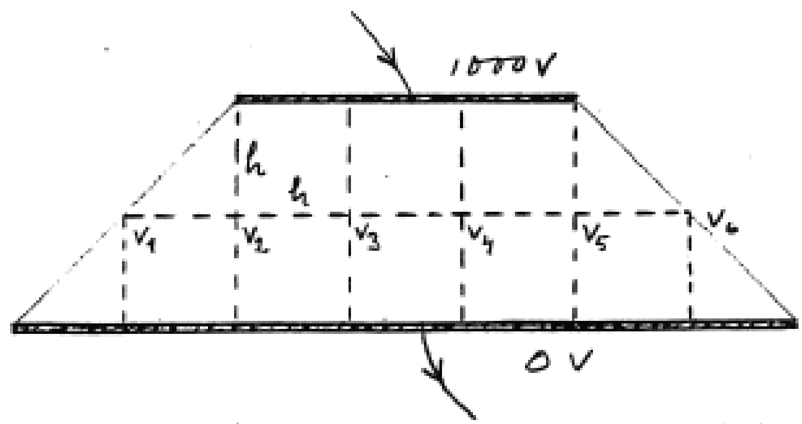
Fält 04. Tentamen i Elektromagnetisk fältteori F. för F2.
16/3 1996.

1. Definiera makroskopisk rymdladdningstäthet $\rho(\mathbf{R})$, ytladdningstäthet $\rho_s(\mathbf{R})$ och linjeladdningstäthet $\rho_l(\mathbf{R})$! Skriv integraluttrycken för fälten V och **E** från kända laddningsfördelningar $\rho(\mathbf{R})$, $\rho_s(\mathbf{R})$ och $\rho_l(\mathbf{R})$ och beskriv i ord integralernas samband med Coulomb-fälten från en punktladdning!

Räkneuppgifter Hjälpmedel enligt listan högst upp!

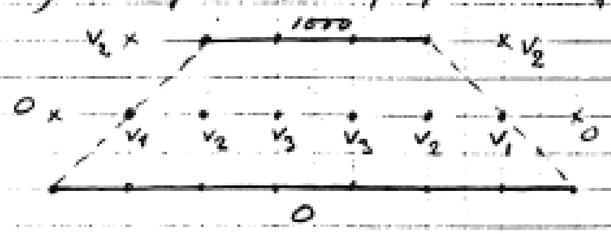
2. På en tunn plåt med tjockleken d=0.1 mm, ledningsförmågan σ=5 S/m och med utseende enligt figuren är två elektroder fästade.
A) Beräkna en övre och en undre gräns för resistansen mellan elektroderna!
B) Använd figurens glesa rutnät för att göra en numerisk beräkning av potentialerna $V_1, V_2, \ldots, V_6$!
C) Utnyttja $V_1, V_2, \ldots, V_6$ för att göra en approximativ beräkning av resistansen mellan elektroderna!



2 A) $R_ö = \frac{1}{\sigma d} \cdot \frac{2h}{3h} = \frac{1}{\sigma d} \cdot 0{,}6667$ (Lodräta strömrör)

$R_u = \int_0^{2h} \frac{1}{\sigma d} \cdot \frac{d\xi}{3h + 2\xi} = \frac{1}{\sigma d} \cdot \frac{1}{2} \ln\left(\frac{7}{3}\right) = \frac{1}{\sigma d} \cdot 0{,}4236$ (Vågräta ekvipot. ytor)

B) Av symmetrin följer att $V_4 = V_3$, $V_5 = V_2$ och $V_6 = V_1$



$$\left\{\begin{aligned} 4V_1 &= V_2 + V_2 + 0 + 0 \\ 4V_2 &= V_3 + 1000 + V_1 + 0 \\ 4V_3 &= V_3 + 1000 + V_2 + 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

C) $\frac{1}{\sigma d} = 2000\,\Omega$

$V_1 = 210{,}53$; $V_2 = 421{,}05$; $V_3 = 473{,}68$

$i \approx \sigma d \frac{h}{h} [V_1 + V_2 + V_3 + V_3 + V_2 + V_1] = \sigma d \cdot 2210{,}53$

$R = \frac{1000}{i} \approx \frac{1}{\sigma d} \cdot 0{,}4524$ [Ladirien ger $R = \frac{1}{\sigma d} \cdot 0{,}486$]

3. Utanför en metallsfär med radien a och nettoladdningen noll befinner sig en liten laddad partikel med massan m och laddningen q. De av partikeln inducerade ytladdningarna ger en dragkraft på partikeln. Partikeln beskriver under inverkan av denna dragkraft en cirkulär bana med radien d i det plan som innehåller sfärens centrum. Vilken hastighet har partikeln? Bortse från tyngdkraften!

3

$b = a^2/d$; $q^{sp} = -q\frac{a}{d}$; $q^{komp} = -q^{sp}$

(Sfärens nettoladdning är noll.)

