Fält 07. Tentamen i Elektromagnetisk fältteori F, för F2.
15/3 1997.

Tillåtna hjälpmedel:	BETA, SMT, Physics Handbook, Formelsamling i Elektromagnetisk fältteori, valfri kalkylator men inga egna anteckningar utöver egna formler på sista bladet i formelsamlingen i Elektromagnetisk fältteori.
Förfrågningar:	Tel. ankn. 1583
Lösningar	anslås efter tentamens slut vid Telesnack.
Resultatet	sändes senast den 7/4 1997 till studievägledningen F.
Granskning	sker på tid som anges på betygslistan.
Betygen	sändes till betygsexpeditionen senast den 11/4 1997.

- 0 - 0 - 0 -

Kom ihåg!	Tydliga figurer, Referensriktningar, Dimensionskontroll, Motiveringar.

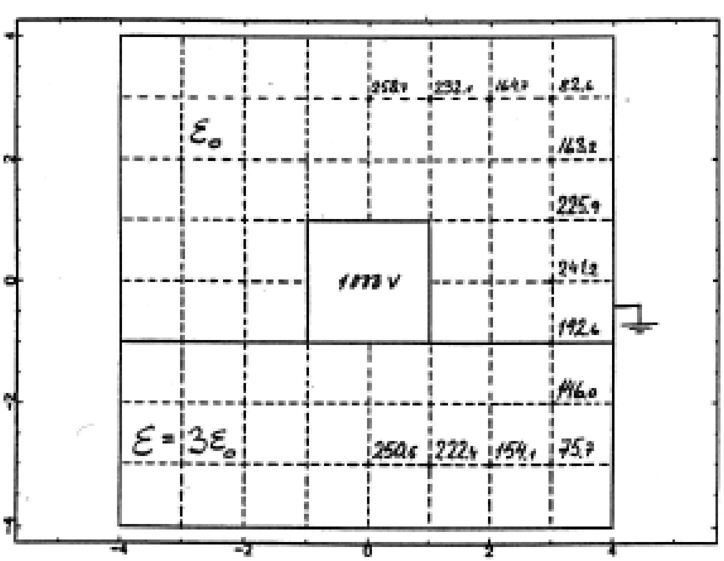
Teoriuppgift Endast BETA och SMT får användas!

1. Härled, utgående från $\nabla\cdot\mathbf{B}=0$ och $\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}$, sambanden mellan normalkomponenterna av **B**-fältet och mellan tangentialkomponenterna av **H**-fältet på ömse sidor om en gränsyta mellan två olika material!

Räkneuppgifter Hjälpmedel enligt listan högst upp!

2. Figuren visar ett "metallrör" med kvadratiskt tvärsnitt (8h·8h). Innuti röret finns dels ett dielektrikum med $\varepsilon=3\varepsilon_o$ dels luft. På dielektrikat vilar i mitten en metallstång med kvadratiskt tvärsnitt (2h·2h). En lösning av Laplaces ekvation i området mellan stången och röret har givit oss tillgång till potentialen i nodpunkterna i ett kvadratiskt rutnät. Använd de i figuren visade potentialvärdena för att göra en numerisk beräkning av kapacitansen per längdenhet mellan stången och röret!

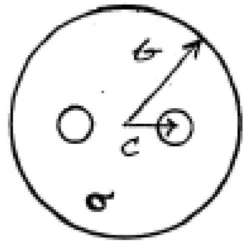
Ledning: $\oint \mathbf{D}\cdot d\mathbf{S} = Q_{innesluten}$



3. En <u>lång</u> kabel med längden L består av två <u>tunna</u> koppartrådar med radie a och inbördes centrumavstånd 2c symmetriskt inbäddade i en dielektrisk cylinder med radie b. Dielektrikat har en viss liten ledningsförmåga σ. Beräkna läckresistansen mellan trådarna, om

A) kabeln är skärmad, (metallcylinder vid r=b)

B) kabeln är oskärmad. (dielektrikat gränsar direkt till luft vid r=b)



4. En enkel likströmsmotor består av ett ekerhjul med radien a och n stycken ekrar. Hjulet befinner sig i ett axiellt homogent magnetfält med styrkan B_0. Varje eker har resistansen R , medan resistanserna hos nav och periferi är försumbara. Motorn är ansluten till likspänningen U_0.

