

Tentamen i Elektromagnetisk fältteori för F2.

EEF031 måndagen den 28 augusti 2006 kl. 14:00-18:00.

- Tillåtna hjälpmedel:** BETA, Physics Handbook, Formelsamling i elektromagnetisk fältteori, Valfri kalkylator men inga egna anteckningar utöver egna formler på sista bladet i formelsamlingen för elektromagnetisk fältteori.
- Förfrågningar:** Andreas Fhager, Tel. 772 1723.
Läraren besöker skrivsalen ca kl 15 och 17 för att svara på frågor.
- Lösningar:** Anslås på kursens hemsida efter tentamenstidens slut.
- Resultat:** Anslås på kursens hemsida senast den 18:e september.
- Granskning:** Sker på plats och tid enligt resultatlistan.
- Betyg:** Sänds till betygsexpeditionen senast den 25:e september.
- Kom ihåg:** Poängavdrag görs för otydliga figurer, utelämnade referensriktningar, dimensionsfel och utelämnade motiveringar

Svaren på förståelsedelen skall ges på tesen som lämnas in. Flervalsfrågorna besvaras med att markera en av rutorna på tesen efter varje påstående. En och endast en ruta på varje rad skall markeras.

De tre svarsalternativen (från vänster till höger) är *Rätt*, *Vet ej*, *Fel*. Riktigt svar på ett påstående ger +0.2 poäng. Oriktigt svar ger -0.2 poäng. Vet ej är neutralt och ger 0 poäng.

Förståelseuppgifterna ger maximalt 1 poäng och lägst -1 poäng. Man kan därför få 1 poäng även med ett vet ej svar.

Namn:.....

Email:.....

Personnummer:.....

Lycka till!

1

Problemlösningsdel (8 poäng)

En sfäriskt symmetrisk potentialfördelning ser ut enligt följande:

$$V(r) = \begin{cases} V_0(1 - r^2/a^2) & 0 \leq r \leq a, \\ 0 & r > a. \end{cases}$$

A) Beräkna systemets rymladdningstäthet $\rho(r)$. (4 poäng)

B) Beräkna systemets totala laddning. (4 poäng)

Förståelsedel (1 poäng vardera på uppgift C, D, E, F)

C) Den elektromagnetiska teorin baseras på postulat. Vilket eller vilka av följande påståenden om den grundläggande fysiken i uppgift A är riktiga? **Rätt ? Fel**

Den fysikaliska grunden beskrivs av ett postulat.

Den fysikaliska grunden beskrivs av två postulat.

Den fysikaliska grunden baseras på Amperes lag och på att B-fältet är källfritt.

Den fysikaliska grunden baseras på Gauss lag och på att E-fältet är rotationsfritt.

Den fysikaliska grunden baseras på att källan till E-fältet är laddningstätheten/ ϵ_0 och på att E-fältet är konservativt.

Den fysikaliska grunden baseras på att rotationen av B-fältet är lika med strömtätheten och på att B-fältet är divergensfritt.

D) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga? **Rätt ? Fel**

Gauss lag på differentialform och Gauss lag på integralform uttrycker samma saker.

På stort avstånd från en ändligt lång linjeladdning avtar fältet som $1/R^2$.

På litet avstånd från en ändligt lång linjeladdning avtar fältet som $1/R^2$.

På stort avstånd utanför en sfärisk rymladdning avtar fältet som $1/R^2$.

På litet avstånd utanför en sfärisk rymladdning avtar fältet som $1/R^2$.

Enheten för det elektriska fältet är V/m , (volt/meter).

E) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga? **Rätt ? Fel**

Det elektrostatiska fältet är källfritt.

Det elektrostatiska fältet är konservativt.

Eftersom det elektrostatiska fältet är rotationsfritt kan en potential definieras.

Antagande om approximativ potentialfördelning ger en för hög resistans.

Antagande om approximativ strömfördelning ger för låg resistans.

Man kan inte definiera kapacitans för en enskild ledare.

F) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga? **Rätt ? Fel**

Fältet utanför en oladdad ihålig metallsfär med en punktladdning i håligheten beror på punktladdningens placering i håligheten.

Fältet utanför en laddad ihålig metallsfär är samma som det från en ensam punktladdning placerad i platsen för centrum på sfären.

Lösning av Laplaces ekvation ger upphov till retarderade potentialer.

