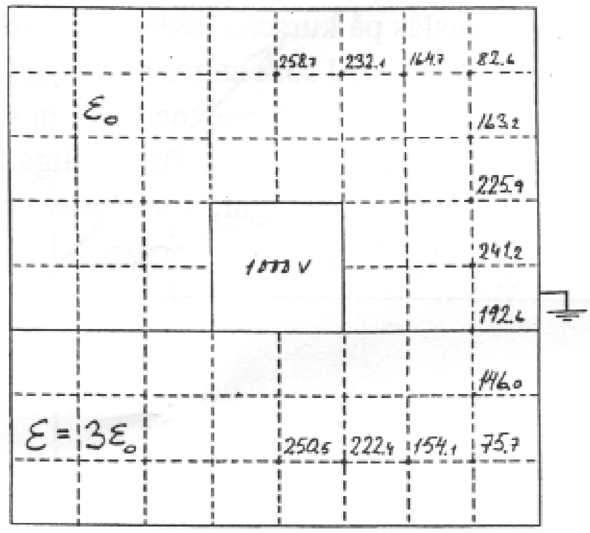
Fält 21. Tentamen i Elektromagnetisk fältteori för F2.
EEF031 20/12 2001 kl. 8.45-12.45

Tillåtna hjälpmedel:	BETA, Physics Handbook, Formelsamling i Elektromagnetisk fältteori, Valfri kalkylator men inga egna anteckningar utöver egna formler på sista bladet i formelsamlingen i Elektromagnetisk fältteori
Förfrågningar:	Mikael Persson Tel. ankn. 1576
Lösningar:	anslås på kursens hemsida
Resultatet:	anslås på kursens hemsida senast 21/1 2002
Granskning:	sker på tid som anges på betygslistan
Betygen:	sändes till betygsexpeditionen senast 21/1 2002
Kom ihåg	Poängavdrag göres för otydliga figurer, utelämnade referensriktningar, dimensionsfel och utelämnade motiveringar.

1.

Problemlösningsdel

Figuren nedan visar tvärsnittet av ett långt metallrör med kvadratiskt tvärsnitt med längden 8cm. I mitten av röret vilar en kvadratisk metallstång med sidan 2cm på på ett dielektrika med relativa dielektristetskonstanten 3. Resten av volymen mellan de yttre och inre ledarna är fylld med luft. Man lägger en spänning på 1000 V mellan ledarna och löser sedan Laplaces ekvation i noderna i det kvadratiska rutnätet i figuren.



A) Använd de i figuren visade potentialvärdena för att beräkna laddningen på den inre ledaren. **6poäng**

B) Beräkna kapacitansen per längdenhet för röret. **2poäng**

Förståelsedel

C) Vilket eller vilka postulat bygger lösningen ovan på?
Vad säger det/de i ord?
Skiljer de sig från Maxwells fulla ekvationer? I så fall hur.
Beskriv med ord hur man kommer från postulaten till det använda uttrycket i uppgift A). **1poäng**

D) Definiera begreppen elektrostatisk energi och elektrostatisk potential
De är relaterade. Beskriv kortfattat hur. **1poäng**

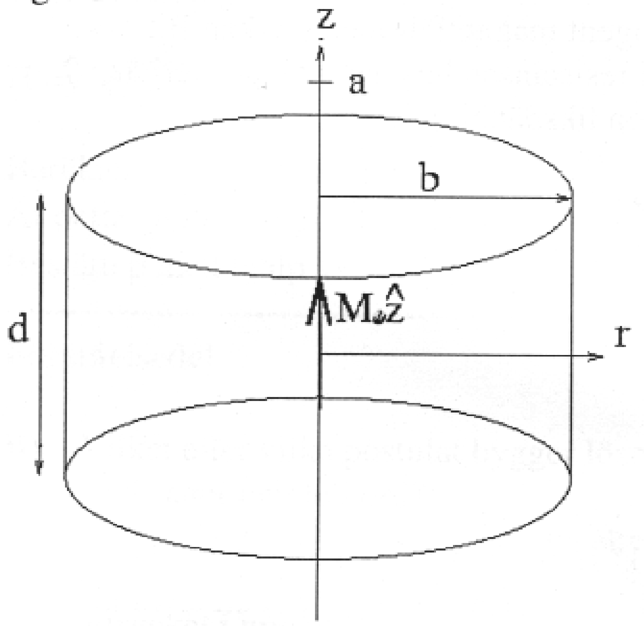
E) I elektrostatiken använder vi att div(**J**) = 0. Rita en figur och förklara vad detta motsvarar i kretsteorin. **1poäng**

F) Rita en figur och förklara kortfattat vad uttrycket $\mathbf{E}+\mathbf{E}_k = \eta\mathbf{J}$, där $\mathbf{E}_k$ är en yttre källterm, beskriver i kretsteorin **1poäng**

2.

