Fält 26. Tentamen i Elektromagnetisk fältteori för F2.
EEF031 25/8 2003 kl. 14.15-18.15

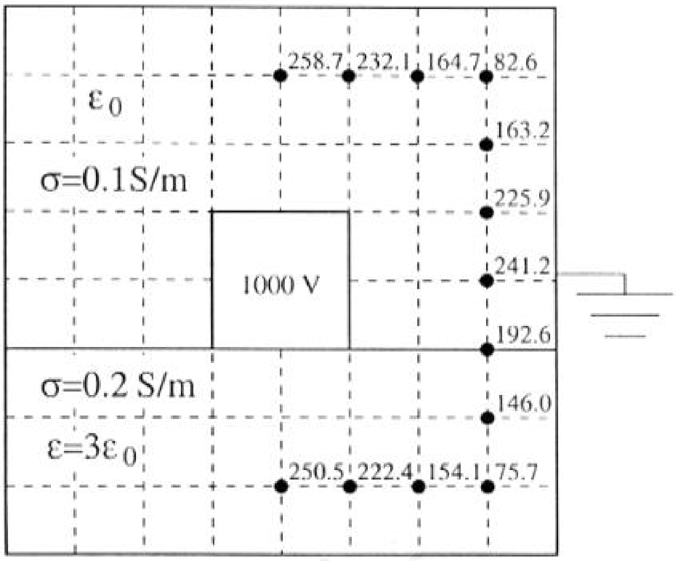
Tillåtna hjälpmedel:	BETA, Physics Handbook, Formelsamling i Elektromagnetisk fältteori, Valfri kalkylator men inga egna anteckningar utöver egna formler på sista bladet i formelsamlingen i Elektromagnetisk fältteori
Förfrågningar:	Mikael Persson Tel. ankn. 1576
Lösningar:	anslås på kursens hemsida efter tentan
Resultatet:	anslås på kursens hemsida senast 5/9 2003
Granskning:	sker 5/9 klockan 11.45-13.00
Betygen:	sändes till betygsexpeditionen senast 8/9 2003
Kom ihåg	Poängavdrag göres för otydliga figurer, utelämnade referensriktningar, dimensionsfel och utelämnade motiveringar.

Lycka till!

1

Problemlösningsdel

Figuren nedan visar tvärsnittet av ett långt metallrör med kvadratiskt tvärsnitt med längden 8 cm. I mitten av röret vilar en kvadratisk metallstång med sidan 2 cm på ett dielektrikum med $\epsilon_r = 3$ och $\sigma = 0.2$ S/m. Resten av volymen mellan de yttre och inre ledarna är fylld med luft, där $\epsilon_r = 1$ och $\sigma = 0.1$ S/m. Man lägger en spänning på 1000 V mellan ledarna och löser sedan Laplaces ekvation i noderna i det kvadratiska rutnätet i figuren. I figuren visas några av de beräknade potentialvärdena.



A) Använd de i figuren visade potentialvärdena för att beräkna laddningen på den inre ledaren. Glöm ej att ta hänsyn till de två områdena med olika ϵ. — 4 poäng

B) Beräkna resistansen per längdenhet mellan inner- och ytterledare. — 2 poäng

C) Hur ändras resistansen om $\sigma = 0.1$ S/m överallt. — 2 poäng

---

Förståelsedel

D) Vilket eller vilka postulat bygger lösningen ovan på? Vad säger det/de i ord? Skiljer de sig från Maxwells fulla ekvationer? I så fall hur? Beskriv med ord hur man kommer från postulaten till det slutliga uttrycket. — 1 poäng

E) Det elektrostatiska fältet är konservativt. Vad följer från detta? — 1 poäng

F) Spänningen mellan två punkter är relaterad till arbetet att föra en laddning mellan punkterna. Förklara kortfattat. — 1 poäng

G) Den elektriska dipolen används för att modellera de dielektriska egenskaperna. Förklara kortfattat. — 1 poäng

2.

Problemlösningsdel

I en likströmsapplikation utgörs en ledare av ett rakt, långt, platt, tunt metallband.