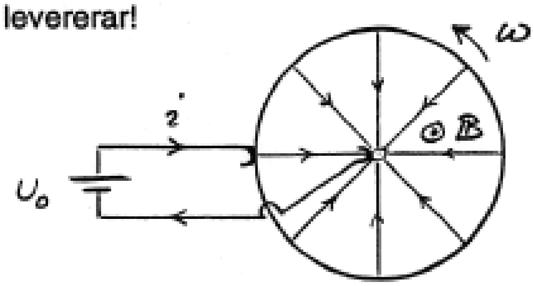
Beräkna, som funktion av vinkelhastigheten ω,

A) rörelseemk'en i ekrarna!

B) den ström som motorn drar!

C) det mekaniska vridmomentet hos motorn!

D) den mekaniska effekt som motorn levererar!



5. Utanför en gränsyta med ekvationen z = 0 finns i området z > 0 en elektromagnetisk ytvåg i **vakuum** med det magnetiska fältet

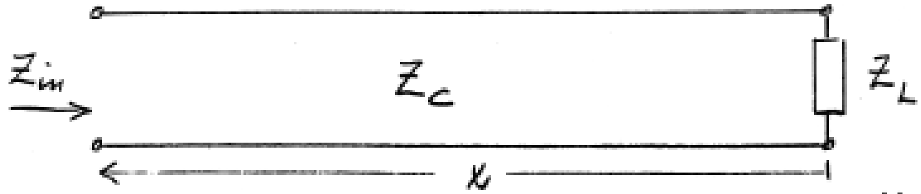
$\mathbf{H} = \hat{y}\, H_0 e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta x)$

A) Beräkna tillhörande **E**-fält!

B) Utnyttja vågekvationen för att ta fram ett samband mellan α, β och ω!

<u>Ledning:</u> Ytvågen är **ej** en plan våg.

6. En <u>förlustfri</u> ledning med karakteristiska impedansen Z_c=60 Ω har vid aktuell frekvens gångkonstanten $\gamma=j\beta=j\pi$. Den belastas med en impedans $Z_L=R_L+jX_L$=(48+j36) Ω. Vilka längder på kabeln ger rent reell inimpedans? Vilka värden får den rent reella inimpedansen?



H. Desaix

CTH ELEKTRICITETS-LÄRA	Ämne	Datum 12/3 - 97	Blad nr 1
		Signatur H.S.	

Fält 07. El. magn. fältteori F, för F2, den 15/3 1997

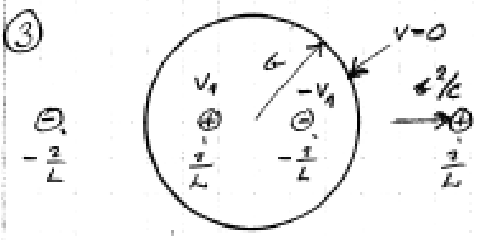
① Se föreläsningsanteckningarna!

② Lägg en "Gaussyta" mellan röret och gridpunkterna med kända potentialer.

$$\rho_{l,\,inner}/2 = \varepsilon_0 \frac{h}{h}\left[\tfrac{1}{2}\cdot 258{,}7 + 232{,}1 + 164{,}7 + 82{,}6 + 82{,}6 + 163{,}2 + 225{,}9 + 241{,}2 + \tfrac{1}{2}\,192{,}6\right] + 3\varepsilon_0\frac{h}{h}\left[\tfrac{1}{2}\cdot 192{,}6 + 146{,}0 + 75{,}7 + 75{,}7 + 154{,}1 + 222{,}4 + \tfrac{1}{2}\,250{,}5\right]$$

$$\underline{\underline{C_l}} = \frac{\rho_l}{1000} = 2\varepsilon_0\cdot\frac{1417{,}45 + 3\cdot 895{,}45}{1000} = \underline{\underline{\varepsilon_0\cdot 8{,}21 = 72{,}6\ (\text{pF/m})}}$$

