\pi c}$



Betrakta fältet från de två dipolerna parallella med y-axeln enligt figuren.

Med φ definierat enligt figuren och även $\hat{\theta}$ från figuren fås

$$E_{yII} = \hat{\theta} jk \frac{\sin(\frac{\pi}{2} - \varphi)}{r} e^{-j\beta_0(r - \frac{d}{2}\cos\varphi)} - \hat{\theta} jk \frac{\sin(\frac{\pi}{2} + \varphi)}{r} e^{-j\beta_0(r + \frac{d}{2}\cos\varphi)}$$

$\{\sin(\frac{\pi}{2} - \varphi) = \sin(\frac{\pi}{2} + \varphi) = \cos\varphi\}$ {Det är ok att approximera med r i nämnaren}

{min i exponenten behåller vi $r - \frac{d}{2}\cos\varphi$ resp $r + \frac{d}{2}\cos\varphi$ }

$$= \hat{\theta} jk \frac{\cos\varphi}{r} e^{-j\beta_0 r} (e^{j\beta_0 \frac{d}{2}\cos\varphi} - e^{-j\beta_0 \frac{d}{2}\cos\varphi}) \frac{2j}{2j} =$$

$$= \hat{\theta} -2k \frac{\cos\varphi}{r} e^{-j\beta_0 r} \underbrace{\sin(\beta_0 \frac{d}{2}\cos\varphi)}_{\approx \beta_0 \frac{d}{2}\cos\varphi \text{ eftersom slingan är liten jämfört med våglängden}} \approx -\hat{\theta} 2k \frac{\cos\varphi}{r} e^{-j\beta_0 r} \beta_0 \frac{d}{2}\cos\varphi$$

För Hertzdipolerna parallella med x-axeln fås på samma sätt

$$E_{xII} = \hat{\theta} jk \frac{\sin(\pi - \varphi)}{r} e^{-j\beta_0(r - \frac{d}{2}\sin\varphi)} - \hat{\theta} jk \frac{\sin\varphi}{r} e^{-j\beta_0(r + \frac{d}{2}\sin\varphi)}$$

$$\approx -\hat{\theta} 2k \frac{\sin\varphi}{r} e^{-j\beta_0 r} \beta_0 \frac{d}{2}\sin\varphi$$

Summera:

$$E_{total} = E_{yII} + E_{xII} = -\frac{2k}{r} e^{-j\beta_0 r} (\cos\varphi \beta_0 \frac{d}{2}\cos\varphi + \sin\varphi \beta_0 \frac{d}{2}\sin\varphi) \hat{\theta}$$

$$= -\hat{\theta} \frac{2k}{r} e^{-j\beta_0 r} (\underbrace{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi}_{=1}) \beta_0 \frac{d}{2} = -\hat{\theta} \frac{2k \beta_0 d}{r} e^{-j\beta_0 r}$$

$$= -\hat{\theta} \frac{Z_0 \beta_0^2 d^2 \bar{I}_0}{4\pi r} e^{-j\beta_0 r} = -\hat{\theta} \frac{\beta_0 \omega \mu_0 d^2 \bar{I}_0}{4\pi r} e^{-j\beta_0 r}$$

b) Med $m = \bar{I}_0 d^2$ är uttrycken identiska. På stort avstånd är alltså fältet oberoende av slingans form, bara arean spelar roll.