Fält 03. Tentamen i Elektromagnetisk fältteori F, för F2, 27/1 1996.

1. Härled uttrycken $F_x = -(\partial W_e/\partial x)_Q = +(\partial W_e/\partial x)_V$ för kraften i x-riktningen på något föremål i ett elektrostatiskt system med den elektrostatiska energin W_e, vilken beror av föremålets lägeskoordinater.

Räkneuppgifter Hjälpmedel enligt listan högst upp!

2. Vilken laddningsfördelning i rummet krävs för att man skall få en potential, som beror av x på nedanstående sätt?

$$V(x)=V_0(1-x^2/a^2) \quad ; \ |x|<a$$
$$V(x)=0 \quad ; \ |x|\geq a$$

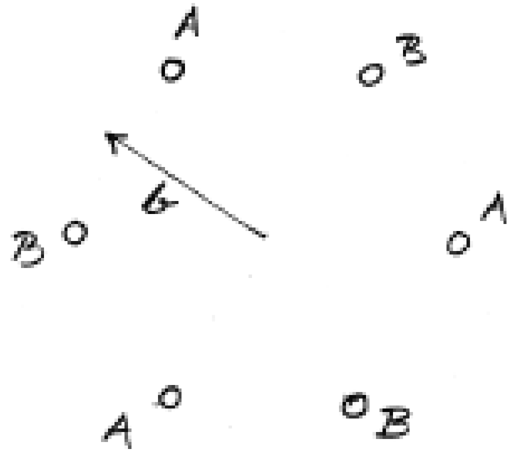
Ledning: Se upp med ytladdningstätheter!

(2) $\mathbf{E} = -\nabla V \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{E}(x) = -\hat{x}\frac{\partial}{\partial x}\left[V_0\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\right] = \hat{x}\,\frac{2V_0 x}{a^2} & \text{, för } |x|<a \\ \mathbf{E}(x) = 0 & \text{, för } |x|>a \end{cases}$

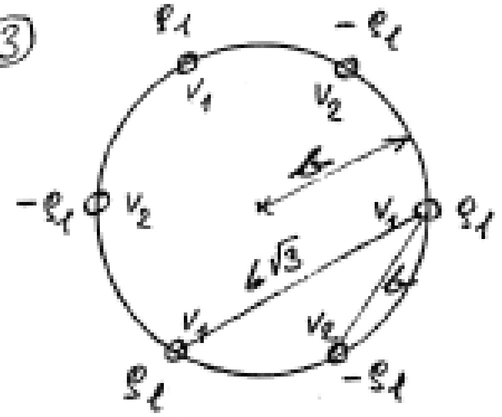
$\varrho = \varepsilon_0 \nabla\cdot\mathbf{E} \Rightarrow \begin{cases} \varrho(x) = \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{2V_0 x}{a^2}\right] = \frac{2\varepsilon_0 V_0}{a^2} & \text{, för } |x|<a \\ \varrho(x) = 0 & \text{, för } |x|>a \end{cases}$

$\varrho_s = D_{1n} - D_{2n} \Rightarrow \begin{cases} \varrho_s = \varepsilon_0 \underbrace{E(a^+)}_{=0} - \varepsilon_0 E(a^-) = -\frac{2\varepsilon_0 V_0}{a} & \text{, vid } x=a \\ \varrho_s = \varepsilon_0 E(-a^+) - \varepsilon_0 \underbrace{E(-a^-)}_{=0} = -\frac{2\varepsilon_0 V_0}{a} & \text{, vid } x=-a \end{cases}$

3. På en tänkt cylinderyta med radien b ligger jämnt fördelade sex likadana långa parallella metalltrådar med trådradie a. Beräkna kapacitansen per längdenhet hos den dubbelledning man får, om man delar in trådarna i två grupper så att varannan tråd föres till vardera gruppen och låter trådarna i den ena gruppen tillsammans utgöra framledning och trådarna i den andra tillsammans utgöra återledning!