Problemlösningsdel

En cylindrisk permanentmagnet har konstant magnetisering $M=M_0\hat{z}$ enligt figuren.



A) Beräkna Magnetiseringsströmtätheten och ytmagnetiseringsströmtätheten.

4 poäng

B)Beräkna magnetfältet i en punkt z=a, x=0, y=0 ovanför magneten

4 poäng

Förståelsedel

C) Vilket eller vilka postulat bygger lösningen ovan på?
Vad säger det/de i ord?
Skiljer de sig från Maxwells fulla ekvationer? I så fall hur.
Beskriv med ord hur man kommer från postulaten till det slutliga uttrycket **1poäng**

D) Kraften d**F**=**J**x**B** dV kan under vissa omständigheter övergå i formen F=BIL som vi känner till från gymansiet. Rita en bild och visa hur och under vilka förhållanden detta kan ske. **1poäng**

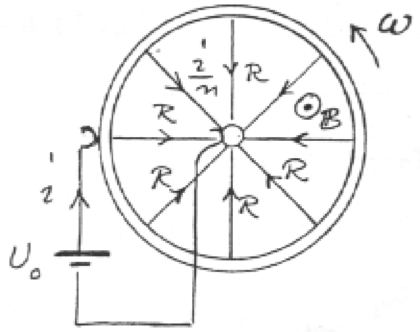
E) Jämför de olika metoder som vi använt i kursen för att beräkna magnetfält från strömförande ledare. **1poäng**

F) Med en av GUI'sarna räknade vi på en cylindrisk permanentmagnet. Magnetfältet visade sig vara väldigt lika magnetfältet från en tätlindad solenoid. Förklara varför. **1poäng**

3.

Problemlösningsdel

En enkel likströmsmotor består av ett ekerhjul med radien a och ett antal ekrar. Hjulet befinner sig i ett axiellt homogent magnetfält med styrkan B_0. Varje eker har en resistans R medan resistansen hos nav och periferi är försumbara. Motorn är ansluten till en likspänning U_0.



A)Beräkna motorns mekaniska effekt som funktion av vinkelhastigheten ω, antingen genom att använda energikonservering eller genom att använda sambandet mellen vinkelfrekvens, vridmoment och effekt. **8poäng**

Förståelsedel

B) Vilket eller vilka postulat bygger lösningen ovan på?
Vad säger det/de i ord?
Skiljer de sig från Maxwells fulla ekvationer? I så fall hur.
Beskriv med ord hur man kommer från postulaten till det använda uttrycket i uppgift A) **1poäng**

C) Beskriv begreppet induktion kortfattat utan att använda formler **1poäng**

D) Rita, utifrån formeln i uppgift **A)**, upp den ekvivalenta elektriska kretsen **1poäng**

E) Beskriv kortfattat vad som händer med laddningar på en ledande stång som rör sig i ett statiskt magnetfält **1poäng**

4.

Problemlösningsdel

A)En ytvåg utbreder sig i vakuum i området z>0 längs en yta med ekvationen z=0. H-fältet ges av:

$$H = \hat{y}\, e^{-1000z} \cos(10^7 t - \beta x).$$

Beräkna tillhörande **E**-fält. **4poäng**

Är detta en plan våg? Motivera! **2poäng**

Bestäm β med hjälp av vågekvationen. **2poäng**

Förståelsedel

B) Vilket eller vilka postulat bygger lösningarna ovan på?
Vad säger det/de i ord?
Skiljer de sig från Maxwells fulla ekvationer? I så fall hur?
Beskriv med ord hur man kommer från postulaten till det använda uttrycket i uppgift A) **1poäng**

