Fält 19. Tentamen i Elektromagnetisk fältteori F. för F2.
EEF031 18/4 2001 kl. 14.15-18.15

Tillåtna hjälpmedel:	BETA, Physics Handbook, Formelsamling i Elektromagnetisk fältteori, Valfri kalkylator men inga egna anteckningar utöver egna formler på sista bladet i formelsamlingen i Elektromagnetisk fältteori
Förfrågningar:	Mikael Persson Tel. ankn. 1576
Lösningar:	anslås efter tentamens slut på kursens hemsida
Resultatet:	sändes senast 16/5 2001 till studievägledningen F.
Granskning:	sker på tid som anges på betygslistan
Betygen:	sändes till betygsexpeditionen senast 16/5 2001
Kom ihåg	att problemlösningsdelen och förståelsedelen bedöms separat.

1.

Problemlösningsdel

Tre små likadana metallkulor ligger symmetriskt i ett plan så att de utgör hörnen i en triangel. De befinner sig på ett avstånd från varandra som är stort i jämförelse med kulornas radier. Centralt belägen i triangeln befinner sig en lika stor metallkula. Den centrala kulan har laddningen 3Q och de tre övriga kulorna har vardera laddningen -Q.

A) Hur mycket arbete uträttades för att föra samman kulorna från deras ursprunsgläge på mycket stort avstånd från varandra? **8poäng**

Förståelsedel

B) Vilket eller vilka postulat ligger till grund för elektrostatiken?
Vad säger det/de i ord?
Beskriv med ord hur man kommer från postulaten till det använda uttrycket i uppgift **A**). **1poäng**

C) Beskriv ett möjligt experiment för att testa postulaten **1poäng**

D) Elektrostatisk energi, arbete och elektrostatisk potential är relaterade.
Beskriv kortfattat hur. **1poäng**

E) Kirchhoffs strömlag är relaterad till ett grundläggande uttryck i denna kurs.
Vilket?
På vilket sätt är de relaterade. **1poäng**

2.

Problemlösningsdel

I en likströmsapplikation utgörs en ledare av ett rakt, långt, platt, tunt metallband.

A) Beräkna magnetfältet rakt ovanför bandet **8 poäng**

Förståelsedel

B) Vilket eller vilka postulat ligger till grund för magnetostatiken?
Vad säger det/de i ord?
Beskriv med ord hur man kommer från postulaten till det slutliga uttrycket i **A)** **1poäng**

C) Kraften d**F**=**J**x**B** dV kan under vissa omständigheter övergå i formen F=BIL som vi känner till från gymnasiet. Rita en bild och visa hur och under vilka förhållanden detta kan ske. **1poäng**

D) Jämför de olika metoder som vi använt i kursen för att beräkna magnetfält från strömförande ledare. **1poäng**

E) Beskriv hur det jordmagnetiska fältet påverkar en kompassnål. Hur kan man förklara existensen av de jordmagnetiska fältet?

1poäng

3.

Problemlösningsdel

A) Emilia står på marken nedanför en kraftledning som är ett tvåledarsystem. Hon har en spole och ett oscilloskop med sig. Gör nödvändiga geometriska antaganden och visa hur hon kan beräkna toppvärdet på spänningen i kraftledningen. **8 poäng**

Förståelsedel

B) Vilket eller vilka postulat bygger lösningen ovan på?
Hur skiljer de sig från Maxwells fulla ekvationer? **1poäng**

C) Beskriv begreppet induktion kortfattat utan att använda formler.
1poäng

D) Beskriv kortfattat vad som händer med laddningar på en ledande stång som rör sig i ett statiskt magnetfält. **1poäng**

E) Om man rent hypotetiskt skulle höja frekvensen i kraftledningssystemet i uppgift **A)** fungerar så småningom inte räkningen längre. Varför?
1poäng

4.