3



$$V_2 = -V_1$$

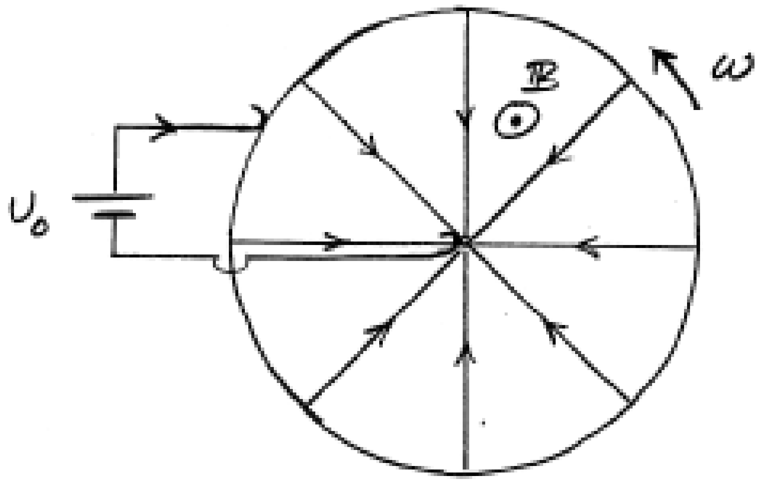
$$V_1 = \frac{\varrho_l}{2\pi\varepsilon_0}\left[\ln\left(\frac{2b}{a}\right) + \ln\left(\frac{b}{b\sqrt{3}}\right) + \ln\left(\frac{b}{b\sqrt{3}}\right)\right] =$$

$$= \frac{\varrho_l}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{2b}{3a}\right)$$

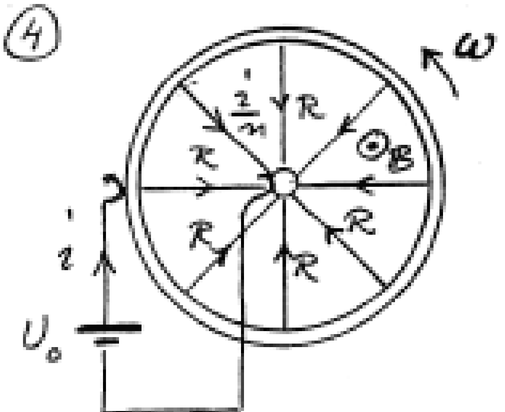
$$C = \frac{3\varrho_l}{V_1 - V_2} = \frac{3\varrho_l}{2V_1} = \frac{3\pi\varepsilon_0}{\ln(2b/3a)} \qquad (F/m)$$

---

4. En enkel likströmsmotor består av ett ekerhjul med radien a och n stycken ekrar. Hjulet befinner sig i ett axiellt homogent magnetfält med styrkan B_o. Varje eker har resistansen R , medan resistanserna hos nav och periferi är försumbara. Motorn är ansluten till likspänningen U_o. Beräkna, som funktion av vinkelhastigheten ω, motorns mekaniska effekt, vridande moment och verkningsgrad!



(4)



Rörelseemk'en i ekrarna blir riktad radiellt utåt. [$v \times B$]

$$V_{rörelse} = \int_0^a \omega r B_o \, dr = \frac{1}{2}\omega B_o a^2$$

$$U_o - V_{rörelse} = R \cdot \frac{i}{n} \quad \text{[Kirchhoff slingekv.]}$$

$$i = \frac{n}{R}\left(U_o - \frac{1}{2}\omega B_o a^2\right)$$

$$P_{batt} = U_o i = U_o \frac{n}{R}\left(U_o - \frac{1}{2}\omega B_o a^2\right) \quad ; \quad P_{värme} = n R \cdot \left(\frac{i}{n}\right)^2 = \frac{n}{R}\left(U_o - \frac{1}{2}\omega B_o a^2\right)^2$$

$$\underline{P_{mek}} = P_{batt} - P_{värme} = U_o \frac{n}{R}\left(U_o - \frac{1}{2}\omega B_o a^2\right) - \frac{n}{R}\left(U_o - \frac{1}{2}\omega B_o a^2\right)^2 =$$

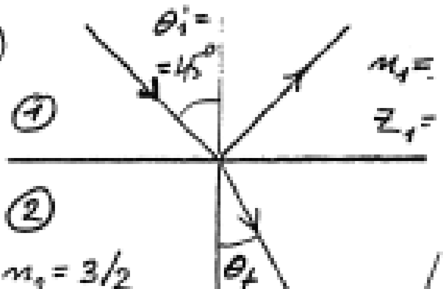
$$= \underline{\frac{n}{R}\left(U_o - \frac{1}{2}\omega B_o a^2\right)\frac{1}{2}\omega B_o a^2}$$

$$\underline{T_{mek}} = P_{mek}/\omega = \underline{\frac{n}{R}\left(U_o - \frac{1}{2}\omega B_o a^2\right)\frac{1}{2}B_o a^2}$$

$$\underline{\text{Verkningsgrad}} = P_{mek}/P_{batt} = \underline{\frac{\omega B_o a^2}{2U_o}}$$

