Tentamen i Elektromagnetisk fältteori för F2.
EEF031 2010-08-27 kl. 8.30-12.30

Tillåtna hjälpmedel:	BETA, Physics Handbook, Formelsamling i Elektromagnetisk fältteori, Valfri kalkylator men inga egna anteckningar utöver egna formler på sista bladet i formelsamlingen i Elektromagnetisk fältteori
Förfrågningar:	Xuezhi Zeng, 076-274 31 70, 772 1723
Lösningar:	anslås på kursens hemsida
Resultatet:	anslås på kursens hemsida
Granskning:	Sker på plats och tid enligt resultatlistan
Kom ihåg	Poängavdrag görs för otydliga figurer, utelämnade referensriktningar, dimensionsfel och utelämnade motiveringar.

OBS!

Resultat från **årets** dugga får tillgodoräknas på elektrostatik- (tal 1) respektive magnetostatiktalet (tal 2). Bästa resultatet från duggan eller tentan räknas. Poäng på teoridelen respektive problemlösningsdelen räknas separat. Bonuspoäng från **årets** omgång av webb-frågorna får också tillgodoräknas till tentaresultatet.

Svaren på förståelsedelen skall ges på tesen som skall lämnas in.

Förståelsefrågorna besvaras genom att markera en av rutorna efter varje påstående till höger. En och endast en ruta på varje rad skall markeras.
De tre svarsalternativen (från vänster till höger är) Ja, Vet ej och Nej.
Riktigt svar ger +0,2 poäng oriktigt svar ger -0,2p. Vet ej är neutralt och ger noll poäng. Förståelseuppgifterna ger maximalt 1 poäng och lägst -1 poäng och man kan därför få 1poäng även med ett vet ej svar.

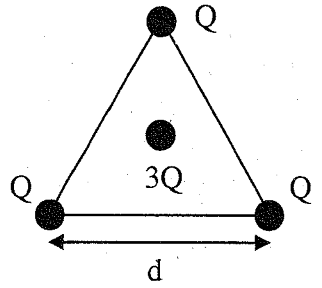
Anonym kod:

(Var vänlig ange den email-adress som används för inlämningsuppgifterna bland den dolda personinformationen på omslaget)

1 (Elektrostatik)

Problemlösningsdel (8 poäng)

Tre små likadana metallkulor ligger symmetriskt i ett plan så att de utgör "hörnen" i en liksidig triangel med sidlängden *d*. De befinner sig på ett avstånd från varandra som är stort i jämförelse med kulornas radier. Centralt belägen i triangeln befinner sig en lika stor metallkula. Den centrala kulan har laddningen $3Q$ och de tre övriga kulorna har vardera laddningen Q. Hur mycket arbete uträttas för att föra samman kulorna från sina ursprungslägen på mycket stort avstånd från varandra?



Förståelsedel (4 poäng)

c) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?	**ja**	**?**	**nej**
Den grundläggande fysiken i problemlösningsdelen ovan bygger på exakt ett av Maxwells postulat.	❑	❑	❑
Den grundläggande fysiken i problemlösningsdelen ovan bygger på exakt två av Maxwells postulat.	❑	❑	❑
Den grundläggande fysiken i problemlösningsdelen ovan bygger bl.a. på Gauss lag.	❑	❑	❑
Den grundläggande fysiken i problemlösningsdelen ovan bygger bl.a. på att B-fältet är källfritt.	❑	❑	❑
Den grundläggande fysiken i problemlösningsdelen ovan bygger bl.a. på att källan till D-fältet är den fria laddningstätheten.	❑	❑	❑
Den grundläggande fysiken i problemlösningsdelen ovan bygger bl.a. på att rotationen av H-fältet är den fria strömtätheten.	❑	❑	❑

d) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?	**ja**	**?**	**nej**
Coulombs lag om kraften mellan två punktladdningar härleds från $\nabla \cdot \mathbf{E} = {}^{\rho}/_{\varepsilon_0}$.	❑	❑	❑
Poissons ekvation är ett av postulaten i elektrostatiken.	❑	❑	❑
E-fältslinjerna går från de negativa laddningarna till de positiva laddningarna.	❑	❑	❑
Vinkeln med vilken E-fältslinjerna skär ekvipotentialytorna beror på fältstyrkan.	❑	❑	❑
I elektrostatiken existerar det E-fältslinjer som beskriver slutna cirkulära banor.	❑	❑	❑
Elektrostatiken är en mikroskopisk modell.	❑	❑	❑