Källan till förskjutningsfältet är laddningstätheten hos de fria laddningarna.

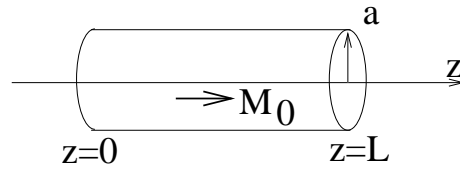
Dielektriska egenskaper modelleras med elektriska monopoler.

Kirchoffs strömlag bygger på laddningskonservering.

2

Problemlösningsdel (8 poäng)

A) En cylinder med radien a och längden L är permanent magnetiserad i axelriktningen $\mathbf{M} = M_0 \hat{z}$. Beräkna B- och H-fält på z-axeln i cylinderns mitt respektive ändpunkt, dvs $B(z = L/2)$, $H(z = L/2)$ och $B(z = L)$, $H(z = L)$.



Förståelsedel (1 poäng vardera på uppgift B, C, D, E)

B) Den elektromagnetiska teorin baseras på postulat. Vilket eller vilka av följande påståenden om den grundläggande fysiken i uppgift A är riktiga?

	Rätt	?	Fel
Den fysikaliska grunden beskrivs av ett postulat.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Den fysikaliska grunden beskrivs av två postulat.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Den fysikaliska grunden baseras på Amperes lag och på att B-fältet är källfritt.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Den fysikaliska grunden baseras på Gauss lag och på att E-fältet är rotationsfritt.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Den fysikaliska grunden baseras på att källan till E-fältet är laddningstätheten/ ϵ_0 och på att E-fältet är konservativt.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Den fysikaliska grunden baseras på att rotationen av B-fältet är lika med strömtätheten och på att B-fältet är divergensfritt.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

C) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

	Rätt	?	Fel
En magnetisk dipol används som modell för magnetiska egenskaper.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Rotationen av den magnetiska vektorpotentialen kan väljas fritt.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Järn är ett exempel på ett diamagnetiskt material.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
B-fältet från en magnetisk dipol avtar som $1/R^2$ på stort avstånd från dipolen.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Fältet från magnetiseringsströmmar kan alltid beräknas med Biot-Savarts lag.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Fältet från magnetiseringsströmmar kan ibland beräknas med Amperes lag.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

D) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

	Rätt	?	Fel
En laddad partikel som rör sig i ett tidskonstant magnetfält accelereras.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
En laddad partikel som rör sig i ett tidskonstant magnetfält ökar sin hastighet.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
H-fältet spelar samma roll i magnetostatiken som E-fältet i elektrostatiken.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
En magnetisk dipol används som modell för att beskriva magnetiska egenskaper.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Lorentzkraften beror bara på magnetfältet.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Ytintegralen av B-fältet över en sluten yta är alltid noll.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

E) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

	Rätt	?	Fel
Linjeintegralen av H-fältet längs en sluten kurva är noll för en permanentmagnet.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
En bra permanentmagnet ska ha en smal hystereskurva.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
En hystereskurva är ett exempel på ett icke-linjärt samband mellan B- och H-fältet.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
B-fältets normalkomponent är alltid kontinuerlig i gränsen mellan två material med olika permeabilitet.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
H-fältets tangentialkomponent är alltid kontinuerlig i gränsen mellan två material med olika permeabilitet.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
H-fältets normalkomponent är alltid kontinuerlig i gränsen mellan två material med olika permeabilitet.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

3

Problemlösningsdel (8 poäng)

A) I en plan, elektromagnetisk våg ges det elektriska fältet av uttrycket

$$E = E_0 \cos \left\{ \omega \left[\frac{a_1 x + a_2 y + a_3 z}{c_0} - t \right] \right\}$$

där E_0 är en konstant och c_0 är ljushastigheten i vakuum. Vilka villkor måste konstanterna a_1 , a_2 och a_3 uppfylla för att uttrycket ovan ska vara konsistent med Maxwells ekvationer?