Fältet från de inducerade laddningarna på partikelns plats blir:

$$E_R = \frac{q^{sp}}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{(d-b)^2} + \frac{q^{komp}}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{d^2} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{qa}{d}\left[\frac{1}{(d-a^2/d)^2}-\frac{1}{d^2}\right]$$

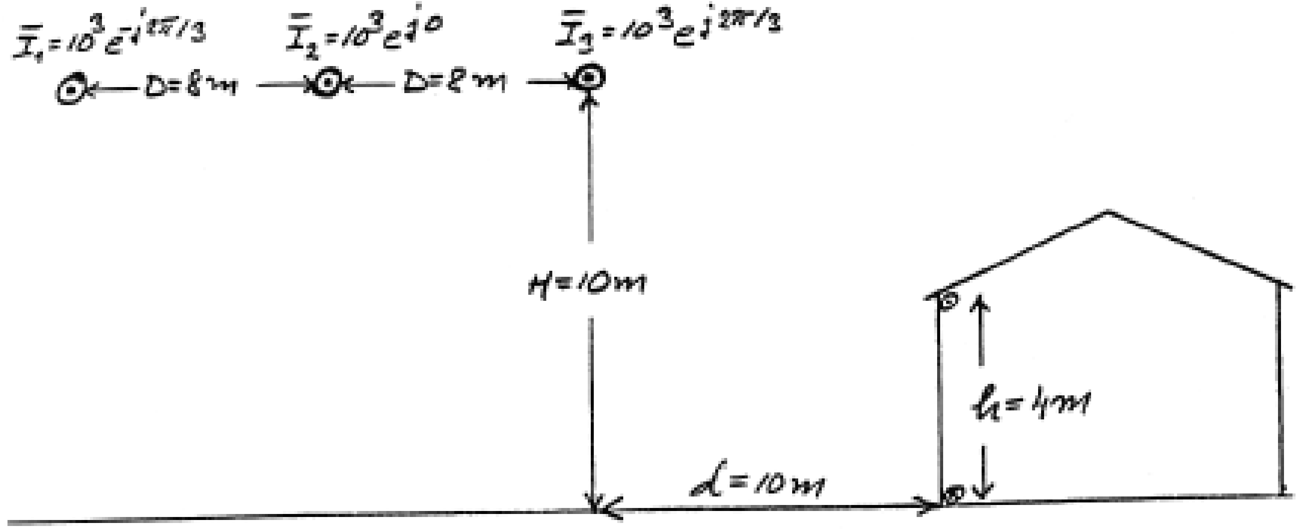
Kraften på partikeln blir:

$$F_R = qE_R = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q^2a}{d^3}\left[\frac{d^4}{(d^2-a^2)^2}-1\right] = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot q^2\frac{a^3}{d^3}\cdot\frac{2d^2-a^2}{(d^2-a^2)^2}$$

Accelerationen i cirkelbanan är $-\hat{R}u^2/d$

$$m\frac{u^2}{d} = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{a^3}{d^3}\cdot\frac{2d^2-a^2}{(d^2-a^2)^2} \Rightarrow u = \sqrt{\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 m}\cdot\frac{a^3(2d^2-a^2)}{d^2(d^2-a^2)^2}}$$

4. Parallellt med en trefas kraftledning ligger en lada som figuren visar. Antag att man utnyttjar den vägg som vätter mot kraftledningen för att fästa upp en stor rektangulär spole. Hur stor inducerad emk kan man förvänta sig per varv av spolen om strömamplituden i kraftledningen är 1000 A, ladans längd är 20 m och övriga dimensioner framgår av figuren?



4 Komplexa flödet genom ett varv av spolen blir

$$\bar{\Phi} = \bar{\Phi}_1 + \bar{\Phi}_2 + \bar{\Phi}_3 = \ell \cdot \frac{\mu_0}{2\pi}\left[\bar{I}_1 \ln\sqrt{\frac{26^2+10^2}{26^2+6^2}} + \bar{I}_2 \ln\sqrt{\frac{18^2+10^2}{18^2+6^2}} + \bar{I}_3 \ln\sqrt{\frac{10^2+10^2}{10^2+6^2}}\right] =$$

$$= 20 \cdot 2 \cdot 10^{-7} \cdot 10^3 \left[\left(-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\frac{1}{2}\ln\frac{776}{712} + \frac{1}{2}\ln\frac{424}{360} + \left(-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\frac{1}{2}\ln\frac{200}{136}\right]$$

Inducerad spänning i ett varv av spolen blir

$$\bar{V}_{ind} = -j\omega\bar{\Phi} = -j\,100\pi \cdot 4 \cdot 10^{-3}\ \frac{1}{4}\left[-\ln\frac{776}{712} + 2\ln\frac{424}{360} - \ln\frac{200}{136} + \right.$$