Problemlösningsdel

En cirkulärt polariserad plan våg i vakuum träffar en plan gränsyta till ett förlustfritt dielektrikum med dielektricitetstalet $\varepsilon_r = 1.69$ under Brewstervinkel.

A) Skriv upp ett tidsberoende uttryck på det elektriska fältet hos den infallande vågen uttryckt i två linjärt polariserade vågor och rita en figur som visar hur dessa vågor faller in mot gränsytan. **2poäng**

B) Beräkna reflektionskoefficienterna för fälten. **2poäng**

C) Beräkna transmissionskoefficienterna för fälten. **2poäng**

D) Beräkna tidsmedelvärdena av Poyntingvektorerna hos infallande, reflekterad och transmitterad våg. **2poäng**

Förståelsedel

E) Vilket eller vilka postulat bygger lösningarna ovan på?
Vad säger det/de i ord?
Beskriv med ord hur man kommer från postulaten till det använda uttrycket i uppgift **B)** **1poäng**

F) Beskriv vad poyntingvektorn uttrycker i ord. **1poäng**

G) Beskriv kortfattat begreppen vågimpedans och fashastighet. **1poäng**

H) Vad har inträngningsdjupet för betydelse vid uppvärmning av mat i en mikrovågsugn? **1poäng**

5.

Problemlösningsdel

En kort centermatad sprötdipol med längden L, belägen i origo, används i en kommunikationsapplikation. Strömmen i antennen kan approximeras med uttrycket
$i(z,t)=I_0\,(1-2|z|/L)\cos(\omega t)$ för $-L/2 \le z \le L/2$

A) Beräkna linjeladdningstätheten på antennen

8poäng

Förståelsedel

B) Vilket eller vilka postulat bygger lösningen ovan på?
Vad säger det/de i ord?
Beskriv med ord hur man kommer från postulaten till det använda uttrycket i uppgift **A)**. **1poäng**

C) Begreppen strålningsresistans, antennförstärkning och direktivitet hittar du i formelsamlingen. Beskriv dessa begrepp med ord och deras betydelse för antenner. **3poäng**

Det elektriska arbete som åtgår för att föra samman ett antal laddningar kan tecknas som

$W_e = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N} Q_k V_k$, där k innebär en summation över alla laddningar

Potentialen från en laddning tecknar vi som $V_k = \frac{Q_k}{4\pi\varepsilon_0 r}$

Vi summerar nu upp potentialen vid en laddning från de övriga.

Pga symmetri se vi att $V_1 = V_2 = V_4$

$$V_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{-Q}{\sqrt{3}d}\cdot 2 + \frac{3Q}{d}\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(3\sqrt{3}-2)Q}{\sqrt{3}d}$$

$$V_3 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{-3Q}{d}\right)$$

Nu beräknar vi

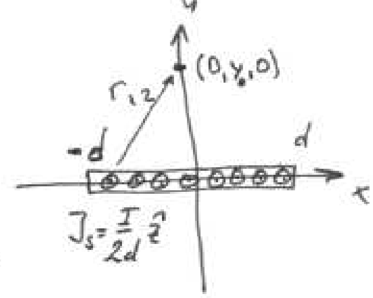
$$W_e = \frac{1}{2}\left(Q_1V_1 + Q_2V_2 + Q_3V_3 + Q_4V_4\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(-Q\frac{(3\sqrt{3}-2)Q}{\sqrt{3}d} - Q\frac{(3\sqrt{3}-2)Q}{\sqrt{3}d} + 3Q\frac{(-3Q)}{d} - Q\frac{(3\sqrt{3}-2)Q}{\sqrt{3}d}\right)$$

$$= \frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{\sqrt{3}(3\sqrt{3}-2)Q^2}{d} - \frac{9Q^2}{d}\right) = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{(9-2\sqrt{3})Q^2}{d} - \frac{9Q^2}{d}\right) =$$

$$= \frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{(18-2\sqrt{3})Q^2}{d}\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{(9-\sqrt{3})Q^2}{d}\right)$$

Beräkna ~~[illegible]~~ magnetfältet i punkten $(0,y_0,0)$ genom att summera bidragen från strömrör i ledaren.