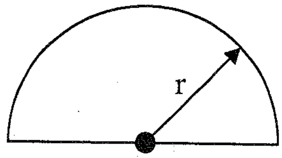
e) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?	**ja**	**?**	**nej**
Om man definierar den elektrostatiska potentialen är som $E = -\nabla V$ betyder det att den elektriska lägesenergin hos en positiv testladdning minskar då man tillför arbete för att flytta laddningen från en punkt till en annan.	❑	❑	❑
En ekvipotentialyta definieras som den yta där E-fältet har konstant riktning.	❑	❑	❑
Dielektriska egenskaper modelleras med elektriska monopoler.	❑	❑	❑
Resistans i ett material modelleras med hjälp av elektriska dipoler.	❑	❑	❑
I elektrostatiken modelleras perfekt ledande metaller med konduktiviteten $\sigma = \infty$.	❑	❑	❑
I elektrostatiken är alla tangentiella fältkomponenter lika med noll på ytan av en perfekt ledande metall.	❑	❑	❑

f) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?	**ja**	**?**	**nej**
P-fältet spelar ungefär samma roll i elektrostatiken som M-fältet i magnetostatiken.	❑	❑	❑
D-fältet spelar ungefär samma roll i elektrostatiken som H-fältet i magnetostatiken.	❑	❑	❑
Potentialen V spelar ungefär samma roll i elektrostatiken som A-fältet i magnetostatiken.	❑	❑	❑
Gauss lag i elektrostatiken motsvaras ungefär av Amperes lag i magnetostatiken.	❑	❑	❑
Randvillkoret för det elektrostatiska fältets tangentialkomponent härleds från att E-fältet är källfritt.	❑	❑	❑
Randvillkoret för det elektrostatiska fältets normalkomponent härleds från Gauss lag.	❑	❑	❑

2 (Magnetostatik)

Problemlösningsdel (8 poäng)

a) En likström I flyter i en lång metallstång med radie r som klyvts på längden och har ett tvärsnitt som en halvcirkel enligt figuren. Antag att strömmen är jämt fördelad över hela tvärsnittet. Bestäm magnetfältet till storlek och riktning i centrumaxeln av den ursprungliga stången. (Vid den svarta pricken.)



Förståelsedel (4 poäng)

e) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

Den grundläggande fysiken i problemlösningsdelen ovan bygger på exakt ett av Maxwells postulat.	☐	☐	☐
Den grundläggande fysiken i problemlösningsdelen ovan bygger på exakt två av Maxwells postulat.	☐	☐	☐
Den grundläggande fysiken i problemlösningsdelen ovan bygger **endast** på Gauss lag.	☐	☐	☐
Den grundläggande fysiken i problemlösningsdelen ovan bygger **endast** på att B-fältet är källfritt.	☐	☐	☐
Den grundläggande fysiken i problemlösningsdelen ovan bygger **endast** på att källan till D-fältet är den fria laddningstätheten.	☐	☐	☐
Den grundläggande fysiken i problemlösningsdelen ovan bygger **endast** på att rotationen av H-fältet är den fria strömtätheten.	☐	☐	☐

f) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

	ja	?	nej
Lorentzkraften beror endast på B -fältet.	☐	☐	☐
Laddningar i rörelse som utsätts för ett B-fält *kan* påverkas av en kraft.	☐	☐	☐
Laddningar som rör sig *parallellt* med B-fältslinjerna utsätts för en kraft.	☐	☐	☐
Laddningar i rörelse som utsätts för ett E-fält påverkas av en kraft.	☐	☐	☐
Laddningar i *vila* som utsätts för ett B-fält *kan* påverkas av en kraft.	☐	☐	☐
I ett koordinatsystem som följer med en laddning som rör sig vinkelrätt mot B-fältslinjerna kommer $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{B}$ att bli noll och därmed påverkas inte laddningen av någon kraft.	☐	☐	☐

g) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

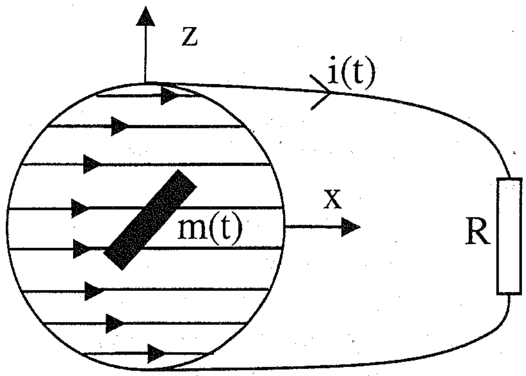
	ja	?	nej
Den magnetiska vektorpotentialen kan definieras tack vare att B-fältet är källfritt.	☐	☐	☐
Den magnetiska vektorpotentialen utanför en strömförande tråd cirkulerar runt tråden.	☐	☐	☐
Div($\boldsymbol{J}$)=0 är en konsekvens av att vi betraktar likströmmar.	☐	☐	☐
Om vi använder metoden med virtuella förflyttningar för att beräkna den magnetiska kraften kan både flöde och ström hållas konstanta under den tänkta förflyttningen.	☐	☐	☐
Om man håller strömmen konstant blir kraften större än om man håller flödet konstant eftersom batteriet i det fallet levererar energi till systemet för att hålla strömmen konstant.	☐	☐	☐
Om vi håller det magnetiska flödet konstant ska vi ha ett minustecken framför derivatan av energin.	☐	☐	☐

h) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

	ja	?	nej
Randvillkoret för B-fältets normalkomponent härleds från att B-fältet är divergensfritt.	☐	☐	☐
B-fältets normalkomponent är kontinuerlig i gränsen mellan två material.	☐	☐	☐
B-fältets tangentialkomponent är kontinuerlig i gränsen mellan två material.	☐	☐	☐
H-fältets tangentialkomponent är kontinuerlig i gränsen mellan två material.	☐	☐	☐
H-fältets normalkomponent är kontinuerlig i gränsen mellan två material.	☐	☐	☐
Strömtäthetsfältets normalkomponent är alltid kontinuerlig i gränsen mellan två material.	☐	☐	☐

Problemlösningsdel (8 poäng)

a) En elektrisk generator är utformad enligt bilden. Den består av en isolerad ledningstråd som är lindad från botten till toppen utanpå ett tunt sfäriskt plastskal med ytterradien a. Antag att antalet lindningsvarv hos spolen är N och att dessa är jämt fördelade över sfären. Vid sfärens poler är lindningen ansluten till en yttre last, en resistor med resistansen R. I sfärens centrum finns en roterande permanetmagnet som roterar med vinkelhastigheten $\boldsymbol{\omega} = \omega\hat{\boldsymbol{y}}$, vinkelrätt mot dipolmomentaxeln så att det magnetiska dipolmomentet kan beskrivas som $\boldsymbol{m}(t) = \boldsymbol{m}_0(\sin(\omega t)\hat{\boldsymbol{x}} + \cos(\omega t)\hat{\boldsymbol{z}})$. Beräkna strömmen $i(t)$ genom lindningen och resistansen. *Ledning: Använd den magnetiska vektorpotentialen för att beräkna flödet genom lindningarna.*



Förståelsedel (4 poäng)

b) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?	**ja**	**?**	**nej**
Den grundläggande fysiken i uppgiften ovan bygger på exakt två av Maxwells postulat.	❑	❑	❑
Den grundläggande fysiken i uppgiften ovan bygger på exakt fyra av Maxwells postulat	❑	❑	❑
Den grundläggande fysiken i uppgiften ovan bygger bland annat på att rotationen av H-fältet är den fria strömtätheten plus tidsderivatan av förskjutningsfältet.	❑	❑	❑
Den grundläggande fysiken i uppgiften ovan bygger bland annat på Faradays lag.	❑	❑	❑
Den grundläggande fysiken i uppgiften ovan bygger bland annat på Gauss lag.	❑	❑	❑
Den grundläggande fysiken i uppgiften ovan bygger bland annat på att B-fältet är källfritt.	❑	❑	❑

c) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?	**ja**	**?**	**nej**
Gauss lag modifieras när man går från elektrostatik till elektrodynamik.	❑	❑	❑
Kontinuitetsekvationen innehåller samma nollskilda termer i statiken som i dynamiken.	❑	❑	❑
Faradays induktionslag uttrycker att ett elektriskt fält kan genereras utan laddningsseparation.	❑	❑	❑
Lentz lag följer av Amperes lag.	❑	❑	❑
Lenz lag säger att en inducerad spänning motverkar förändringen i det pålagda magnetfältet.	❑	❑	❑
Man kan inducera spänning i en ledare trots att -dB/dt termen i Faradays lag är noll.	❑	❑	❑

d) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?	**ja**	**?**	**nej**
I elektromagnetismen är E-fältets tangentialkomponent alltid kontinuerlig i gränsen mellan två material med olika permittivitet.	❑	❑	❑
I elektromagnetismen är E-fältets normalkomponent alltid kontinuerlig i gränsen mellan två material med olika permittivitet.	❑	❑	❑
I elektromagnetismen är H-fältets tangentialkomponent alltid kontinuerlig i gränsen mellan två material med olika permeabilitet.	❑	❑	❑
I elektromagnetismen är B-fältets normalkomponent alltid kontinuerlig i gränsen mellan två material med olika permeabilitet.	❑	❑	❑
I elektromagnetismen är J-fältets tangentialkomponent alltid kontinuerlig i gränsen mellan två material med olika permeabilitet.	❑	❑	❑
I elektromagnetismen är J-fältets normalkomponent alltid kontinuerlig i gränsen mellan två material med olika permeabilitet.	❑	❑	❑

e) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?	**ja**	**?**	**nej**
Den skalära potentialen ger upphov till elektriska fält som härrör sig från laddningsseparation.	❑	❑	❑
Den magnetiska vektorpotentialen ger upphov till elektriska fält som härrör sig från tidsvarierande strömmar.	❑	❑	❑
Egeninduktansen i en spole relaterar till hur mycket magnetisk energi som komponenten kan lagra.	❑	❑	❑
Det länkade flödet används vid induktionsberäkningar.	❑	❑	❑
Den lagrade energin hos en spole har ett kvadratiskt beroende av strömmen i spolen.	❑	❑	❑
Den lagrade energin hos två spolar som är magnetiskt kopplade till varandra fås genom att summera de i strömmen kvadratiska uttrycken på energin hos respektive spole.	❑	❑	❑

Problemlösningsdel (8 poäng)

a) En sinusformad våg har det komplexa E-fältet

$$\overline{\mathbf{E}} = (10\hat{\mathbf{x}} + 6\hat{\mathbf{z}})e^{-j(3x-5z)}e^{-(3x-5z)} \text{ V/m}.$$

Åt vilket håll utbreder sig vågen? (2 poäng) Är det en plan våg? Motivera ditt svar. (1 poäng) Bestäm tillhörande komplexa H-fält. (3 poäng) Bestäm tillhörande Poyintingvektor (2 poäng).

Förståelsedel (4 poäng)

b) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?	**ja**	**?**	**nej**
Om vi enbart ändrar $\hat{x}$ i uttrycket för E-fältet ovan till $\hat{y}$ så beskriver uttrycket fortfarande en plan våg.	❑	❑	❑
Om vi ändrar $\hat{z}$ i uttrycket för E-fältet ovan till $\hat{y}$ och samtidigt z till y så beskriver uttrycket fortfarande en plan våg.	❑	❑	❑
Den grundläggande fysiken i uppgiften ovan bygger **endast** på att rotationen av H-fältet är den fria strömtätheten plus tidsderivatan av förskjutningsfältet.	❑	❑	❑
Den grundläggande fysiken i uppgiften ovan bygger **endast** på Faradays lag.	❑	❑	❑
Den grundläggande fysiken i uppgiften ovan bygger **endast** på Gauss lag.	❑	❑	❑
Den grundläggande fysiken i uppgiften ovan bygger **endast** på att att B-fältet är källfritt.	❑	❑	❑

