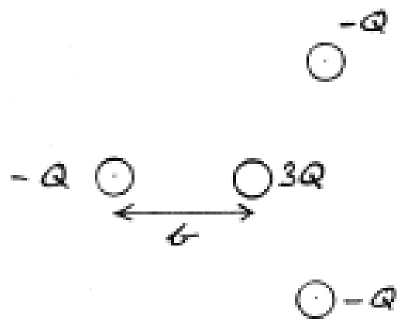
Fält 05. Tentamen i Elektromagnetisk fältteori F. för F2.
26/8 1996.

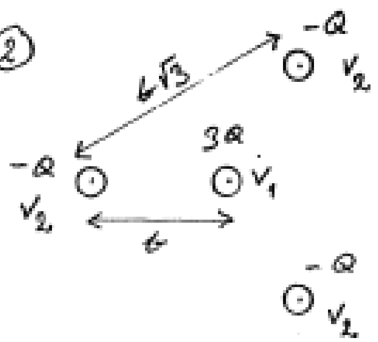
1. Definiera begreppet kapacitans mellan två ledare! Hur skall begreppet kapacitans hos <u>en</u> ledare tolkas? Vilka faktorer bestämmer i första hand kapacitansvärdet?

Räkneuppgifter Hjälpmedel enligt listan högst upp!

2. Tre <u>små</u> metallkulor, vardera med radien a, ligger symmetriskt med samma centrumavstånd b till en central <u>liten</u> metallkula med radien a. Den centrala kulan ges laddningen 3Q, medan de övriga tre kulorna ges vardera laddningen -Q. Kulorna befinner sig i vakuum. Beräkna systemets elektrostatiska energi!



2



$$V_1 = \frac{3Q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{a} + 3\,\frac{-Q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{b} = \frac{3Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)$$

$$V_2 = \frac{-Q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{a} + 2\cdot\frac{-Q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{b\sqrt{3}} + \frac{3Q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{b} =$$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{a} + \frac{3\sqrt{3}-2}{b\sqrt{3}}\right]$$

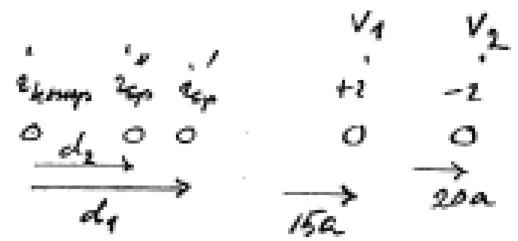
$$\underline{W_e} = \frac{1}{2}\left[V_1\cdot 3Q + 3\cdot V_2\cdot(-Q)\right] = \underline{\underline{\frac{Q^2\sqrt{3}}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{2\sqrt{3}}{a} - \frac{3\sqrt{3}-1}{b}\right\}}}$$

3. En stor metallsfär med radien 10a och två små sfäriska metallelektroder med lika radier a befinner sig på stort djup i en svagt ledande vätska med konduktiviteten σ. Placeringen framgår av figuren på nästa sida.

A) Beräkna resistansen mellan de små elektroderna, om sfären är jordad, dvs har potentialen noll.

B) Beräkna resistansen om sfären är fri, dvs får antaga den potential, som betingas av omständigheterna! Potentialen i oändligheten är noll.

③



$$d_1 = \frac{100a^2}{15a} = \frac{20}{3}a \; ; \; i'_{sp} = -i\,\frac{10a}{15a} = -i\,\frac{2}{3}$$

$$d_2 = \frac{100a^2}{20a} = 5a \; ; \; i''_{sp} = +i\,\frac{10a}{20a} = +i\,\frac{1}{2}$$

$$i_{komp} = -(i'_{sp} + i''_{sp}) = +i\,\frac{1}{6}$$

i_{komp} skall vara med endast i fall B!