Fältet från en oändligt lång rak ledare: $d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 J_s\, dx}{2\pi r_{12}}\hat{\varphi}$

Nu har vi $\mathbf{r}_{12} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 = -\hat{x}x + \hat{y}y_0$

$r_{12} = \sqrt{x^2+y_0^2}$

$\hat{\varphi}$ uttrycker vi i $\hat{x}$ och $\hat{y}$ genom följande beräkning

$$\hat{\varphi} = \frac{\hat{z} \times \mathbf{r}_{12}}{r_{12}} = \frac{-\hat{y}x - \hat{x}y_0}{\sqrt{x^2+y_0^2}}$$

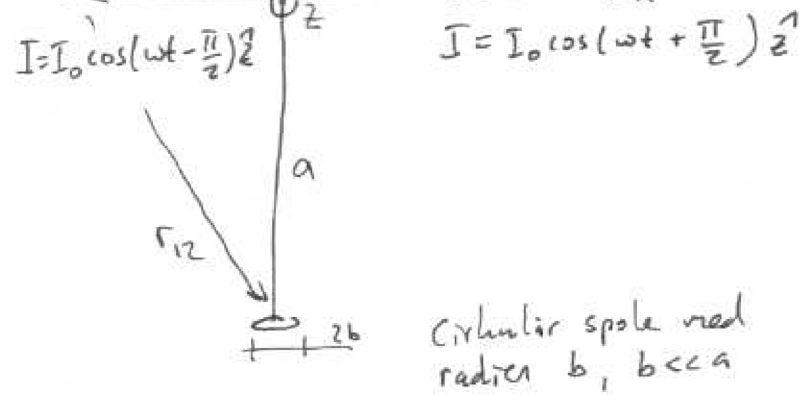
Så nu har vi $d\mathbf{B}$:

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 (I/2d)}{2\pi} \cdot \frac{-\hat{x}y_0 - \hat{y}x}{(x^2+y_0^2)}\,dx$$

Vi integrerar nu upp fältet över hela ledaren. Pga symmetri ser vi att $\hat{y}$-komponenten av fältet canceleras och vi får bara ett bidrag i $\hat{x}$-led.

$$\mathbf{B}(y) = \int_{x=-d}^{d} \frac{\mu_0 I}{4\pi d}\frac{-y_0}{x^2+y_0^2}\,dx\,\hat{x} = \frac{-y\mu_0 I}{4\pi d}\left[\frac{1}{y_0}\arctan\frac{x}{y_0}\right]_{x=-d}^{d} =$$

$$= \frac{-\mu_0 I}{4\pi d}\left[\arctan\frac{d}{y_0} - \arctan\left(\frac{-d}{y_0}\right)\right] = \frac{-\mu_0 I}{2\pi d}\arctan\left(\frac{d}{y_0}\right)$$



Magnetfältet från oändligt lång rak ledare:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r_{12}}\hat{\varphi}$$

som i uppg. 2 tecknar vi $\hat{\varphi}$ $\quad \hat{\varphi} = \frac{\hat{x} a - \hat{y} x}{\sqrt{x^2+a^2}} = \frac{\hat{z} \times \mathbf{r}_{12}}{r_{12}}$

Summerar bidraget från de båda ledarna i pt $y = -a$ $x = 0$

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{2\pi\sqrt{d^2+a^2}}\left(I_0\cos(\omega t - \tfrac{\pi}{2})\frac{\hat{x} a + \hat{y} d}{\sqrt{d^2+a^2}} + I_0\cos(\omega t + \tfrac{\pi}{2})\frac{\hat{x} a - \hat{y} d}{\sqrt{d^2+a^2}}\right)$$

$$= \frac{\mu_0}{2\pi(d^2+a^2)}\left(I_0 \underbrace{\left(\cos(\omega t - \tfrac{\pi}{2}) + \cos(\omega t + \tfrac{\pi}{2})\right)}_{= 2\cos\omega t \cos\frac{\pi}{2} = 0} a\hat{x} + I_0\left(\cos(\omega t - \tfrac{\pi}{2}) - \cos(\omega t + \tfrac{\pi}{2})\right)\hat{y} d\right)$$

