Fält 02. Tentamen i Elektromagnetisk fältteori F. för F2.
4/9 1995.

1

Tillåtna hjälpmedel:	BETA, SMT, Physics Handbook, Formelsamling i Elektromagnetisk fältteori, Brander/Formelsamling till vektoranalys och part. diff. ekv., valfri kalkylator men inga egna anteckningar utöver egna formler på sista bladet i formelsamlingen i Elektromagnetisk fältteori.
Förfrågningar:	Tel. ankn. 1583
Lösningar	anslås efter tentamens slut vid Telesnack.
Resultatet	sändes senast den 2/10 1995 till studievägledningen F.
Granskning	sker på tid som anges på betygslistan.
Betygen	sändes till betygsexpeditionen senast den 6/10 1995.

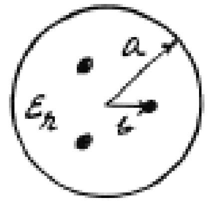
- 0 - 0 - 0 -

Kom ihåg!	Tydliga figurer, Referensriktningar, Dimensionskontroll, Motiveringar.

1. Utgå från Maxwells ekvationer och från att aktuellt medium är linjärt, isotropt och homogent, och härled de inhomogena vågekvationerna för vektorpotentialen **A** och skalärpotentialen V under utnyttjande av Lorentzvillkoret $\nabla\cdot\mathbf{A} + \mu\varepsilon\partial V/\partial t = 0$!

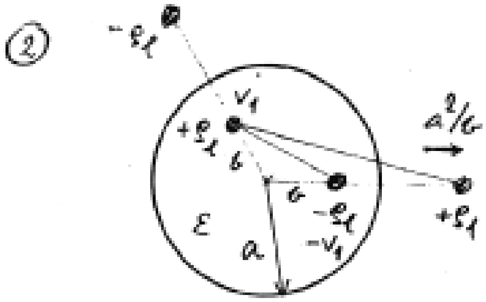
Räkneuppgifter Hjälpmedel enligt listan högst upp!

2. I en skärmad treledarkabel ligger ledarna som vardera har radien r_o symmetriskt placerade som figuren visar. Avståndet från trådcentrum till skärmcentrum är b. Skärmradien är a. Beräkna kapacitansen/längdenhet hos den dubbelledning man får, om endast två av ledarna utnyttjas! Isolationsmaterialet som trådarna ligger inbäddade i har dieltalet ε_r.
[r_o<<b och r_o<<a-b]



---

(2)



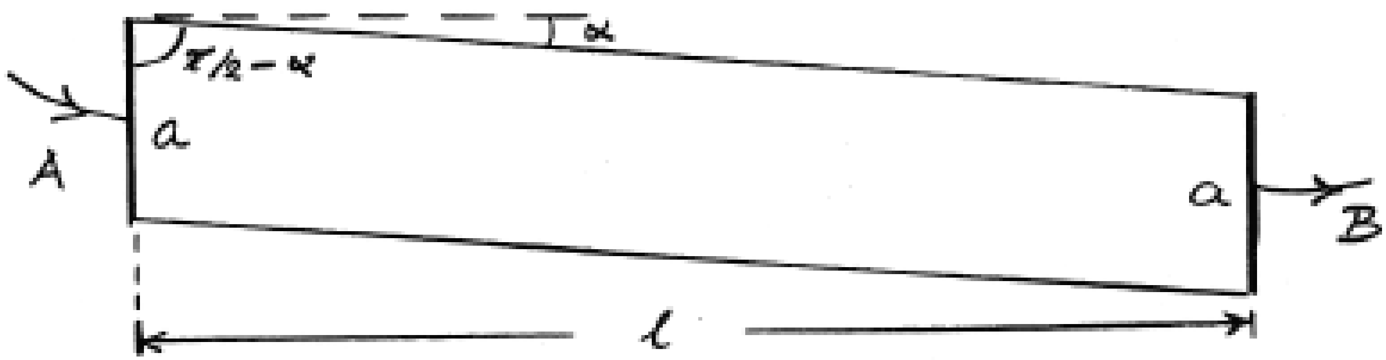
$$V_1 = \frac{\varrho_\ell}{2\pi\varepsilon}\ln\left(\frac{\frac{a^2}{b}-b}{r_o}\right) + \frac{\varrho_\ell}{2\pi\varepsilon}\ln\left(\frac{b\sqrt{3}}{\sqrt{b^2+a^4/b^2+a^2}}\right)$$

$$= \frac{\varrho_\ell}{2\pi\varepsilon}\ln\left(\frac{(a^2-b^2)b\sqrt{3}}{r_o\sqrt{a^4+b^4+a^2b^2}}\right)$$