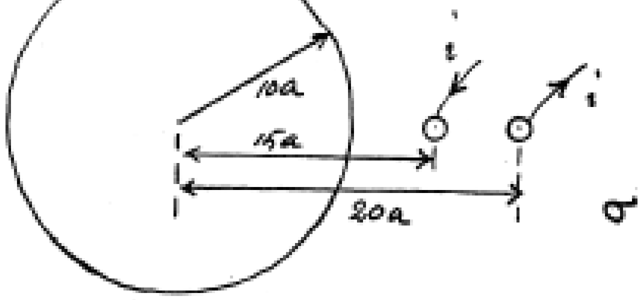
A)
$$V_1 = \frac{i}{4\pi\sigma}\left[\frac{1}{a} - \frac{1}{5a} - \frac{2/3}{15a - 20a/3} + \frac{1/2}{10a}\right]$$
$$V_2 = \frac{i}{4\pi\sigma}\left[-\frac{1}{a} + \frac{1}{5a} - \frac{2/3}{20a - 20a/3} + \frac{1/2}{15a}\right]$$
$$V_1 - V_2 = \frac{i}{4\pi\sigma}\cdot\frac{1}{a}\cdot\frac{476}{300}$$

$$R_A = \frac{1}{4\pi\sigma a}\cdot\frac{476}{300}$$

B)
$$V_1 = \frac{i}{4\pi\sigma}\left[\frac{1}{a} - \frac{1}{5a} - \frac{2/3}{15a - 20a/3} + \frac{1/2}{10a} + \frac{1/6}{15a}\right]$$
$$V_2 = \frac{i}{4\pi\sigma}\left[-\frac{1}{a} + \frac{1}{5a} - \frac{2/3}{20a - 20a/3} + \frac{1/2}{15a} + \frac{1/6}{20a}\right]$$
$$V_1 - V_2 = \frac{i}{4\pi\sigma}\cdot\frac{1}{a}\cdot\frac{2861}{1800}$$

$$R_B = \frac{1}{4\pi\sigma a}\cdot\frac{2861}{1800}$$

$$\left[\; R_B - R_A = \frac{1}{4\pi\sigma a}\cdot\frac{1}{360} \;\right]$$

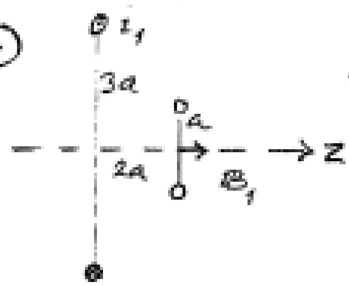


4. Den ömsesidiga induktansen mellan två koaxiella cirkulära strömbanor ges av uttrycket

$$M = \mu_0 \sqrt{ab}\, m^{3/2}\, C(m) \qquad ; \qquad m = 4ab/[(a+b)^2+c^2]$$

där a och b är strömbanornas radier och c är deras axiella avstånd. C(m) är en av de fullständiga elliptiska integralerna. Beräkna, för det numeriska fallet att b=3a och c=2a, det procentuella felet i ömsesidiga induktansen mellan slingorna, om man beräknar denna med den approximativa metoden, som utnyttjar fältet på axeln från den större slingan över hela ytan av den mindre slingan! C(0.6) = 0.36816

④



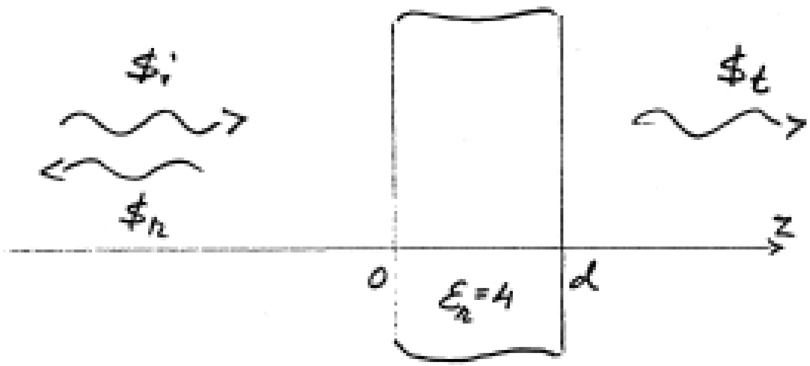
$\mathbf{B}_1 = \hat{z}\, \frac{\mu_0 i_1}{2\cdot 3a}\cdot\left(\frac{3}{\sqrt{13}}\right)^3$; $\Phi_{12} \approx \pi a^2 \cdot B_1$

$M_{approx} = \frac{\Phi_{12}}{i_1} = \pi a \mu_0 \frac{9}{2\cdot 13\sqrt{13}} = \mu_0 a \cdot 0{,}30161$

$m = \frac{4\cdot 3a\cdot a}{(3a+a)^2+(2a)^2} = \frac{12}{20} = 0{,}6$; $M = \mu_0 \sqrt{3a^2}\; 0{,}6^{3/2}\; C(0{,}6) = \mu_0 a \cdot 0{,}29636$

Rel. fel $= \frac{M_{approx} - M}{M} = 0{,}0177 \approx 1{,}8\,\%$

5. Ett "radarfönster" består av en dielektrisk skiva med dieltalet $\varepsilon_r = 4$ och tjockleken $d = \lambda/2$, där λ är våglängden i skivan vid den aktuella radarfrekvensen. Beräkna transmissionskoefficienten för effekt vid vinkelrätt infall mot fönstret hos en radarsignal med en frekvens, som ligger 10% över den aktuella radarfrekvensen!