Lägger alltså spolen i xz-planet. Flödet genom spolen utgörs enbart av $\hat{y}$-komponenten. $\Phi = \int_S \mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}$, men om $b \ll a$ kan integralen lätt beräknas som $\Phi = \mathbf{B}\cdot\pi b^2$

$$\Phi = \frac{\mu_0 I_0 d\pi b^2}{2\pi(d^2+a^2)}\left(\cos(\omega t - \tfrac{\pi}{2}) - \cos(\omega t + \tfrac{\pi}{2})\right) = \frac{\mu_0 I_0 d\pi b^2}{2\pi(d^2+a^2)}\left(2\sin\omega t \sin\tfrac{\pi}{2}\right)$$

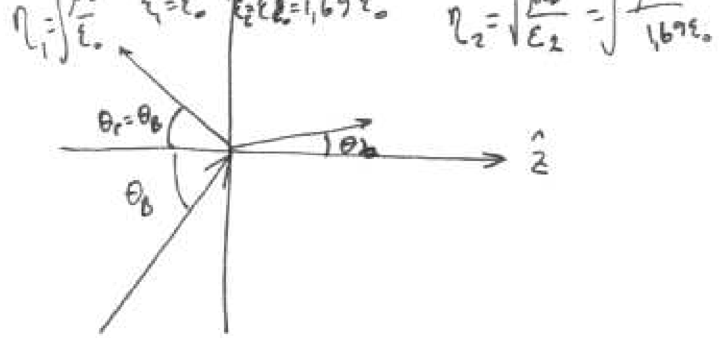
Inducerad emk beräknas som $V = -\frac{\partial\Phi}{\partial t}$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} = \frac{2\mu_0 I_0 d\pi b^2}{2\pi(d^2+a^2)}\omega\cos\omega t$$

På oscilloskopet avläses $|V|_{max}$

Varvid strömmen I_0 fås som

$$\frac{\mu_0 I_0 d\pi b^2\omega}{\pi(d^2+a^2)} = |V|_{max} \Rightarrow I_0 = \frac{|V|_{max}(d^2+a^2)}{\mu_0 d b^2 \omega}$$



Brewstervinkeln beräknar vi som $\tan\theta_B = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} = \sqrt{1,69}$

$\theta_B = 52,4^\circ$

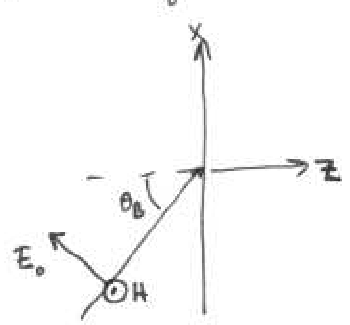
Cirkulärpolariserat betyder att fasförskjutningen är $\frac{\pi}{2}$ mellan de två vinkelrätt linjärpolariserade vågorna

Infallande vågen kan då skrivas som:

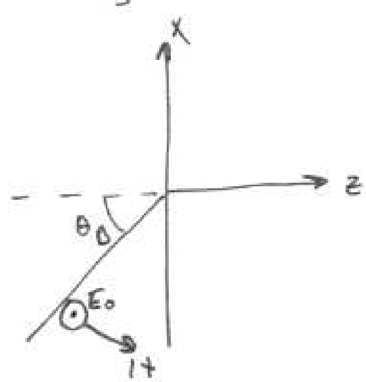
$$\mathbf{E} = E_0\left(\hat{x}\cos\theta_B - \hat{z}\sin\theta_B\right)\cos\left(\omega t - k_1[x\sin\theta_B + z\cos\theta_B]\right) +$$
$$E_0\,\hat{y}\,\sin\left(\omega t - k_1[x\sin\theta_B + z\cos\theta_B]\right)$$