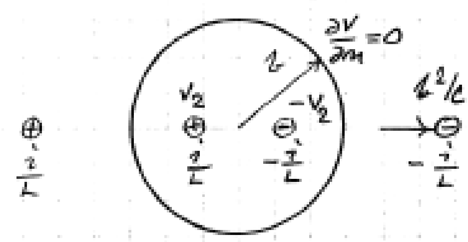
③



A) Med skärm

$$V_1 = \frac{i/L}{2\pi\sigma}\left[\ln\left(\frac{2c}{a}\right) + \ln\left(\frac{\frac{b^2}{c}-c}{\frac{b^2}{c}+c}\right)\right]$$

$$\underline{\underline{R_A = \frac{2V_1}{i} = \frac{1}{\pi\sigma L}\ln\left[\frac{2c}{a}\cdot\frac{b^2-c^2}{b^2+c^2}\right]}}\quad(\Omega)$$

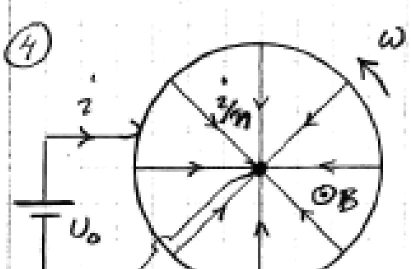


B) Utan skärm

$$V_2 = \frac{i/L}{2\pi\sigma}\left[\ln\left(\frac{2c}{a}\right) + \ln\left(\frac{\frac{b^2}{c}+c}{\frac{b^2}{c}-c}\right)\right]$$

$$\underline{\underline{R_B = \frac{2V_2}{i} = \frac{1}{\pi\sigma L}\ln\left[\frac{2c}{a}\cdot\frac{b^2+c^2}{b^2-c^2}\right]}}\quad(\Omega)$$

④



A) Rörelseemk'en i ekrarna blir radiellt utåt

$$\underline{\underline{V_{rörelse}}} = \int_0^a \omega r B_0\,dr = \underline{\underline{\tfrac{1}{2}\omega B_0 a^2}}\quad(\text{V})$$

B) Kirchhoffs slingelov. ger

$$U_0 = V_{rörelse} + R\cdot(i/n) \;\Rightarrow\; \underline{\underline{i = \frac{n}{R}\left(U_0 - \tfrac{1}{2}\omega B_0 a^2\right)}}\quad(\text{A})$$

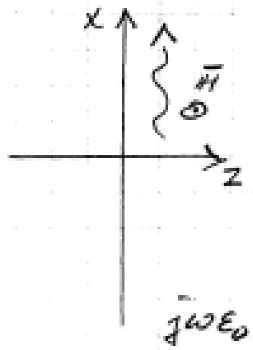
C) $$\underline{\underline{T_{mek}}} = n\cdot\int_0^a r\cdot\left(\frac{i}{n}\,dr\,B_0\right) = i B_0\frac{a^2}{2} = \underline{\underline{\frac{n}{R}\left(U_0 - \tfrac{1}{2}\omega B_0 a^2\right)\tfrac{1}{2}B_0 a^2}}\ (\text{Nm}$$

D) $$\underline{\underline{P_{mek}}} = \omega T_{mek} = \underline{\underline{\frac{n}{R}\left(U_0 - \tfrac{1}{2}\omega B_0 a^2\right)\tfrac{1}{2}\omega B_0 a^2}}\quad(\text{W})$$

CTH ELEKTRICITETSLÄRA	Ämne	Datum 12/3 - 97	Blad nr 2
		Signatur H.S.	