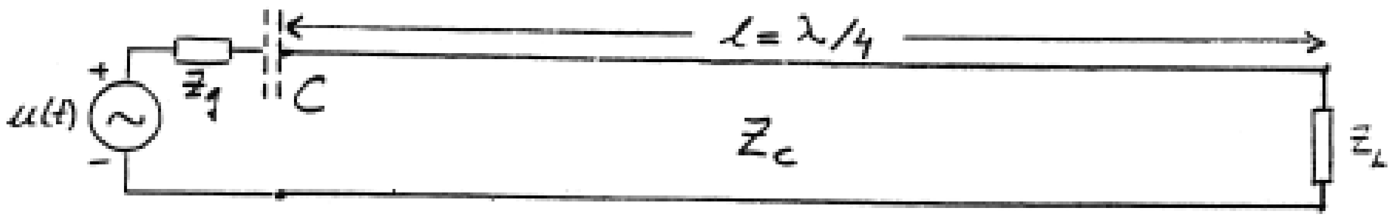
$$\left. + j\sqrt{3}\left(\ln\frac{200}{136} - \ln\frac{776}{712}\right)\right] = -j\,\pi \cdot 10^{-1} \cdot \left[-0.14448 + j\,0.51890\right]$$

$\underline{|\bar{V}_{ind}| = 0.17 \text{ volt per varv}}$ (amplitudvärde)

5. En generator med tomgångsspänningen $u(t) = 5 \cdot \cos(3\pi \cdot 10^8 \cdot t)$ V och inre impedansen $Z_g = (120+j0)\ \Omega$ matar, via en <u>förlustfri</u> kvartsvågsledning med karakteristiska impedansen $Z_c = 100\ \Omega$, en belastning $Z_L = (50-j100)\ \Omega$. Man vill öka effektutvecklingen i lasten Z_L genom att koppla en kondensator C i serie med ingången till kabeln.

A) Beräkna lämpligaste värde på C!

B) Med hur många procent växer effektutvecklingen i lasten vid inkopplingen av kondensatorn enligt A) ?

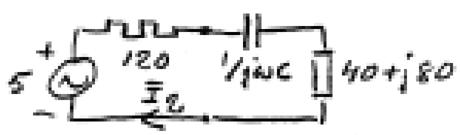


(5) In impedansen på kvartsvågsledningen blir

$$Z_{in} = Z_c^2 / Z_L = 100^2/(50-j100) = 40+j80$$

$\bar{I}_1 = \frac{5}{120+40+j80}$; $P_L^{I} = \frac{1}{2} 40 \cdot |\bar{I}_1|^2 = \frac{1}{64}$ (W)

Med kondensatorn inkopplad får vi



Välj $\frac{1}{\omega C} = 80 \Rightarrow \underline{\underline{C}} = \frac{1}{3\pi \cdot 10^8 \cdot 80} = \underline{\underline{13{,}3}}$ (pF)

$\bar{I}_2 = \frac{5}{120+40}$; $P_L^{II} = \frac{1}{2} 40 |\bar{I}_2|^2 = \frac{5}{256}$ (W) ; $P_L^{II} - P_L^{I} = \frac{1}{256}$ (W)

$\underline{\underline{(P_L^{II} - P_L^{I})/P_L^{I}}} = \frac{1}{256} \cdot 64 = \underline{\underline{25\%}}$ ökning m.h.a. $C = 13{,}3$ pF

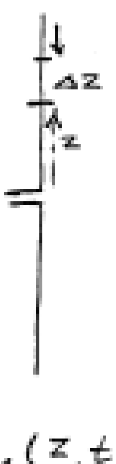
6. På en kort centermatad sprötdipol med längden l belägen i origo och riktad i z-led ges strömmen approximativt av uttrycket

$$i(z,t) = I_o \cdot (1 - 2|z|/l) \cdot \cos(\omega t) \quad , \text{ för } \quad -l/2 \le z \le l/2$$

Beräkna linjeladdningstätheten $\rho_l(z,t)$ på spröten!

<u>Ledning:</u> Kontinuitetsekvationen.

⑥



$$i(z+\Delta z,t) - i(z,t) = -\frac{\partial}{\partial t}\left[\rho_l(z,t)\cdot \Delta z\right] \qquad (K.E.)$$

$$\frac{\partial i}{\partial z} = -\frac{\partial \rho_l}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial \rho_l}{\partial t} = -I_o\,(-2/l)\cos(\omega t) \;; & z>0 \\[2ex] \dfrac{\partial \rho_l}{\partial t} = -I_o\,(+2/l)\cos(\omega t) \;; & z<0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \rho_l(z,t) = \dfrac{2I_o}{l}\cdot\dfrac{\sin(\omega t)}{\omega} \;; & z>0 \\[2ex] \rho_l(z,t) = -\dfrac{2I_o}{l}\cdot\dfrac{\sin(\omega t)}{\omega} \;; & z<0 \end{cases}$$