5. En cirkulärt polariserad elektromagnetisk våg med poyntingvektorn $S_{med} = 500\ \mathrm{W/m^2}$ träffar under infallsvinkeln 45^o en plan vattenyta. Beräkna poyntingvektorerna hos den reflekterade respektive den transmitterade vågen, om vattnet antages förlustfritt och dess brytningsindex sättes till 1.5 !

5



$n_1 = 1$

$Z_1 = Z_0$

$n_2 = 3/2$

$Z_2 = \frac{Z_0}{n_2}$

$$n_1 \sin 45^o = n_2 \sin\theta_t \Rightarrow \sin\theta_t = \frac{2}{3\sqrt{2}}$$

$$\cos\theta_t = \sqrt{1 - \frac{4}{9\cdot 2}} = \sqrt{7}/3$$

$$\left(\frac{\bar{E}_{r0}}{\bar{E}_{i0}}\right)_\perp = \frac{\frac{1}{Z_1}\cos\theta_i - \frac{1}{Z_2}\cos\theta_t}{\frac{1}{Z_1}\cos\theta_i + \frac{1}{Z_2}\cos\theta_t} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{3}{2}\cdot\frac{\sqrt{7}}{3}}{\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{3}{2}\cdot\frac{\sqrt{7}}{3}} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{7}}{\sqrt{2}+\sqrt{7}}$$

$$\left(\frac{\bar{E}_{r0}}{\bar{E}_{i0}}\right)_\parallel = \frac{-Z_1\cos\theta_i + Z_2\cos\theta_t}{Z_1\cos\theta_i + Z_2\cos\theta_t} = \frac{-\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{7}}{3}}{\frac{3}{2}\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{7}}{3}} = \frac{-9+2\sqrt{14}}{9+2\sqrt{14}}$$

$$S_i = \frac{1}{2}\cdot\frac{|\bar{E}_{i0}|^2}{Z_0} + \frac{1}{2}\frac{|\bar{E}_{i0}|^2}{Z_0} = 500 \Rightarrow |\bar{E}_{i0}|^2/Z_0 = 500$$

$$S_r = \frac{1}{2}\frac{|\bar{E}_{r0\perp}|^2}{Z_0} + \frac{1}{2}\frac{|\bar{E}_{r0\parallel}|^2}{Z_0} = \frac{1}{2Z_0}|\bar{E}_{i0}|^2\left[\left(\frac{\sqrt{2}-\sqrt{7}}{\sqrt{2}+\sqrt{7}}\right)^2 + \left(\frac{-9+2\sqrt{14}}{9+2\sqrt{14}}\right)^2\right] = 26.12\ \left(\frac{W}{m^2}\right)$$

$$\left(\frac{\bar{E}_{t0}}{\bar{E}_{i0}}\right)_\perp = \frac{\frac{2}{Z_1}\cos\theta_i}{\frac{1}{Z_1}\cos\theta_i + \frac{1}{Z_2}\cos\theta_t} = \frac{2\,\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{3}{2}\cdot\frac{\sqrt{7}}{3}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{7}}$$

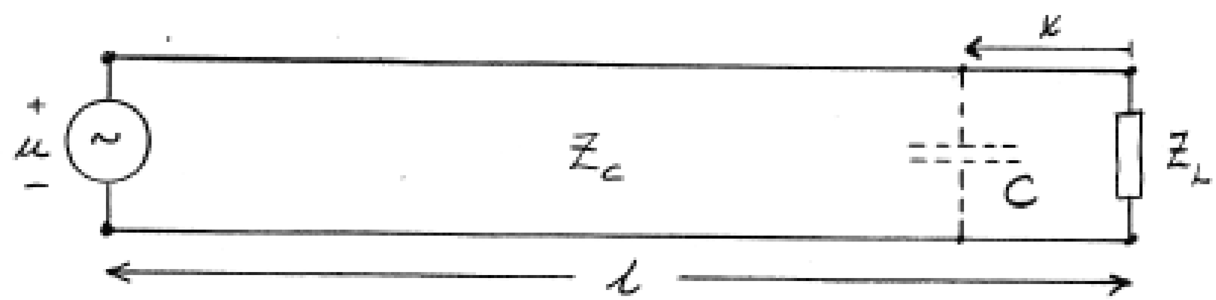
$$\left(\frac{\bar{E}_{t0}}{\bar{E}_{i0}}\right)_\parallel = \frac{2Z_2\cos\theta_i}{Z_1\cos\theta_i + Z_2\cos\theta_t} = \frac{2\,\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{7}}{3}} = \frac{12}{9+2\sqrt{14}}$$