C) Beskriv vad poytingvektorn uttrycker i ord. **1poäng**

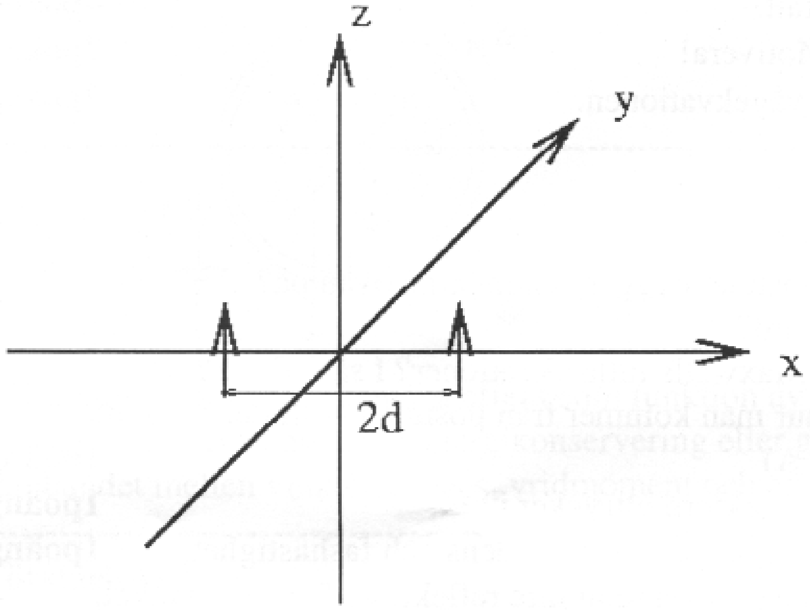
D) Beskriv kortfattat begreppen vågimpedens och fashastighet. **1poäng**

E) Beskriv kortfattat begreppen total inre reflektion, Brewstervinkel, skineffekt och inträngningsdjup. **1poäng**

5.

Problemlösningsdel

A)Två dipoler som är orienterade i z-led drivs i fas och är placerade symmetriskt runt origo utefter x-axeln. Bestäm avståndet mellan dipolerna så att intensiteten av vågen längs x-axeln är 50% av intensiteten av vågen längs y-axeln.. **8poäng**



Förståelsedel

B) Vilket eller vilka postulat bygger lösningen ovan på?
Vad säger det/de i ord?
Skiljer de sig från Maxwells fulla ekvationer? I så fall hur?
Beskriv med ord hur man kommer från postulaten till det använda uttrycket i uppgift A). **1poäng**

C) Vad är strålningsresistansen för en antenn ett mått på? **1poäng**

D) Hur räknar man ut antennförstärkningen för en antenn? **1poäng**

E) Vad är direktiviteten för en antenn och varför är den viktig?. **1poäng**

Tenta 011220

1 Lägg en Gaussyta mellan röret och gridpunkterna med kända potentialer

$$\frac{\rho_{e,\text{innesluten}}}{2} = \varepsilon_0 \left[\frac{1}{2}\cdot 258{,}7 + 232{,}1 + 164{,}1 + 82{,}6 + 163{,}2 + 225{,}9 + \ldots\right.$$

$$\left. + 241{,}2 + \frac{1}{2}\cdot 192{,}6\right] + 3\varepsilon_0 \left[\frac{1}{2}\cdot 192{,}6 + 146{,}0 + 75{,}7 + 154{,}1 + 222{,}4 + \frac{1}{2}\cdot 250{,}5\right]$$

$$\Rightarrow \rho_{e,\text{innesluten}} = 2\cdot\varepsilon_0\,(1335 + 3\cdot 819{,}75) = 6{,}72\cdot 10^{-8}\ \text{C/m}$$

$$C_e = \frac{\rho_e}{\Delta V} = \frac{6{,}72\cdot 10^{-8}}{1000}\ \text{F/m} = 67{,}2\ \text{pF/m}$$

2)

Magnetiseringsströmmar:

Magnetiseringsströmtäthet:

$$\mathbb{J}_{mv} = \nabla \times \mathbb{M} = \nabla \times (M_0 \hat{z}) = 0$$

Ytmagnetiseringsströmtäthet:

$$\mathbb{J}_{ms} = \mathbb{M} \times \hat{n} = M_0 \hat{z} \times \begin{cases} +\hat{z} & \text{på toppen} \\ \hat{r} & \text{på mantelytan} \\ -\hat{z} & \text{på botten} \end{cases} = \begin{cases} 0 \\ M_0 \hat{\varphi} \\ 0 \end{cases}$$