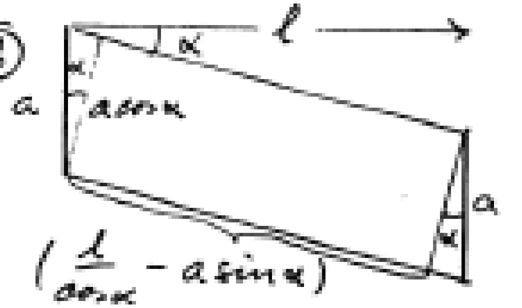
$\varepsilon = \varepsilon_r\varepsilon_o$

$$C = \frac{\varrho_\ell}{2V_1} = \frac{\pi\varepsilon}{\ln\left\{\frac{(a^2-b^2)b\sqrt{3}}{r_o\sqrt{a^4+b^4+a^2b^2}}\right\}} \quad (F/m)$$

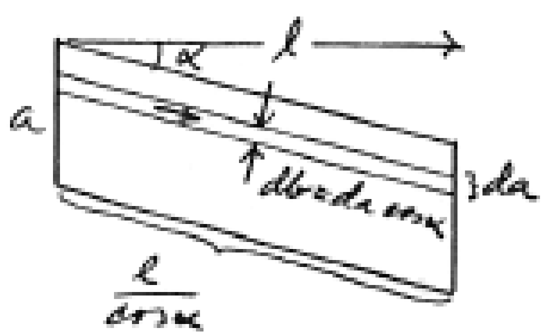
3. Ur en tunn plåt med ytresistansen s Ω har man klippt ut en bit med utseende enligt figuren. Använd metoden med fixerade ekvipotentialytor respektive fixerade strömrör för att beräkna en undre respektive övre begränsning till resistansen mellan två elektroder anbragta vid A och B!



3



$$\underline{\underline{R_u}} = s\cdot\frac{\frac{l}{\cos\alpha}-a\sin\alpha}{a\cos\alpha} = \underline{\underline{s\cdot\frac{l-a\cos\alpha\sin\alpha}{a\cos^2\alpha}}} \quad (\Omega)$$



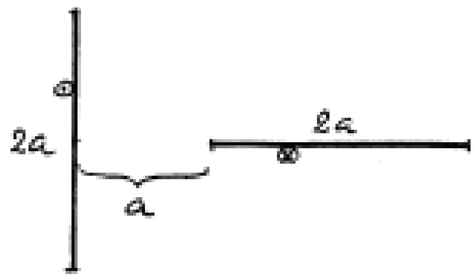
$$dG = \frac{1}{s}\cdot\frac{db}{\frac{l}{\cos\alpha}} = \frac{1}{s}\cdot\frac{da\cos\alpha}{l/\cos\alpha} = \frac{1}{s}\cdot\frac{da}{l}\cos^2\alpha$$

$$G = \int_0^a dG = \frac{1}{s}\cdot\frac{a}{l}\cdot\cos^2\alpha$$

$$\underline{\underline{R_ö}} = \frac{1}{G} = \underline{\underline{s\cdot\frac{l}{a\cos^2\alpha}}} \quad (\Omega)$$

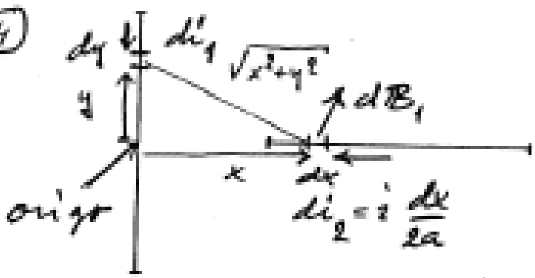
4. Två långa, platta metallband med centrumavståndet 2a och vardera med bredden 2a, löper parallellt så som figuren visar och utgör fram- och återledning för en likström i. Beräkna den kraft per längdenhet varmed den vänstra ledaren påverkar den högra!

Ledning: Dela in strömmen i strömrör och utnyttja formeln för **B**-fältet från en lång rak strömförande tråd!