$$S_t = \frac{1}{2}\frac{|\bar{E}_{t0\perp}|^2}{Z_2} + \frac{1}{2}\frac{|\bar{E}_{t0\parallel}|^2}{Z_2} = \frac{1}{2Z_0} n_2 |\bar{E}_{i0}|^2\left[\left(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{7}}\right)^2 + \left(\frac{12}{9+2\sqrt{14}}\right)^2\right] = 360.75\ \left(\frac{W}{m^2}\right)$$

6. En spänningskälla $u = U_o\cos(\omega t)$ kopplas till en <u>förlustfri</u> ledning med karakteristiska impedansen $Z_c = 300\ \Omega$ och längden l. Ledningen är avslutad med belastningen $Z_L = 150\ \Omega$. På grund av missanpassningen kommer den effekt, som utvecklas i lasten Z_L att bero av ledningens längd l.

A) Beräkna den största och den minsta effekt, som kommer att utvecklas i Z_L då längden l varieras!

B) Med hjälp av en parallellkondensator på lämpligt avstånd framför lasten kan, för fix frekvens, anpassning till ledningens karakteristiska impedans åstadkommas. Beräkna läge och storlek på en sådan kondensator, om frekvensen är 100 MHz och fashastigheten på ledningen är $3\cdot 10^8$ m/s!



⑥ Eftersom ledningen är förlustfri kommer den effekt som
A) generatorn avger i belastningsimpedansen Z_L.

$P_{avg} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\{\bar{U}\,\bar{I}^*\} = \frac{1}{2}|\bar{U}|^2\,\mathrm{Re}\{Y^*\}$, där Y är admittansen in på ledningen. $Y = \frac{1}{300}\cdot\frac{300\cos\beta l + j150\sin\beta l}{150\cos\beta l + j300\sin\beta l} =$

$= \frac{1}{300}\cdot\frac{2 + j\tan\beta l}{1 + j2\tan\beta l}$; $\mathrm{Re}\{Y^*\} = \frac{1}{300}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left[1 + \frac{3}{1+4\tan^2\beta l}\right]$

Max $P_{avg} = \frac{1}{2}U_o^2\cdot\frac{1}{600}[1+3] = \underline{\underline{U_o^2/300}}$; för $\tan^2\beta l = 0$

Min $P_{avg} = \frac{1}{2}U_o^2\cdot\frac{1}{600}[1+0] = \underline{\underline{U_o^2/1200}}$; för $\tan^2\beta l = \infty$

B) Vi får anpassning om

$Y(x) + j\omega C = \frac{1}{Z_c} \Rightarrow j\omega C = \frac{1}{300}\left[1 - \frac{2+j\tan\beta x}{1+j2\tan\beta x}\right] = \frac{j}{300}\cdot\underbrace{\frac{\tan\beta x + j}{1+j2\tan\beta x}}_{\text{måste vara reell och pos.}}$

$\Rightarrow \tan\beta x = 1/\sqrt{2}$; $\underline{\beta x = \arctan(1/\sqrt{2}) + n\cdot\pi}$

$\beta = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi\cdot 10^8}{3\cdot 10^8} = \frac{2\pi}{3}$; $\underline{\underline{x_0 = \frac{3}{2\pi}\cdot 0.61548 + n\cdot 1.5}} = 0.2939 + n\cdot 1.5$

$\underline{\underline{C}} = \frac{1}{\omega}\cdot\frac{1}{300}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2\pi\cdot 10^8}\cdot\frac{1}{300}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = \underline{\underline{3{,}75}}\,(pF)$