A) Beräkna magnetfältet rakt ovanför bandet **8 poäng**

Förståelsedel

B) Vilket eller vilka postulat ligger till grund för magnetostatiken?
Vad säger det/de i ord?
Beskriv med ord hur man kommer från postulaten till det slutliga uttrycket i **A)** **1poäng**

C) Kraften d**F**=**J**x**B** dV kan under vissa omständigheter övergå i formen F=BIL som vi känner till från gymnasiet. Rita en bild och visa hur och under vilka förhållanden detta kan ske. **1poäng**

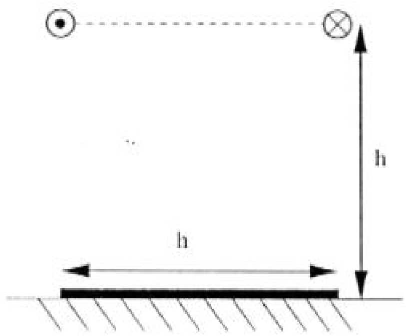
D) Jämför de olika metoder som vi använt i kursen för att beräkna magnetfält från strömförande ledare. **1poäng**

E) Beskriv hur det jordmagnetiska fältet påverkar en kompassnål. Hur kan man förklara existensen av de jordmagnetiska fältet?

1poäng

Problemlösningsdel

Mikael bor alldeles intill en enfas kraftledning för 50 Hz. Han tycker att elräkningen är för dyr och funderar därför på att "stjäla" effekt från elleverantören, genom att använda induktionslagen; ett förfarande som är straffbart. Mikael placerar därför mitt under kraftledningen på det vertikala avståndet h en horisontell kvadratisk slinga, med sidan h och ett varv, på sådant sätt att två av sidorna blir parallella med ledningen. Han mäter sedan upp den i slingan inducerade spänningen och blir väldigt besviken! Andreas beräknar i stället den inducerade spänningen och sparar därigenom en mängd onödigt besvär. Han uppskattar effektivvärdet, I_{eff}, av strömmen i kraftledningen. Trådarna ligger på samma höjd och har inbördes avståndet h. Han antar vidare att man kan bortse från markens inverkan på den inducerade spänningen.



A) Vilket uttryck för den inducerade spänningens effektivvärde får Andreas om $h = 5$ m, $I_{eff} = 500$ A? — 6 poäng

B) Hur skulle Mikael kunna förbättra sin lömska plan? — 2 poäng

---

Förståelsedel

C) Vilket eller vilka postulat bygger lösningen ovan på?
Vad säger det/de i ord?
Skiljer de sig från Maxwells fulla ekvationer? I så fall hur?
Beskriv med ord hur man kommer från postulaten till det slutliga uttrycket. — 1 poäng

D) Integralen av magnetfältet över en sluten yta är alltid noll. Förklara kortfattat. — 1 poäng

E) Vad är en hystereskurva? — 1 poäng

F) Beskriv kortfattat med egna ord vad som händer med laddningar på en ledande stång som rör sig i ett statiskt magnetfält. — 1 poäng

4.

Problemlösningsdel

En cirkulärt polariserad plan våg i vakuum träffar en plan gränsyta till ett förlustfritt dielektrikum med dielektricitetstalet $\varepsilon_r = 1.69$ under Brewstervinkel.

A) Skriv upp ett tidsberoende uttryck på det elektriska fältet hos den infallande vågen uttryckt i två linjärt polariserade vågor och rita en figur som visar hur dessa vågor faller in mot gränsytan. **2poäng**

B) Beräkna reflektionskoefficienterna för fälten. **2poäng**

C) Beräkna transmissionskoefficienterna för fälten. **2poäng**

D) Beräkna tidsmedelvärdena av Poyntingvektorerna hos infallande, reflekterad och transmitterad våg. **2poäng**

Förståelsedel

E) Vilket eller vilka postulat bygger lösningarna ovan på?
Vad säger det/de i ord?
Beskriv med ord hur man kommer från postulaten till det använda uttrycket i uppgift **B)** **1poäng**

F) Beskriv vad poyntingvektorn uttrycker i ord. **1poäng**

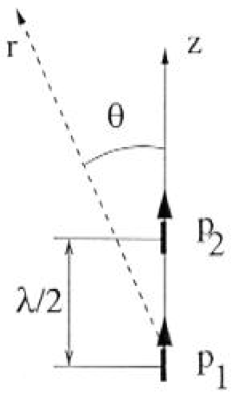
G) Beskriv kortfattat begreppen vågimpedans och fashastighet. **1poäng**

H) Vad har inträngningsdjupet för betydelse vid uppvärmning av mat i en mikrovågsugn? **1poäng**

5

Problemlösningsdel

Två elektriska elementardipoler, $\mathbf{p_1} = p_0 \cos(\omega t)\hat{\mathbf{z}}$, $\mathbf{p_2} = p_0 \cos(\omega t + \alpha)\hat{\mathbf{z}}$, ligger utefter z-axeln i punkterna $z = 0$ respektive $z = \lambda/2$ (λ = våglängden). Ledning: Skillnaden i avståndet mellan källpunkt och fältpunkt från de två dipolantennerna påverkar fasen men inte amplituden.