Förståelsedel (1 poäng vardera på uppgift B, C, D, E)

B) Den elektromagnetiska teorin baseras på postulat. Vilket eller vilka av följande påståenden om den grundläggande fysiken i uppgift A är riktiga?	Rätt	?	Fel
Den fysikaliska grunden beskrivs av två postulat.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Den fysikaliska grunden beskrivs av fyra postulat.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Den fysikaliska grunden baseras på Faradays lag.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Den fysikaliska grunden baseras på Amperes lag och på att B-fältet är källfritt.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Den fysikaliska grunden baseras på att källan till D-fältet är den fria laddningstätheten och på att E-fältet är konservativt.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Den fysikaliska grunden baseras på att rotationen av H-fältet är den fria strömtätheten och på att B-fältet är divergensfritt.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
C) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?	Rätt	?	Fel
Amperes lag kan förenklas något i magnetostatiken jämfört med elektromagnetismen.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
B-fältet är källfritt även i elektromagnetismen.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Faradays lag är en av Maxwells ekvationer.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Lentz lag är en av Maxwells ekvationer.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Förskjutningsströmmen är lika med tidsderivatan av E-fältet.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
E-fältet är rotationsfritt i induktionsproblem.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
D) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?	Rätt	?	Fel
Enligt Lentz lag förstärker inducerade strömmar det ursprungliga magnetfältet.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
En spoles självinduktans beror på strömmen i spolen.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Neumans formel säger att den ömsesidiga induktansen mellan spole 1 och 2, L_{12} , är samma som mellan spole 2 och 1, L_{21} .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Induktion är en mekanism där tex en krets försöker förstärka flödesändringar.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Om man pratar om en spoles induktans menar man dess självinduktans.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Om man pratar om en spoles induktans menar man dess ömsesidiga induktans.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
E) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?	Rätt	?	Fel
Om gruppshastigheten är lika med fashastigheten är materialet dispersionsfritt.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Vakuum är dispersionsfritt, dvs fashastigheten = gruppshastigheten.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Ett medium är icke dispersivt om β är direkt proportionell mot ω	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Vågimpedansen är förhållandet mellan amplituderna hos E- och H-fältet hos en plan våg.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Vågimpedansen för vakuum är omkring 373 ohm.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Ferromagnetiska material har högre vågimpedans än paramagnetiska material.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

4

Problemlösningsdel (8 poäng)

Två kvadratiske strömslingor, med sidorna a resp b ligger i samma plan. Avståndet d mellan slingorna är stort i förhållande till slingornas storlek, $d \gg a$ och $d \gg b$.

A) Beräkna den ömsesidiga induktansen. (4 poäng)

B) Beräkna kraften mellan slingorna om de har strömmarna I_a resp I_b . (4 poäng)

Förståelsedel (1 poäng vardera på uppgift C, D, E, F)

C) Den elektromagnetiska teorin baseras på postulat. Vilket eller vilka av följande påståenden om den grundläggande fysiken i uppgift A är riktiga?

	Rätt	?	Fel
Den fysikaliska grunden beskrivs av två postulat.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Den fysikaliska grunden beskrivs av fyra postulat.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Den fysikaliska grunden baseras på Faradays lag.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Den fysikaliska grunden baseras på Amperes lag och på att B-fältet är källfritt.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Den fysikaliska grunden baseras på att källan till D-fältet är den fria laddningstätheten och på att E-fältet är konservativt.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Den fysikaliska grunden baseras på att rotationen av H-fältet är den fria strömtätheten och på att B-fältet är divergensfritt.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

D) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

	Rätt	?	Fel
Den retarderade potentialen kommer från lösning av vågekvationen.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Den retarderade potentialen beskriver hur ljushastigheten avtar med avståndet från källan.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Vågekvationen för vektorpotentialen \mathbf{A} kan härledas från Maxwells ekvationer.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
I elektromagnetismen väljer man oftast $\nabla \cdot \mathbf{A}$ till samma som i magnetostatiken.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Man får välja $\nabla \cdot \mathbf{A}$ som man vill.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Snells reflektionslag säger att reflektionsvinkeln är samma som infallsvinkeln.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

E) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

	Rätt	?	Fel
Ljushastigheten i ett medium bestäms av permeabiliteten och permittiviteten.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Ljushastigheten beror inte på konduktiviteten.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
En plan våg har ingen fältkomponent i utbredningsriktningen.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Fasskillnaden är 90° mellan x- och y-komponenten för en cirkulärpolariserad plan våg som utbreder sig i z-led.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
För plana vågor är fälten konstanta vinkelrätt mot utbredningsriktningen.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
För en plan våg i en metall är E och H-fälten förskjutna 45° mot varandra.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

F) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

	Rätt	?	Fel
En Hertzdipol är mycket längre än våglängden.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Direktiviteten definieras som maxbeloppet på antennförstärkningen.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Strålningsresistansen hos en halvstågstantenn beror av strålningseffekten.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Strålningsresistansen ökar med längden i kvadrat för alla dipolantenner.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Direktiviteten är 1,5 för en Hertzdipol.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Strömmen är konstant längs en halvstågstantenn.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

5

Problemlösningsdel (8 poäng)

A) En antenn strålar med intensitetsfördelningen (given i sfäriska koordinater)

$$P = P_0 \cos^4(\theta) \sin^2(\phi)$$

för $0 \leq \theta \leq \pi/2$ och $0 \leq \phi \leq 2\pi$, dvs i den övre halvrymden. I den undre halvrymden, dvs för $\pi/2 \leq \theta \leq \pi$ och $0 \leq \phi \leq 2\pi$ utstrålas ingen effekt, dvs $P = 0$. Beräkna antennförstärkning och direktivitet.

Förståelsedel (1 poäng vardera på uppgift B, C, D, E)

B) Den elektromagnetiska teorin baseras på postulat. Vilket eller vilka av följande påståenden om den grundläggande fysiken i uppgift A är riktiga? **Rätt ? Fel**

Den fysikaliska grunden beskrivs av två postulat.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Den fysikaliska grunden beskrivs av fyra postulat.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Den fysikaliska grunden baseras på Faradays lag.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Den fysikaliska grunden baseras på Amperes lag och på att B-fältet är källfritt.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Den fysikaliska grunden baseras på att källan till D-fältet är den fria laddningstätheten och på att E-fältet är konservativt.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Den fysikaliska grunden baseras på att rotationen av H-fältet är den fria strömtätheten och på att B-fältet är divergensfritt.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

C) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga? **Rätt ? Fel**

Poyntingvektorn uttrycker en vågs intensitet i en viss riktning.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Poyntingvektorn beskriver en vågs utbredningsriktning.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Poyntings teorem uttrycker energikonservering.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
En vågs energi färdas med fashastigheten.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Reflektionskoefficienten för effekt vid vinkelrätt infall är det samma som kvadraten på reflektionskoefficienten för amplituden.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Transmissionskoefficienten för effekt vid vinkelrätt infall är det samma som kvadraten på transmissionskoefficienten för amplituden.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

D) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga? **Rätt ? Fel**

En monokromatisk våg kan innehålla flera frekvenskomponenter.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
För en god ledare är $\sigma/\omega\epsilon \gg 1$.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
I en god ledare är $\alpha \approx \beta$.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
För en god isolator är vågimpedansen $Z \approx \sqrt{j\omega\mu/\sigma}$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
För höga frekvenser är inträngningsdjupet större än för låga frekvenser.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
I komplex notation motsvarar tidsderivata multiplikation med $j\omega$.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

E) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga? **Rätt ? Fel**

Vid snett infall mot en gränsyta skiljer sig uttrycken på reflektionskoefficienten för vinkelrät polarisering jämfört med parallell polarisering mot infallsplanet.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Snells lag kan härledas genom att studera randvillkoren i gränsen mellan olika material.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Reflektionskoefficienten för fält amplituden härleds genom att studera randvillkoren i gränsen mellan olika material.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
En optisk fiber bygger på totalreflektion.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Totalreflektion sker vid Brewstervinkeln.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Totalreflektion är möjlig då ljusstrålen försöker gå från ett optiskt tätare till ett optiskt tunnare medium.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Tenta 060828

1. Potentialen är sfäriskt symmetrisk. Alltså är även rymdladdningen det, dvs $\rho = \rho(r)$

$$\text{Mha Poissons ekvation för } \nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

För $r < a$

$$\begin{aligned}\rho &= -\epsilon_0 \nabla^2 V = -\epsilon_0 \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[r^2 \frac{\partial}{\partial r} \left[V_0 \left(1 - \frac{r^2}{a^2} \right) \right] \right] = -\epsilon_0 \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[-\frac{2V_0 r^3}{a^2} \right] \\ &= \frac{6\epsilon_0 V_0}{a^2} = \text{konstant}\end{aligned}$$

$$\text{Total laddning innanför } r=a \text{ blir alltså } Q_{rca} = \frac{6\epsilon_0 V_0}{a^2} \cdot \frac{4\pi a^3}{3} = 8\pi\epsilon_0 V_0 a$$