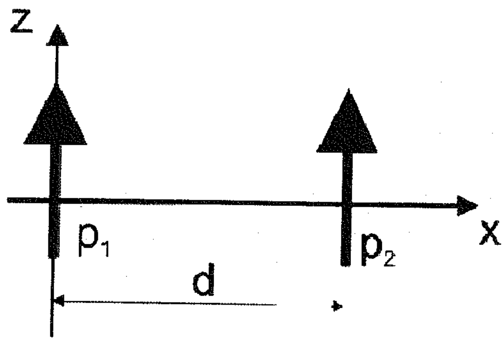
c) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?	**ja**	**?**	**nej**
Vågimpedansen hos luft är Z=377Ω.	❑	❑	❑
I en metall ligger H-fältet 90° efter E-fältet.	❑	❑	❑
Absolutbeloppet av vågimpedansen för en *icke-ferromagnetisk* god ledare är lägre än för luft.	❑	❑	❑
Vågimpedansen är alltid ett reellt tal.	❑	❑	❑
Vågimpedansen relaterar E-fältet till H-fältet.	❑	❑	❑
Vågimpedansen berir inte av frekvensen.	❑	❑	❑

d) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?	**ja**	**?**	**nej**
För en god ledare är $\sigma/\omega\varepsilon >> 1$.	❑	❑	❑
I en god ledare är $\alpha \approx \beta$.	❑	❑	❑
Summan av reflektionskoefficienten r och transmissionskoefficienten t för E-fältet är lika med ett, dvs $r + t = 1$	❑	❑	❑
Summan av reflektionskoefficienten R och transmissionskoefficienten T för effekt är lika med ett, dvs $R + T = 1$	❑	❑	❑
Reflektionskoefficienten för effekt hos E-fältet är lika med reflektionskoefficienten för E-fältet i kvadrat.	❑	❑	❑
Reflektionskoefficienten för effekt hos E-fältet kan vara komplex.	❑	❑	❑

e) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?	**ja**	**?**	**nej**
Snells lag gäller i gränsytor där permittiviteten är samma på båda sidor.	❑	❑	❑
Snells reflektionslag säger att infallande och reflekterande fält har samma vinkel mot ytnormalen.	❑	❑	❑
Snells brytningslag relaterar infallsvinkel till vinkeln på det transmitterade fältet.	❑	❑	❑
Snells brytningslag härleds genom att betrakta randvillkoren för normalkomponenerna av E- och H-fälten i gränsytan.	❑	❑	❑
Snells lag säger att när infallsvinkeln är större än kritiska vinkeln uppstår totalreflektion.	❑	❑	❑
Totalreflektion uppstår då fältet går *från ett optiskt tätare till ett optiskt tunnare* medium.	❑	❑	❑

Problemlösningsdel (8 poäng)

a) Två Hertzdipoler med de elektriska dipolmomenten $\overline{\mathbf{p}}_1 = \bar{p}_1\hat{\mathbf{z}}$ och $\overline{\mathbf{p}}_2 = \bar{p}_2\hat{\mathbf{z}}$ sänder med vinkelfrekvens ω. Den ena antennen är placerad i origo och den andra längs x-axeln på ett avstånd d från origo. Dipolerna matas med en amplitud och fas som svarar mot $\bar{p}_2 = -\bar{p}_1 e^{-j\beta d/2}$. Bestäm vilka riktningar i xy-planet där E-fältet är noll. Antag stort avstånd från origo, dvs att avståndet d är litet.



Förståelsedel (4 poäng)

b) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

	ja	?	nej
Uttrycken för E- och H-fälten ovan gäller för godtyckligt tidsberoende.	❑	❑	❑
Uttrycken för E- och H-fälten ovan gäller godtyckligt nära antennen.	❑	❑	❑
Den grundläggande fysiken i uppgiften ovan bygger bl.a. på att rotationen av H-fältet är den fria strömtätheten plus tidsderivatan av förskjutningsfältet.	❑	❑	❑
Den grundläggande fysiken i uppgiften ovan bygger bl.a. på Faradays lag.	❑	❑	❑
Den grundläggande fysiken i uppgiften ovan bygger bl.a. på Gauss lag.	❑	❑	❑
Den grundläggande fysiken i uppgiften ovan bygger bl.a. på att B-fältet är källfritt.	❑	❑	❑

c) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

	ja	?	nej
Den retarderade potentialen kommer från lösning av Poissons ekvation.	❑	❑	❑
Den retarderade potentialen beskriver att vågor färdas med ljusets hastighet.	❑	❑	❑
Vågekvationen för vektorpotentialen **A** är ett postulat.	❑	❑	❑
I elektrodynamiken (tidsvarierande fält) måste $\nabla \cdot \boldsymbol{A}$ vara samma som i magnetostatiken.	❑	❑	❑
Uttrycket för $\nabla \cdot \boldsymbol{A}$ är *entydigt* givet av vågekvationen.	❑	❑	❑
Den magnetiska vektorpotentialen relateras till magnetfältet som $\nabla \times \boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}$.	❑	❑	❑

d) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

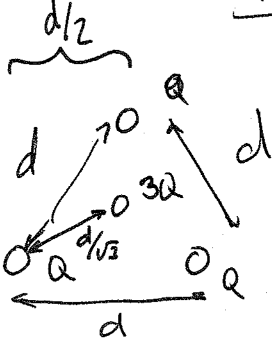
	ja	?	nej
En Hertzdipol är en bråkdel av en våglängd lång.	❑	❑	❑
Strömmen i antennen längs en Hertzdipol kan antas vara konstant i tiden.	❑	❑	❑
Strålningsresistansen hos en halvvågsantenn är *oberoende* av strålningseffekten.	❑	❑	❑
Strålningsresistansen ökar med längden i kubik för en Hertzdipol.	❑	❑	❑
En kvartsvågsantenn är ekvivalent med en halvvågsantenn över ett ledande plan.	❑	❑	❑
Strömmen antas vara noll i änden av en kvartsvågsantenn.	❑	❑	❑

e) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

	ja	?	nej
$j\omega$-metoden för fältberäkningar fungerar bara för fält med godtyckligt tidsberoende.	❑	❑	❑
Tidsderivata i Maxwells ekvationer övergår i komplexa metoden till multiplikation med $j\omega$	❑	❑	❑
Enda sättet att definiera tidsberoendet för komplexa fält är $e^{-i\omega t}$.	❑	❑	❑
Om β är direkt proportionellt mot ω är materialet dispersionsfritt.	❑	❑	❑
Rent och perfekt vakuum är dispersivt.	❑	❑	❑
För att ett material ska vara dispersionsfritt måste grupphastigheten vara skild från fashastigheten.	❑	❑	❑

Tenta 2010-08-27

1



Kulorna ligger i en liksidig triangelform
Mittenkulan ligger centrerad.
Avståndet mellan innekulan och de yttre blir då
$d/\sqrt{3}$

Elektriskt arbete för att föra samman ett antal laddningar:

$$W_e = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N} Q_k V_k \qquad \text{(N är antalet laddningar)}$$

Potential från en laddning $V_k = \dfrac{Q_k}{4\pi\varepsilon_0 r}$

Summerar potentialen vid en laddning från övriga:
I triangelns "spetsar": $V_1 = V_2 = V_3$

$$V_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(2\frac{Q}{d} + \frac{3Q\sqrt{3}}{d}\right) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 d}\left(2+3\sqrt{3}\right)$$

I centrumkulan

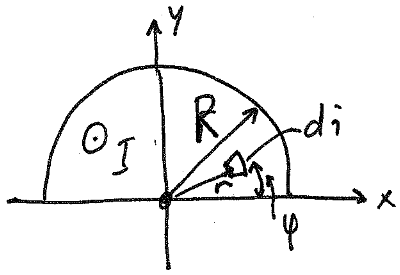
$$V_4 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 d}\,3\sqrt{3}$$

Det totala arbetet kan då beräknas som:

$$W_e = \frac{1}{2}\left(Q_1V_1 + Q_2V_2 + Q_3V_3 + Q_4V_4\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 d}\left[3\cdot(2+3\sqrt{3}) + 3\cdot 3\sqrt{3}\right]$$

$$= \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 d}\left(3+9\sqrt{3}\right)$$

②



I stången flyter strömmen I i riktning ut ur papperet.