A) Bestäm α så att fältbidragen i fjärrzonen från bägge dipolerna ligger i fas i riktningen $\theta = \pi/3$ (60°). 6 poäng

B) Med ovan bestämda α, bestäm också de riktningar θ där fjärrzonsfältet är noll. 2 poäng

---

Förståelsedel

C) Vilket eller vilka postulat bygger lösningen ovan på?
Vad säger det/de i ord?
Skiljer de sig från Maxwells fulla ekvationer? I så fall hur?
Beskriv med ord hur man kommer från postulaten till det slutliga uttrycket. 1 poäng

D) Vad är en antenns strålningsresistans. När är den viktig och när är den mindre viktig? 1 poäng

E) När ska en antenn ha stor direktivitet och när ska den ha liten? 1 poäng

F) Beskriv någon möjlig användning av antennuppställningen ovan. 1 poäng

Tenta 2003-08-25 (Fält 26)

(1)

a) Lägg en gaussyta mellan röret och gridpunkterna med kända potentialer
Pga symmetrin räcker det att göra beräkningarna på halva området, (där potentialerna är beräknade)
Diskretiserar Gauss lag och approximerar E-fältet utifrån de givna potentialerna som

$$E = -\nabla U \approx \frac{U_{innre} - U_{yttre}}{\Delta}$$

(Δ är avståndet mellan noderna i griden)
Beräkna laddningen per längdenhet

$$\frac{\rho_{inneslutet}}{2} = \int_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} \approx \sum_S \varepsilon_i E_i \, ds_i$$

$$\left\{ \text{Vi har} \quad U_{yttre} = 0 \;;\; ds_i = 1 \cdot \Delta \right\}$$

$$\rho_{inneslutet} = 2 \cdot \Big[\varepsilon_0 \big(\tfrac{1}{2} 258{,}7 + 232{,}1 + 164{,}7 + 82{,}6 \cdot 2 + 163{,}2 + 225{,}9 + 241{,}2 + \tfrac{1}{2} \cdot 192{,}6 \big) + 3\varepsilon_0 \big(\tfrac{1}{2} \cdot 192{,}6 + 146{,}0 + 75{,}7 + 154{,}1 + 222{,}4 + \tfrac{1}{2}\, 250{,}5 \big) \Big]$$

$$= 6{,}87 \cdot 10^{-8} \ \text{C/m}$$

b) Resistans per längdenhet:
Beräkna strömmen som flyter mellan inner- och ytterledare.

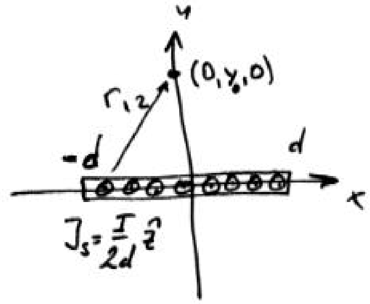
$$\frac{I}{2} = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} = \int_S \sigma \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} \approx \sum_S \sigma_i E_i \, ds_i \quad \Rightarrow$$

$$I = 2 \Big[0{,}1 \big(\tfrac{258{,}7}{2} + 232{,}1 + 164{,}7 + 82{,}6 \cdot 2 + 163{,}2 + 225{,}9 + 241{,}2 + \tfrac{192{,}6}{2} \big) + 0{,}2 \big(\tfrac{192{,}6}{2} + 146{,}0 + 75{,}7 + 154{,}1 + 222{,}4 + \tfrac{250{,}5}{2} \big) \Big] = 612 \ \text{A/m}$$

Resistans/längdenhet: $R = \frac{U}{I} = \frac{1000}{612}\,\Omega = 1{,}64\,\Omega$

c) Strömmen minskar $\Rightarrow$ Resistansen ökar

2A



Beräkna magnetfältet i punkten $(0,y_0,0)$ genom att summera bidragen från strömrör i ledaren.