För $r > a$ gäller $V=0 \Rightarrow \rho=0$. Därmed gäller även att

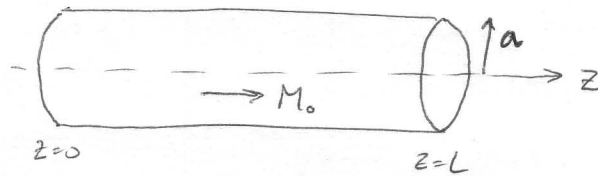
$E = -\nabla V = 0$. Totala laddningen för mha Gauss lag och

$$\text{en Gaussyta vid } r > a, \quad Q_{\text{tot } r > a} = \oint E \cdot dS = 0$$

Eftersom $Q_{rca} \neq 0$ måste det finnas en ytladdning $-Q_{rca}$ på

$$\text{ytan } r=a. \text{ Ytladdningstätheten blir } \rho_{r=a} = -Q_{rca} / 4\pi a^2 = -\frac{2\epsilon_0 V_0}{a}$$

2



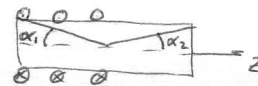
$$\mathbf{M} = M_0 \hat{z}$$

Ekvivalenta strömmar: $\mathbf{J}_m = \nabla \times \mathbf{M} = 0$

$$\mathbf{J}_{ms} = \mathbf{M} \times \hat{n} = \hat{z} M_0 \times \hat{r} = M_0 \hat{\phi}$$

Använd formeln för en cirkulär spole med N varv och ström i

$$B_z = \frac{\mu_0 N i}{2L} (\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2)$$



I spolens mitt ($z = \frac{L}{2}$): $\alpha_1 = \alpha_2$: $\cos \alpha = \frac{L/2}{\sqrt{a^2 + (L/2)^2}}$

Med $Ni = \mathbf{J}_{ms} \cdot L = M_0 L$ fås

$$B_z\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{\mu_0 M_0}{2} \cdot 2 \frac{L/2}{\sqrt{a^2 + (L/2)^2}} = \frac{\mu_0 M_0 L}{2\sqrt{a^2 + L^2/4}}$$

$$H_z\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{B_z}{\mu_0} - M_0 = -M_0 \left[1 - \frac{L}{2\sqrt{a^2 + L^2/4}} \right]$$

I spolens ändpunkt ($z = L$) α_1 : $\cos \alpha_1 = \frac{L}{\sqrt{a^2 + L^2}}$ α_2 : $\cos \alpha_2 = 0$

$$B_z(L) = \frac{\mu_0 M_0}{2} \left(\frac{L}{\sqrt{a^2 + L^2}} + 0 \right) = \frac{\mu_0 M_0 L}{2\sqrt{a^2 + L^2}}$$

$$H_z(L) = \frac{B_z}{\mu_0} - M_0 = -M_0 \left[1 - \frac{L}{2\sqrt{a^2 + L^2}} \right]$$

3

In för vektorerna $a_1 = (a_1, a_2, a_3)$

$$k = \omega a_1 / c$$

Nu kan vi skriva uttrycket på "vänligt" sätt

$$E(r, t) = \operatorname{Re} \left\{ E_0 \exp[i(k \cdot r - \omega t)] \right\}$$

$$\vec{E}(r) \approx E_0 e^{i k \cdot r}$$

Ovanstående uttryck insatt i Gauss lag för vakuum $\nabla \cdot E = 0 \Rightarrow$ $k \cdot E_0 = 0$. Med $k = \frac{\omega a_1}{c}$ måste alltså gälla att $a_1 \cdot E_0 = 0$ för att Maxwells ekr ska vara uppfyllda.Uttrycken $\nabla \times \vec{E} = -j\omega \mu_0 \vec{H}$ och $\nabla \times \vec{H} = j\omega \epsilon_0 \vec{E}$ med

samma ansats (plus motsvarande ansats för H-fältet) ger

$$k \times E_0 = \mu_0 \omega H_0 \quad \text{respektive} \quad k \times H_0 = -\epsilon_0 \omega E_0$$