---

(5) $\dfrac{\bar{E}_3^+(d)}{\bar{E}_1^+(0)} = \dfrac{t_{12}\, t_{23}\, e^{-\gamma_2 d}}{1 + r_{12} r_{23} e^{-\gamma_2 2d}}$; $r_{12} = -r_{23} = \dfrac{Z_0/2 - Z_0}{Z_0/2 + Z_0} = -\dfrac{1}{3}$

$t_{12} = \dfrac{2\, Z_0/2}{Z_0/2 + Z_0} = \dfrac{2}{3}$; $t_{23} = \dfrac{2 Z_0}{Z_0/2 + Z_0} = \dfrac{4}{3}$

$\gamma_2 = j\beta_2 = j\dfrac{2\pi}{\lambda_2}$; $\lambda_2 = 2d$

Vid aktuell frekvens gäller $f \cdot \lambda_2 = c_0/\sqrt{\varepsilon_r}$

Vid ändrad frekvens gäller $f' \lambda_2' = c_0/\sqrt{\varepsilon_r}$ $\Bigg\}$ $\lambda_2' = \dfrac{f}{f'} \cdot \lambda_2 = \dfrac{f}{f'} \cdot 2d$

$\gamma_2' = j\beta_2' = j\dfrac{2\pi}{\lambda_2'} = j\dfrac{2\pi}{\lambda_2} \cdot \dfrac{f'}{f}$; $e^{-\gamma_2' d} = e^{-j\frac{2\pi}{\lambda_2} \cdot \frac{f'}{f} \cdot \frac{\lambda_2}{2}} = e^{-j\pi f'/f}$

$T' = \left| \dfrac{t_{12}\, t_{23}\, e^{-j\pi f'/f}}{1 + r_{12} r_{23} e^{-j2\pi f'/f}} \right|^2 = \left| \dfrac{\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot e^{-j\pi 1{,}1}}{1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} e^{-j2\pi 1{,}1}} \right|^2 = 0{,}949$

6. På en tre meter lång provbit av en transmissionsledning med förluster ($r \neq 0$ och $g \neq 0$) har man vid frekvensen 100 MHz uppmätt en inimpedans $Z_t = (2.68 - j11.4)\ \Omega$ vid obelastad ledning och en inimpedans $Z_k = (62.6 + j251)\ \Omega$ vid kortsluten ledning. Fashastigheten hos vågorna på ledningen är <u>ungefär</u> $2.5 \cdot 10^8$ m/s. Beräkna ur dessa observationer ledningens karakteristiska impedans Z_c och dess gångkonstant $\gamma = \alpha + \beta$ vid frekvensen ifråga!

<u>Ledning:</u> Glöm ej att tanh(z) är periodisk med perioden $j\pi$!

(6)

$$\left.\begin{aligned} Z_t &= Z_c \coth(\gamma l_1) = 2,68 - j\,11,4 \\ Z_k &= Z_c \tanh(\gamma l_1) = 62,6 + j\,251 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} Z_c &= \sqrt{(2,68 - j\,11,4)(62,6 + j\,251)} \\ \tanh(\gamma l_1) &= \sqrt{\frac{62,6 + j\,251}{2,68 - j\,11,4}} \end{aligned}\right. \Rightarrow$$

$$\underline{\underline{Z_c = 55,04 - j\,0,3721}}$$

$$\gamma l_1 = \operatorname{artanh}(1,106 + j\,4,568) = 0,04807 + j\,1,366 + j\,m\pi$$

$$\gamma = \alpha + j\beta = 0,01602 + j\,(0,4553 + m\pi/3)$$

$$v_{fas} = \frac{\omega}{\beta} = \frac{2\pi \cdot 10^8}{0,4553 + m\pi/3} = \frac{6 \cdot 10^8}{m + 0,4348} \approx 2,5 \cdot 10^8 \quad \therefore \text{Välj } \underline{\underline{m = 2}}$$

$$\underline{\underline{\gamma = 0,01602 + j\,2,550}}$$