Fältet från en oändligt lång rak ledare: $d\mathbb{B} = \frac{\mu_0 J_s\, dx}{2\pi r_{12}}\hat{\varphi}$

Nu har vi $\mathbb{r}_{12} = \mathbb{r}_2 - \mathbb{r}_1 = -\hat{x}x + \hat{y}y_0$

$r_{12} = \sqrt{x^2 + y_0^2}$

$\hat{\varphi}$ uttrycker vi i $\hat{x}$ och $\hat{y}$ genom följande beräkning

$$\hat{\varphi} = \frac{\hat{z} \times \mathbb{r}_{12}}{r_{12}} = \frac{-\hat{y}x - \hat{x}y_0}{\sqrt{x^2 + y_0^2}}$$

Så nu har vi $d\mathbb{B}$:

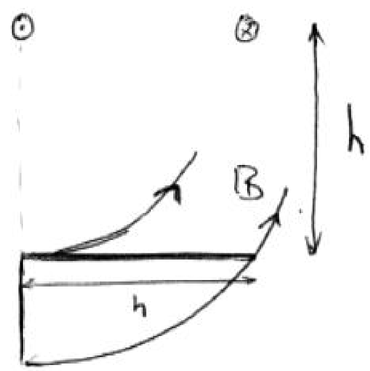
$$d\mathbb{B} = \frac{\mu_0 (I/2d)}{2\pi} \cdot \frac{-\hat{x}y_0 - \hat{y}x}{(x^2 + y_0^2)}\, dx$$

Vi integrerar nu upp fältet över hela ledaren. Pga symmetri ser vi att $\hat{y}$-komponenten av fältet canceleras och vi får bara ett bidrag i $\hat{x}$-led.

$$\mathbb{B}(y) = \int_{x=-d}^{d} \frac{\mu_0 I}{4\pi d} \frac{-y_0}{x^2 + y_0^2}\, dx\, \hat{x} = \frac{-y\mu_0 I}{4\pi d}\left[\frac{1}{y_0}\arctan\frac{x}{y_0}\right]_{x=-d}^{d} =$$

$$= \frac{-\mu_0 I}{4\pi d}\left[\arctan\frac{d}{y_0} - \arctan\left(\frac{-d}{y_0}\right)\right] = -\frac{\mu_0 I}{2\pi d}\arctan\left(\frac{d}{y_0}\right)$$

③ a) Kraftledningens båda trådar ger lika stora och samverkande bidrag till flödet. B-linjerna från en tråd passerar vinkelrätt genom en yta rakt under tråden vilken begränsas av avstånden h och $h\sqrt{2}$ från tråden



Totala flödet genom slingan:

$$\Phi = 2 \cdot h \int_h^{h\sqrt{2}} B_\varphi \, dr$$

Fältet från lång rak ledare: $B_\varphi = \frac{\mu_0 I(t)}{2\pi r}$

$$\Phi = 2h \int_h^{h\sqrt{2}} \frac{\mu_0 I(t)}{2\pi r} dr = \frac{h \mu_0 I(t)}{2\pi} \ln 2$$

Strömmen kan vi skriva $I = I_{eff} \sqrt{2} \cos(\omega t)$

$$V_{ind} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}\left(\frac{h \mu_0 I_{eff} \sqrt{2} \cos \omega t \ \ln 2}{2\pi} \right) = \frac{h \mu_0 I_{eff} \sqrt{2} \omega \sin \omega t \ln 2}{2\pi}$$

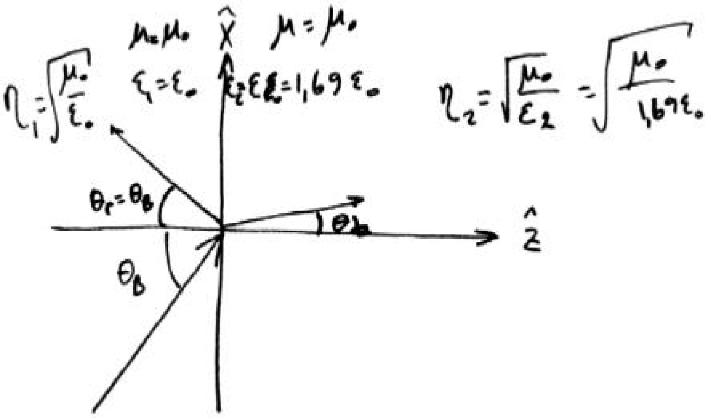
$$V_{ind,eff} = \frac{|V_{ind}|}{\sqrt{2}} = \frac{h \mu_0 I_{eff} \omega \ln 2}{2\pi} = \frac{5 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 500 \cdot 2\pi \cdot 50 \cdot \ln 2}{2\pi} =$$