Om vi antar homogent fördelad strömtäthet kan den beräknas till $J = \dfrac{I}{\frac{1}{2}\pi R^2}$

Vi kan dela upp strömmen i små element di enligt

$di = J\,dr\,r\,d\varphi$

Varje litet di ger ett magnetfältsbidrag enligt Amperes lag:

$|d\mathbb{B}| = \dfrac{\mu_0\,di}{2\pi r}$

Således kan vi skriva $dB_x = |dB|\sin\varphi$, $dB_y = |dB|(-\cos\varphi)$

Integrerar för att få fram fältet i origo.

$$B_x = \int_{r=0}^{R}\int_{\varphi=0}^{\pi} dB_x = \int_{r=0}^{R}\int_{0}^{\pi} \frac{\mu_0}{2\pi r}\,\frac{2I}{\pi R^2}\,dr\,r\,d\varphi\,\sin\varphi$$

$$= \frac{\mu_0 I}{\pi^2 R^2}\,R\,\underbrace{\int_0^{\pi}\sin\varphi\,d\varphi}_{2} = 2\,\frac{\mu_0 I}{\pi^2 R}$$

$$B_y = \int_{r=0}^{R}\int_{\varphi=0}^{\pi} dB_y = \frac{\mu_0 I}{\pi^2 R}\underbrace{\int_0^{\pi} -\cos\varphi\,d\varphi}_{=0} = 0$$ (kan även inses med symmetriargument)

(4) Vi har $\bar{E} = (10\hat{x} + 6\hat{z}) e^{-j(3x-5z)} e^{-(3x-5z)}$ V/m

Allmän form på plan våg: $\bar{E} = E_0 e^{-j\beta\hat{k}\cdot r} e^{-\alpha\hat{k}\cdot r}$

Vi måste kolla att fältet är vinkelrätt mot utbredningsriktningen och att fältet är konstant i ett plan vinkelrätt mot utbredningsriktningen

Ur ekvationerna ovan kan vi nu identifiera $\alpha\hat{k} = \beta\hat{k} = (3, 0, -5)$

Eftersom $|\hat{k}| = 1$ måste $\alpha = \beta = \sqrt{3^2 + 0^2 + 5^2} = \sqrt{34}$

$\Rightarrow \hat{k} = \frac{1}{\sqrt{34}}(3, 0, -5)$

Utbredningsriktningen är alltså $\hat{k} = \frac{1}{\sqrt{34}}(3, 0, -5)$

Är fältet vinkelrätt mot utbredningsriktningen?

I så fall ska gälla att $E \cdot \hat{k} = 0$

$E \cdot \hat{k} = (10, 0, 6) \cdot \frac{1}{\sqrt{34}}(3, 0, -5) = 0$ Alltså är det en plan våg.

Komplexa H-fältet som motsvarar detta E-fält fås som:

$$\bar{H} = \frac{1}{Z}\hat{k} \times \bar{E} = \frac{1}{Z\sqrt{34}} \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 3 & 0 & -5 \\ 10e^{-\gamma\hat{k}\cdot r} & 0 & 6e^{-\gamma\hat{k}\cdot r} \end{vmatrix} = \frac{-1}{Z\sqrt{34}} \hat{y}\, 68 e^{-\gamma\hat{k}\cdot r}$$

$$= -\hat{y} \cdot \frac{68}{Z\sqrt{34}} e^{-\gamma\hat{k}\cdot r}$$ där $Z = \frac{j\omega\mu}{\gamma}$ och $\gamma = \alpha + j\beta$

Poyntingvektorn fås som $S = \bar{E} \times \bar{H}^* =$

$$\begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 10e^{-\alpha\hat{k}\cdot r} e^{-j\beta\hat{k}\cdot r} & 0 & 6e^{-\alpha\hat{k}\cdot r} e^{-j\beta\hat{k}\cdot r} \\ 0 & -\frac{68}{\sqrt{34}\, Z^*} e^{-\alpha\hat{k}\cdot r} e^{-j\beta\hat{k}\cdot r} & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \hat{x} \frac{6 \cdot 68}{\sqrt{34}} \frac{1}{Z^*} e^{-2\alpha\hat{k}\cdot r} - \hat{z} \frac{10 \cdot 68}{\sqrt{34}} \frac{1}{Z^*} e^{-2\alpha\hat{k}\cdot r}$$