B-fältet fås som:

$$\mathbb{B}(R_2) = \int_{S_{mantel}} \frac{\mu_0 \mathbb{J}_{ms}(\mathbb{R}_1) \times \mathbb{R}_{12}}{4\pi R_{12}^3} \, dS_1$$

$$\mathbb{R}_1 = b\hat{r} + z_1 \hat{z} \qquad (\text{källpt})$$
$$\mathbb{R}_2 = a\hat{z} \qquad (\text{fältpt})$$
$$\mathbb{R}_{12} = \mathbb{R}_2 - \mathbb{R}_1 = -b\hat{r} + (a - z_1)\hat{z}$$
$$R_{12} = \sqrt{b^2 + (a - z_1)^2}$$

$$\mathbb{J}_{ms} \times \mathbb{R}_{12} = M_0 \hat{\varphi} \times (-b\hat{r} + (a - z_1)\hat{z}) = M_0 (b\hat{z} + (a - z_1)\hat{r})$$

Pga symmetri ser vi att $\quad \mathbb{B}(\mathbb{R}_2) = B_z(\mathbb{R}_2)\hat{z}$

$$B_z(R_2 = a\hat{z}) = \int_{z_1=-d/2}^{d/2} \frac{\mu_0 \; M_0 \; b \; \hat{z}}{4\pi \; (b^2 + (a-z_1)^2)^{3/2}} \, 2\pi b \, dz_1 =$$

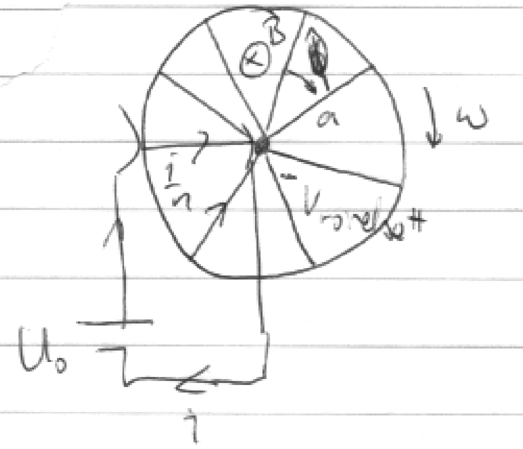
$$= \frac{\mu_0 b^2 M_0 \hat{z}}{2} \int_{z_1=-d/2}^{d/2} \frac{dz_1}{(b^2 + (a-z_1)^2)^{3/2}} = \left\{ a - z_1 = z' \Rightarrow \frac{dz'}{dz_1} = -1 \right\}$$

$$= \frac{\mu_0 b^2 M_0 \hat{z}}{2} \int_{a+d/2}^{a-d/2} \frac{-dz'}{(b^2 + (z')^2)^{3/2}} = \frac{-\mu_0 b^2 M_0 \hat{z}}{2} \left[\frac{z'}{b^2 \sqrt{z'^2 + b^2}} \right]_{a+d/2}^{a-d/2}$$

$$= -\frac{\mu_0 b^2 M_0 \hat{z}}{2} \left[\frac{a - d/2}{b^2 \sqrt{(a-\frac{d}{2})^2 + b^2}} - \frac{a + d/2}{b^2 \sqrt{(a+\frac{d}{2})^2 + b^2}} \right] =$$

$$= \frac{\mu_0 M_0 \hat{z}}{2} \left[\frac{a + d/2}{\sqrt{(a+\frac{d}{2})^2 + b^2}} - \frac{a - d/2}{\sqrt{(a-\frac{d}{2})^2 + b^2}} \right]$$

3



$a = 0{,}1$ m

$B = 0{,}5$ T

$R = 2\,\Omega$ per eker

$U_0 = 3$ V

$i = 10$ A

$n = 8$ antal ekrar

$\mathbf{F} = q(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$ ⇒ Kraften på pos laddningar

riktad radiellt utåt ⇒ Rörelse emk riktad utåt

$$V_{rörelse} = \int_L \mathbf{v} \times \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \int_{r=0}^{a} \omega r \hat{\varphi} \times B_0 \hat{z} \cdot \hat{r} dr =$$

$$= \int_{r=0}^{a} \omega r B_0 \hat{r} \cdot \hat{r} dr = \int_{r=0}^{a} \omega r B_0 dr = \frac{\omega a^2 B_0}{2}$$