$= 0{,}11 \text{ V}$ (ganska liten alltså)

b) Den inducerade spänningen skulle kunna ökas om vi ökade antalet varv i spolen. Med n varv skulle den inducerade spänningen bli $U_{ind,eff,n} = n \cdot 0{,}11$ V

Vi skulle även kunna göra spolen större, i riktningen längs med kraftledningen, för att öka flödet Φ genom spolen.

4A



Brewstervinkeln beräknar vi som $\tan\theta_B=\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}=\sqrt{1{,}69}$

$\theta_B=52{,}4^\circ$

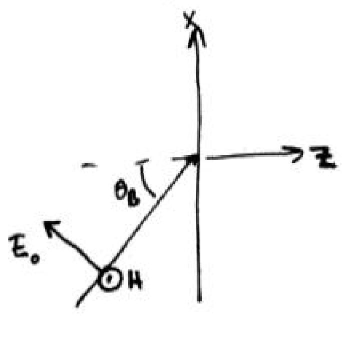
Cirkulärpolariserat betyder att fasförskjutningen är $\frac{\pi}{2}$ mellan de två vinkelrätt linjärpolariserade vågorna

Infallande vågen kan då skrivas som:

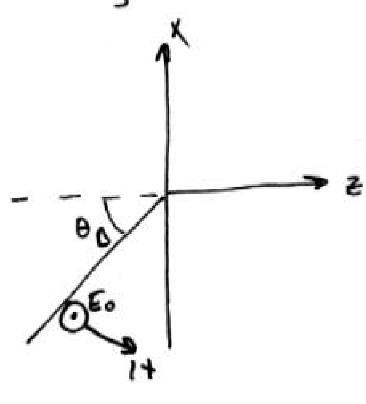
$$\mathbf{E}=E_0\left(\hat{x}\cos\theta_B-\hat{z}\sin\theta_B\right)\cos\left(\omega t-k_1[x\sin\theta_B+z\cos\theta_B]\right)+$$
$$E_0\,\hat{y}\,\sin\left(\omega t-k_1[x\sin\theta_B+z\cos\theta_B]\right)$$

Där k_1 är vågvektorn $k_1=\frac{2\pi}{\lambda}$

Den parallella polariseringen:



Vinkelrät polarisering



4B

$$\Gamma_{\parallel}=\left(\frac{E_{r0}}{E_{i0}}\right)_{\parallel}=0$$

$\boxed{\text{Snells lag ger } \theta_t: \sin\theta_t=\frac{\eta_2}{\eta_1}\sin\theta_B}$

$$\Gamma_{\perp}=\left(\frac{E_{r0}}{E_{i0}}\right)_{\perp}=\frac{\eta_2\cos\theta_B-\eta_1\cos\theta_t}{\eta_2\cos\theta_B+\eta_1\cos\theta_t}=-0{,}26$$

4C

$$\tau_{\parallel} = \left(\frac{E_{to}}{E_{io}}\right)_{\parallel} = \frac{2\eta_2 \cos\theta_B}{\eta_2 \cos\theta_t + \eta_1 \cos\theta_B} = 0{,}77$$

$$\tau_{\perp} \left(\frac{E_{to}}{E_{io}}\right)_{\perp} = \frac{2\eta_2 \cos\theta_B}{\eta_2 \cos\theta_B + \eta_1 \cos\theta_t} = 0{,}74$$

4D

Tidsmedelvärdet av Poyntingvektorerna

$$P_{medel} = \frac{E_0^2}{2\eta}$$

Infallande våg

$$P_{i\,medel} = \frac{E_0^2}{2\eta_1} \cdot 2 \qquad ; \eta_1 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}$$

Reflekterad:

$$P_{r\,medel} = \frac{\left[E_0 \cdot (-0{,}26)\right]^2}{2\eta_1}$$

Transmitterad:

$$P_{t\,medel} = \frac{E_0^2 (0{,}77^2 + 0{,}74^2)}{2\eta_2} = \frac{E_0^2 (0{,}77^2 + 0{,}74^2)}{2 \cdot \frac{\eta_1}{1{,}3}} = \frac{E_0^2}{2\eta_1} 1{,}48$$