där $Z^* = \frac{-j\omega\mu}{\gamma}$

3 Till att börja med ser vi att endast dipolens z-komponent ger flödesbidrag i de lindade varven.

Vektorpotentialen från z-komponenten blir:

$$\mathbb{A}(r,\theta,\phi,t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\mathbb{m}_z \times \hat{r}}{r^2} = \frac{\mu_0 m_0}{4\pi}\cos(\omega t)\frac{\hat{z}\times\hat{r}}{r^2} = \frac{\mu_0 m_0}{4\pi}\cos(\omega t)\frac{\sin\theta}{r^2}\hat{\phi}(\phi)$$

Flödet genom ett varv av lindningen beläget vid polvinkeln θ blir:

$$\Phi(\theta,t) = \oint \mathbb{A}\cdot d\mathbb{l} = \frac{\mu_0 m_0}{4\pi}\cos(\omega t)\frac{\sin\theta}{a^2}\int_0^{2\pi}\hat{\phi}\cdot(a\sin\theta\,\hat{\phi}\,d\phi) = \frac{\mu_0 m_0}{2a}\cos(\omega t)\sin^2\theta$$

Med jämn varvbeläggning i θ-led fås att i intervallet $d\theta$ finns $dN = \frac{N}{\pi}d\theta$ varv som passeras av flödet $\Phi(\theta)$

Detta ger ett bidrag till det sammanlagda flödet: $d\Phi = \Phi\,dN = \frac{\mu_0 m_0 N}{2\pi a}\cos(\omega t)\sin^2$

Totala flödet: $\Phi_{total}(t) = \frac{\mu_0 m_0 N}{2\pi a}\cos(\omega t)\int_0^{\pi}\sin^2\theta\,d\theta = \frac{\mu_0 m_0 N}{4a}\cos(\omega t)$

Den inducerade spänningen

$$V = -\frac{d\Phi_{total}}{dt} = \frac{\mu_0 m_0 N\omega}{4a}\sin(\omega t)$$

Strömmen i resistansen blir $i = \frac{V}{R} = \frac{\mu_0 m_0 N\omega}{4aR}\sin(\omega t)$

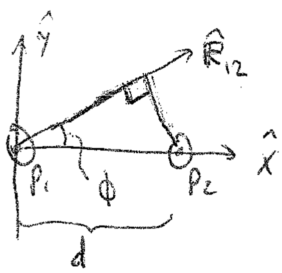
5

Fjärrfältet från en elektrisk dipol.

$$\mathbf{E}_\theta = -\hat{\theta}\,\frac{\omega^2 \bar{p}_0 \sin\theta}{4\pi c R_{12}} Z_0 e^{-j\beta R_{12}} = -\frac{\mu_0 \omega^2 \bar{p}_0 \sin\theta}{4\pi R_{12}} e^{-j\beta R_{12}}\,\hat{\theta}$$

Fältet från de båda dipolerna kan nu skrivas

$$E_\theta = -\frac{\mu_0\omega^2 e^{-j\beta R_{12}}}{4\pi R_{12}} \sin\theta\left(\bar{p}_1 + \bar{p}_2 e^{j\beta d\,\hat{x}\cdot\hat{R}_{12}}\right)$$



Låt $\hat{R}_{12}$ vara den radiella vektorn i cylindriska koordinater som pekar mot fältpunkten, dvs den ligger i xy-planet

Uttryckt i vinkeln ϕ fås

$$E_\theta = -\frac{\mu_0\omega^2 e^{-j\beta R_{12}}}{4\pi R_{12}} \sin\theta\left(\bar{p}_1 + \bar{p}_2 e^{j\beta d\cos\phi}\right)\hat{\theta}$$

I xy planet blir $-\hat{\theta}$ i $\hat{z}$-led.

Fältet är noll i de riktningar som

$$\bar{p}_1 + \bar{p}_2 e^{j\beta d\cos\phi} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$e^{j\beta d\cos\phi} = -\frac{\bar{p}_1}{\bar{p}_2} = e^{+j\beta d/2}$$

$$\Rightarrow \quad \cos\phi = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \phi = \pm 60^\circ$$