Kirchoffs sp. delning: $U_0 - V_{rörelse} = R \cdot \frac{i}{n}$

$$\left(\Rightarrow i = \frac{n}{R}\left(U_0 - V_{rörelse}\right) = \frac{n}{R}\left(U_0 - \frac{1}{2}\omega a^2 B_0\right) \right)$$

$$U_0 - \frac{1}{2}\omega a^2 B_0 = R\frac{i}{n} \Rightarrow \omega = \left(-\frac{Ri}{n} + U_0\right)\frac{2}{a^2 B_0}$$

$$\Rightarrow \omega = \left(U_0 - \frac{Ri}{n}\right)\frac{2}{a^2 B_0}$$

$$P_{mek} = P_{batt} - P_{varme} = U_0 i - n\, R\left(\frac{i}{n}\right)^2 = i\underbrace{\left(U_0 - \frac{Ri}{n}\right)}_{\neq V_{motstand}}$$

$$= \frac{n}{R}\left(U_0 - \frac{1}{2}\omega a^2 B_0\right)\frac{\omega a^2 B_0}{2}$$

Alt. $\quad dF = I\, d\mathbf{l} \times \mathbf{B}$

Vridmoment på hjulet

$$T_{mek} = n\int_{r=0}^{a} r \times dF = n\int_{r=0}^{a} r\hat{r} \times \left(\frac{-i}{n}\, dr\,\hat{r} \times B_0\hat{z}\right)$$

$$= n\int_{r=0}^{a} r\hat{r} \times \frac{i}{n} B_0 \hat{\varphi}\, dr = B_0 i \int_{r=0}^{a} \hat{z}\, r\, dr \quad \frac{B_0 i a^2}{2}\hat{z}$$

$P_{mek} = \omega \cdot T_{mek} \qquad \{\omega = \omega\hat{z}\}\ P_{mek} = \frac{\omega B_0 i a^2}{2}$

$P_{mek} = P_{batt} - P_{varme} =$

$= i\left(U_0 - \frac{Ri}{n}\right)$

$$\Rightarrow \omega = \frac{i\left(U_0 - \frac{Ri}{n}\right)\cdot 2}{B_0 i a^2} = \left(U_0 - \frac{Ri}{n}\right)\frac{2}{a^2 B_0}$$

4)

$$\mathbb{H} = \hat{y}\, e^{-1000z} \cos(10^7 t - \beta x) = H_y \hat{y}$$

$$\nabla \times \mathbb{H} = \varepsilon \frac{\partial \mathbb{E}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \mathbb{H} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & H_y & 0 \end{vmatrix} = -\hat{x} \frac{\partial H_y}{\partial z} + \hat{z} \frac{\partial H_y}{\partial x}$$

$$\begin{cases} \varepsilon \dfrac{\partial E_x}{\partial t} = 1000\, e^{-1000z} \cos(10^7 t - \beta x) \\ \varepsilon \dfrac{\partial E_z}{\partial t} = \beta e^{-1000z} \sin(10^7 t - \beta x) \end{cases}$$

$$\begin{cases} E_x = \dfrac{10^{-4}}{\varepsilon} e^{-1000z} \sin(10^7 t - \beta x) \\ E_z = \dfrac{-\beta 10^{-7}}{\varepsilon} e^{-1000z} \cos(10^7 t - \beta x) \end{cases}$$

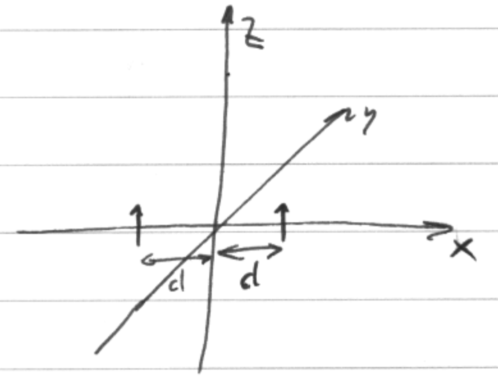
Detta är ingen plan våg ty E & H är ej konstanta i planet vinkelrätt mot utbredningsriktningen.

Vågekvationen för H fältet:

$$\nabla^2 H_y + \frac{\omega^2}{c^2} H_y = 0$$

$$\Rightarrow 1000^2 - \beta^2 + \frac{\omega^2}{c^2} = 0$$

5



Vi använder E och H fälten för en Hertzdipol. Vi förutsätter därmed också att vi tittar på fjärrfälten.