(5) a) Avståndet från dipolerna till fjärrzonpunkten blir

$r_1 = r \quad r_2 = r - \frac{\lambda}{2}\cos\theta$

Summerar fältbidragen från dipolerna för att få det totala fältet:

Fältet från en dipol: $\bar{E}(r,\theta,\varphi) = \hat{\theta} Z_0 \frac{j\omega l i_0 \sin\theta}{4\pi c R} e^{-j\omega R/c}$

och $\bar{p} = \frac{\hat{z} l \hat{i}_0}{j\omega}$

Skriver nu om som

$$\bar{E}(r,\theta) = \hat{\theta} \frac{-\mu_0 p \omega^2}{4\pi} \frac{\sin\theta}{R} e^{-j\omega R/c}$$

Skriver p_1 och p_2 på komplex form

$$p_1 = p_0 \hat{z} \qquad p_2 = p_0 e^{j\alpha} \hat{z}$$

Summerar:

$$\bar{E}(r,\theta) = \hat{\theta} \frac{-\mu_0 p_0 \omega^2}{4\pi} \frac{\sin\theta}{R} \left(e^{-j\frac{\omega r_1}{c}} + e^{j\alpha} e^{-j\frac{\omega r_2}{c}} \right)$$

$$= \hat{\theta} \frac{-\mu_0 p_0 \omega^2}{4\pi} \frac{\sin\theta}{R} \left(e^{-j\frac{\omega r_1}{c}} + e^{-j\left(\frac{\omega r_2}{c} - \alpha\right)} \right)$$

$$= \hat{\theta} \frac{-\mu_0 p_0 \omega^2}{4\pi} \frac{\sin\theta}{R} \left(e^{-\frac{j\omega r}{c}} + e^{-j\left(\frac{\omega r}{c} - \frac{\omega \lambda}{2c}\cos\theta - \alpha\right)} \right)$$

$$\left\{ \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda} \right\} = \hat{\theta} \frac{-\mu_0 p_0 \omega^2}{4\pi} \frac{\sin\theta}{R} \left(e^{-\frac{j\omega r}{c}} + e^{-j\left(\frac{\omega r}{c} - \pi\cos\theta - \alpha\right)} \right)$$

För att dipolerna ska ha samma fasläge måste gälla

att $-\alpha - \pi\cos\theta = n \cdot 2\pi \quad$ (n = **heltal**)

för $\theta = \frac{\pi}{3}$ får $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow -\alpha - \frac{\pi}{2} = n \cdot 2\pi \Rightarrow \alpha = -\frac{\pi}{2} + n\,2\pi$$

b)

Nollriktningarna är sådana att

$$\sin\theta \, Re\{(e^{-j\frac{\omega r}{c}} + e^{-j(\frac{\omega r}{c} - \pi\cos\theta - \alpha)})e^{j\omega t}\} = 0$$

$$\sin\theta \left\{\cos(\omega t - \frac{\omega r}{c}) + \cos(\omega t - \frac{\omega r}{c} + \pi\cos\theta + \alpha)\right\} = 0$$

För alla t och $r > 0$.

Först får vi nollställe då $\sin\theta = 0$

$\Rightarrow \theta = 0$ och π

Dessutom nollställen då

$$\cos(\omega t - \frac{\omega r}{c}) + \cos(\omega t - \frac{\omega r}{c} + \pi\cos\theta + \alpha) = 0$$

Med $\omega(t - \frac{r}{c}) = x$ och $\pi\cos\theta + \alpha = \pi(\cos\theta - \frac{1}{2}) = y$

fås

$$\cos x + \cos(x+y) = \cos x + \cos x\cos y - \sin x \sin y = 0 \ \forall x$$

$\Rightarrow 1 + \cos y = \tan x \sin y \quad \forall x \quad \Rightarrow$

Nollställen finns $\forall x$ då

$0 = \sin y = 1 + \cos y$

$\Rightarrow y = (2n+1)\pi$ där n = heltal

$$\Rightarrow \cos\theta = \frac{4n+3}{2}$$

θ reell endast för $n = -1 \Rightarrow$

$\cos\theta = -\frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \frac{2\pi}{3}$

Så nollriktningarna blir $\theta = \{0, \frac{2\pi}{3}, \pi\}$