Fält 07. El. magn. fältteori F, för F2, den 15/3 1997

(5)



$$H = \hat{y} H_0 e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta x)$$

$$\bar{H} = \hat{y} H_0 e^{-\alpha z} e^{-j\beta x}$$

A) Tillhörande $\bar{E}$ erhålles ur M.E.

$$\nabla \times \bar{H} = j\omega\varepsilon_0 \bar{E} \Rightarrow$$

$$j\omega\varepsilon_0 \bar{E} = \hat{x}\cdot\left[-\frac{\partial}{\partial z}\left(H_0 e^{-\alpha z} e^{-j\beta x}\right)\right] + \hat{y}\cdot 0 + \hat{z}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(H_0 e^{-\alpha z} e^{-j\beta x}\right)\right]$$

$$\bar{E} = \frac{H_0}{j\omega\varepsilon_0}\left\{\hat{x}\,\alpha - \hat{z}\,j\beta\right\} e^{-\alpha z} e^{-j\beta x} \Rightarrow$$

$$\underline{\underline{E = \frac{H_0}{\omega\varepsilon_0} e^{-\alpha z}\left[\hat{x}\alpha\cos\left(\omega t - \beta x - \frac{\pi}{2}\right) - \hat{z}\beta\cos(\omega t - \beta x)\right]}}$$

B) Vågekv. i vakuum lyder $\nabla^2 \bar{H} + \frac{\omega^2}{c_0^2}\bar{H} = 0$

Sätt in det givna $\bar{H}$ i vågekv. så fås

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\omega^2}{c_0^2}\right]\left(H_0 e^{-\alpha z} e^{-j\beta x}\right) = 0 \Rightarrow \left[(-j\beta)^2 + (-\alpha)^2 + \frac{\omega^2}{c_0^2}\right] H_0 e^{-\alpha z} e^{-j\beta x} = 0$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\beta^2 = \alpha^2 + \omega^2/c_0^2}}$$

---

(6)

$$Z_{in}(x) = Z_c \frac{Z_L\cos(\beta x) + jZ_c\sin(\beta x)}{Z_c\cos(\beta x) + jZ_L\sin(\beta x)} = Z_c \frac{(R_L + jX_L)\cos\beta x + jZ_c\sin\beta x}{Z_c\cos\beta x + j(R_L + jX_L)\sin\beta x} =$$

$$= Z_c \frac{R_L\cos\beta x + j(X_L\cos\beta x + Z_c\sin\beta x)}{Z_c\cos\beta x - X_L\sin\beta x + jR_L\sin\beta x} = \text{reell} = KZ_c$$

$$\begin{cases} R_L\cos\beta x = K\left[Z_c\cos\beta x - X_L\sin\beta x\right] \\ X_L\cos\beta x + Z_c\sin\beta x = K R_L\sin\beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \tan\beta x = \dfrac{KZ_c - R_L}{KX_L} \\ \tan\beta x = \dfrac{X_L}{KR_L - Z_c} \end{cases} \Rightarrow$$

$$(KR_L - Z_c)(KZ_c - R_L) = KX_L^2 \Rightarrow K^2 - K\frac{X_L^2 + R_L^2 + Z_c^2}{R_L Z_c} = -1$$

$$K^2 - K\frac{5}{2} = -1 \Rightarrow K = \frac{5}{4} \pm \sqrt{\frac{25}{16} - 1} = \begin{cases} 2 \\ 0{,}5 \end{cases}$$

$$\tan\beta x = \frac{K\cdot 60 - 48}{K\cdot 36} = \begin{cases} +1 \\ -1 \end{cases} \Rightarrow \beta x = \pm\frac{\pi}{4} + n\pi\,; \quad n = 1, 2, 3, \ldots \quad \beta = \pi$$

$\underline{x = 0{,}25 + n}$ (m) ger $\underline{\underline{Z_{in}}} = 2\cdot 60 = \underline{\underline{120\,(\Omega)}}$

$\underline{x = n - 0{,}25}$ (m) ger $\underline{\underline{Z_{in}}} = \frac{1}{2}\cdot 60 = \underline{\underline{30\,(\Omega)}}$