Där k_1 är vågvektorn $k_1 = \frac{2\pi}{\lambda}$

Den parallella polariseringen:



Vinkelrät polarisering



5B

$$\Gamma_{\parallel} = \left(\frac{E_{r0}}{E_{i0}}\right)_{\parallel} = 0$$

$\boxed{\text{Snells lag ger } \theta_t : \sin\theta_t = \frac{\eta_2}{\eta_1}\sin\theta_B}$

$$\Gamma_{\perp} = \left(\frac{E_{r0}}{E_{i0}}\right)_{\perp} = \frac{\eta_2\cos\theta_B - \eta_1\cos\theta_t}{\eta_2\cos\theta_B + \eta_1\cos\theta_t} = -0,26$$

$$\tau_{\parallel} = \left(\frac{E_{t0}}{E_{i0}}\right)_{\parallel} = \frac{2\eta_2 \cos\theta_B}{\eta_2 \cos\theta_t + \eta_1 \cos\theta_B} = 0{,}77$$

$$\tau_{\perp} \left(\frac{E_{t0}}{E_{i0}}\right)_{\perp} = \frac{2\eta_2 \cos\theta_B}{\eta_2 \cos\theta_B + \eta_1 \cos\theta_t} = 0{,}74$$

4D

Tidsmedelvärdet av Poyntingvektorerna

$$P_{medel} = \frac{E_0^2}{2\eta}$$

Infallande våg

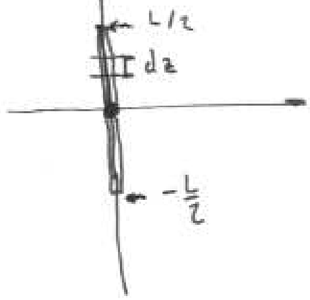
$$P_{i\,medel} = \frac{E_0^2}{2\eta_1} \cdot 2 \qquad ; \eta_1 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}$$

Reflekterad:

$$P_{r\,medel} = \frac{\left[E_0 \cdot (-0{,}26)\right]^2}{2\eta_1}$$

Transmitterad:

$$P_{t\,medel} = \frac{E_0^2\,(0{,}77^2 + 0{,}74^2)}{2\eta_2} = \frac{E_0^2\,(0{,}77^2 + 0{,}74^2)}{2 \cdot \frac{\eta_1}{1{,}3}} = \frac{E_0^2}{2\eta_1}\,1{,}48$$



$$i(z,t) = I_0\left(1 - \frac{2|z|}{L}\right)\cos\omega t$$

$$-\frac{L}{2} \leq z \leq \frac{L}{2}$$

Kontinuitetsekvationen ger

$$i(z+dz,t) - i(z,t) = -\frac{\partial \rho_l}{\partial t}\,dz$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial i(z,t)}{\partial z} = -\frac{\partial \rho_l}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial \rho_l}{\partial t} = -\dfrac{-I_0 2}{L}\cos(\omega t) & z > 0 \\[2ex] \dfrac{\partial \rho_l}{\partial t} = -\dfrac{I_0 2}{L}\cos(\omega t) & z < 0 \end{cases}$$

Integrerar map t för att få fram ρ_l:

$$\begin{cases} \rho_l = \displaystyle\int_0^t \frac{I_0 2}{L}\cos(\omega t')\,dt' = \frac{2I_0}{L\omega}\sin(\omega t) & z > 0 \\[2ex] \rho_l \displaystyle\int_0^t -\frac{2I_0}{L}\cos(\omega t')\,dt' = \frac{-2I_0}{L\omega}\sin\omega t & z < 0 \end{cases}$$