Vi tecknar först fälten längs y-axeln, summerar fälten från 2 dipoler:

$$E^{y} = E_1 + E_2 = j\frac{I\,dl}{4\pi} Z_0 \beta \sin\theta \left(\frac{e^{-j\beta\sqrt{y^2+d^2}}}{\sqrt{y^2+d^2}} + \frac{e^{-j\beta\sqrt{y^2+d^2}}}{\sqrt{y^2+d^2}} \right)\hat{\theta}$$

$$= \left\{ \begin{matrix} y \gg d \Rightarrow \sqrt{1+\frac{d^2}{y^2}} \approx 1 + \frac{d^2}{2y^2} + \dots \\ \sin\theta = 1 \text{ ty } \theta = 90^\circ \end{matrix} \right\} \approx j\frac{I\,dl}{2\pi} Z_0 \beta \left(\frac{e^{-j\beta y\left(1+\frac{d^2}{2y^2}\right)}}{y\left(1+\frac{d^2}{2y^2}\right)} \right)\hat{\theta}$$

$$= \left\{ \begin{matrix} \text{stryk högre ordningens} \\ \text{termer av } d \end{matrix} \right\} \approx j\frac{I\,dl}{2\pi} Z_0 \beta \frac{e^{-j\beta y}}{y}\hat{\theta}$$

Analogt fås $H^{y} = j\frac{I\,dl}{2\pi}\beta\frac{e^{-j\beta y}}{y}\hat{\varphi}$ (Approximativt om $d \ll y$)

Fälten längs x-axeln:

$$E^{x} = E_1 + E_2 = j\frac{I\,dl}{4\pi} Z_0 \beta \sin\theta \left(\frac{e^{-j\beta(x-d)}}{x-d} + \frac{e^{-j\beta(x+d)}}{x+d} \right)\hat{\theta} = \left\{ \begin{matrix} x \gg d \\ \sin\theta = 1 \end{matrix} \right\}$$

$$= j\frac{I\,dl}{4\pi} Z_0 \beta \frac{e^{-j\beta x}}{x}\left(e^{+j\beta d} + e^{-j\beta d}\right)\hat{\theta} = j\frac{I\,dl}{2\pi} Z_0 \beta \frac{e^{-j\beta x}}{x}\cos\beta d\,\hat{\theta}$$

Analogt fås $H^{x} = j\frac{I\,dl}{2\pi}\beta\frac{e^{-j\beta x}}{x}\cos\beta d\,\hat{\varphi}$

Teckna tidsmedelvärdesbildade Poyntingvektorn utefter de båda axlarna

$$P_{av} = \frac{1}{2} Re\{E \times H^*\} = \frac{1}{2} |E_\theta||H_\varphi|$$

Längs x-axeln

$$P_{av}^x = \frac{1}{2} |E_\theta^x||H_\varphi^x| = \frac{1}{2} \left(\frac{Idl}{2\pi} Z_0 \beta \frac{\cos\beta d}{x}\right)\left(\frac{Idl}{2\pi} \beta \frac{\cos\beta d}{x}\right)$$

$$= \frac{1}{2} Z_0 \left(\frac{Idl\beta}{2\pi} \frac{\cos\beta d}{x}\right)^2$$

P.s.s fås längs y-axeln

$$P_{av}^y = \frac{1}{2} |E_\theta^y||H_\varphi^y| = \frac{1}{2}\left(\frac{Idl\beta}{2\pi} \frac{1}{y}\right)^2 Z_0$$

Nu söker vi d då $P_{av}^x = \frac{1}{2} P_{av}^y$ sätter då $x = y = r$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{Idl\beta}{2\pi} \frac{\cos\beta d}{r}\right)^2 Z_0 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{Idl\beta}{2\pi} \frac{1}{r}\right)^2 Z_0$$

$\Rightarrow \cos^2\beta d = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos\beta d = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow$ Två fall:

$\cos\beta d = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \beta d = \pm \frac{\pi}{4} + n2\pi$; $n = 0, 1, 2 \ldots$

$\left\{\beta = \frac{2\pi}{\lambda}\right\} \Rightarrow 2d = \pm\left(\frac{1}{4} + 2n\right)\lambda$

$\cos\beta d = -\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \beta d = \pm \frac{3\pi}{4} + n2\pi \Rightarrow 2d = \pm\left(\frac{3}{4} + 2n\right)\lambda$

Med villkoret $d > 0$ fås $2d = \frac{\lambda}{4}, \frac{3\lambda}{4}, \frac{5\lambda}{4}, \frac{7\lambda}{4} \ldots$ så länge som $d << r$, dvs vi befinner oss i fjärrzonen