Kombinera dessa två ekr $\Rightarrow: (k^2 - \epsilon_0 \mu_0 \omega^2) E_0 = 0$ där $k = |k|$

och motsvarande för H-fältet

$$\text{Alltså måste det gälla att } k^2 - \epsilon_0 \mu_0 \omega^2 = 0$$

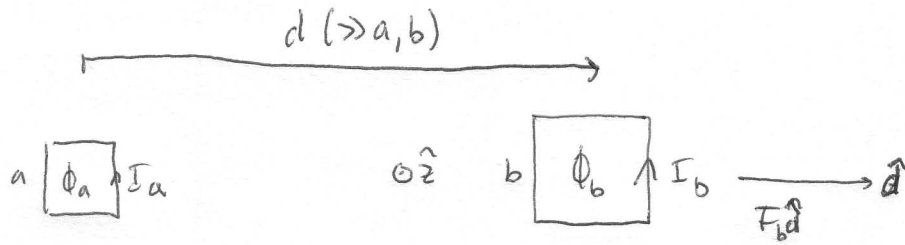
$$\text{eller } k^2 = \epsilon_0 \mu_0 \omega^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$$

Med $k = \frac{\omega a_1}{c}$ betyder det att $|a_1|^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1$

Alltså måste det gälla att

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1 \quad \text{och} \quad a_1 \cdot E_0 = 0$$

4



Ömsesidiga induktansen

$$L_{ab} = \frac{\Phi_b}{I_a} = \frac{\Phi_a}{I_b}$$

Flödet:

$$\Phi_b = \int_{S_b} \vec{B}_a \cdot d\vec{a} \approx B_a \cdot b^2 \hat{z} \quad \text{for } (d \gg a, b)$$

B_a betecknar fältet i slinga b från slinga a. Då $d \gg a$ approximerar vi fältet B_a med fältet från en magnetisk dipol med dipolmomentet $m_a = I_a a^2$

$$\text{Fältet blir då: } B_a \approx -\frac{\mu_0 m_a}{4\pi d^3} \hat{z} \Rightarrow \Phi_b \approx -\frac{\mu_0 I_a a^2 b^2}{4\pi d^3}$$

$$\text{Ömsesidiga induktansen } L_{ab} = L_{ba} \approx -\frac{\mu_0 a^2 b^2}{4\pi d^3} \quad (\text{tecken p.g.a. strömriktningar})$$

Krafter mellan slingorna

Löses med hjälp av metoden för virtuella förflyttningar

$$\text{Systemets energi: } W = L_{aa} I_a^2 + L_{ab} I_a I_b + L_{bb} I_b^2$$

$$\text{Kraften: } \vec{F}_b = \left. \frac{\partial W(d, I_a, I_b)}{\partial d} \right|_{I_a, I_b} = I_a I_b \frac{\partial L_{ab}}{\partial d} = \frac{3\mu_0 a^2 b^2 I_a I_b}{4\pi d^3}$$

(riktning enligt figur)

5. Utstrålad effekt:

$$P_{\text{utstrålad}} = \iint R^2 \cdot P(R, \phi, \theta) \cdot d\Omega \quad d\Omega = \sin\theta \, d\theta \, d\phi$$

$$= \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{\phi=0}^{2\pi} R^2 \cdot P_0 \cos^4\theta \sin^2\phi \sin\theta \, d\theta \, d\phi =$$

$$= R^2 P_0 \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\theta \sin\theta \, d\theta \int_{\phi=0}^{2\pi} \sin^2\phi \, d\phi$$

$u = \cos\theta$
$du = -\sin\theta \, d\theta$
$\theta \mid 0 \mid \frac{\pi}{2}$
$u \mid 1 \mid 0$

$$= R^2 P_0 \int_0^1 u^4 \, du \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos 2\phi}{2} \, d\phi =$$

$$= R^2 P_0 \cdot \left[\frac{u^5}{5} \right]_0^1 \cdot \left(\frac{2\pi}{2} - \int_0^{2\pi} \frac{\cos 2\phi}{2} \, d\phi \right) =$$

$$= \underline{\underline{\frac{\pi R^2}{5} P_0}}$$

Antennförstärkning:

$$G_D(\theta, \phi) = \frac{P(R, \theta, \phi) \cdot 4\pi R^2}{P_{\text{utstrålad}}} = \frac{P_0 \cos^4\theta \sin^2\phi \cdot 4\pi R^2}{\frac{\pi R^2}{5} P_0} =$$

$$= 20 \cos^4\theta \sin^2\phi$$

Direktivitet:

$$D = G_D \text{ max} = 20 \quad \left(\theta = 0, \phi = \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2} \right)$$