---

(4)



B-fältet i punkten $(x,0)$ från den vänstra ledaren blir

$$\underline{B_1} = \int_{y=-a}^{a} dB_1 = \int_{y=-a}^{a} \hat{y}\, dB_y = \hat{y}\cdot\frac{\mu_0 i}{4\pi a}\int_{-a}^{a}\frac{x\,dy}{x^2+y^2} =$$

$$= \hat{y}\,\frac{\mu_0 i}{4\pi a}\cdot 2\arctan\left(\frac{a}{x}\right)$$

$$|dB_1| = \frac{\mu_0\, di_1}{2\pi\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$dB_y = \frac{\mu_0\, i\,dy/2a}{2\pi\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Kraften/m på strömröret i $(x,0)$ är dF

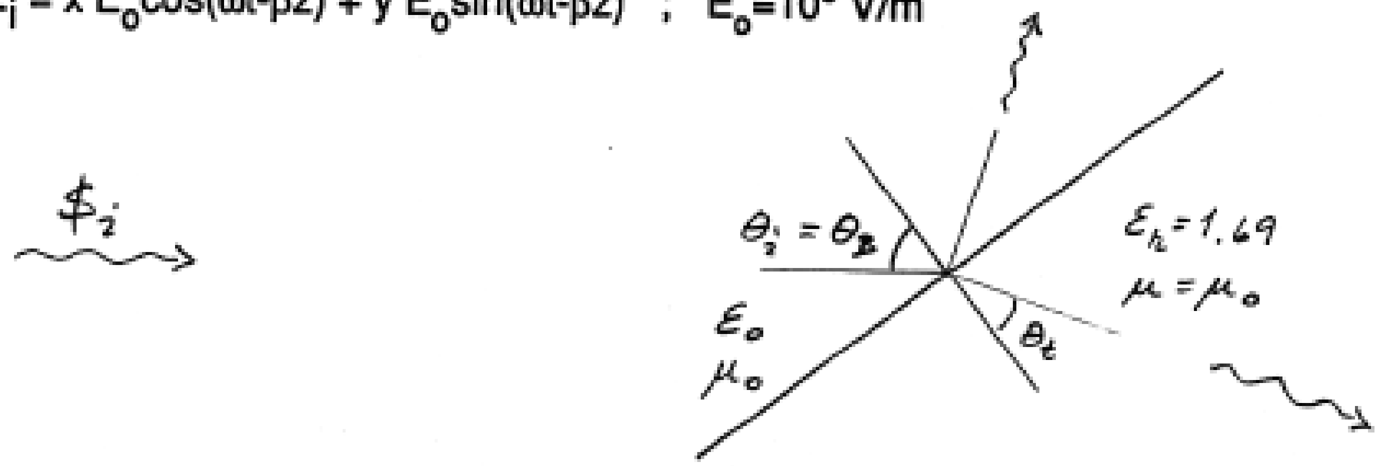
$$dF = di_2(-\hat{z})\times B_1 = i\,\frac{dx}{2a}\cdot\hat{x}\,\frac{\mu_0 i}{2\pi a}\arctan\left(\frac{a}{x}\right)$$

$$\underline{\underline{F_{12}}} = \int_{x=a}^{3a} dF = \hat{x}\,\frac{\mu_0 i^2}{4\pi a^2}\cdot\int_a^{3a}\arctan\left(\frac{a}{x}\right)dx = \underline{\underline{\hat{x}\,\frac{\mu_0 i^2}{4\pi a}\cdot\left[\frac{5\pi}{4} - 3\arctan 3 + \ln\sqrt{5}\right]}}$$

$$= \hat{x}\,\frac{\mu_0 i^2}{4\pi a}\cdot 0{,}9846 \quad (N/m)$$

5. En cirkulärt polariserad våg i vakuum träffar en plan gränsyta till ett förlustfritt dielektrikum med dieltalet $\varepsilon_r = 1.69$ under Brewstervinkel. Beräkna tidsmedelvärdet av Poyntingvektorerna hos infallande, reflekterad och transmitterad våg, om den infallande vågens **E**-fält ges av nedanstående uttryck!

$$\mathbf{E}_i = \hat{x}\,E_o\cos(\omega t-\beta z) + \hat{y}\,E_o\sin(\omega t-\beta z) \quad ; \quad E_o = 10^3\ \text{V/m}$$



(5) $\tan\theta_B = \sqrt{1,69} = 1,3 \Rightarrow \sin\theta_B = \frac{13}{\sqrt{269}}$; $\cos\theta_B = \frac{10}{\sqrt{269}}$

$\sin\theta_B = 1,3\sin\theta_t \Rightarrow \sin\theta_t = \frac{10}{\sqrt{269}}$; $\cos\theta_t = \frac{13}{\sqrt{269}}$

$$\left(\frac{\bar{E}_{ro}}{\bar{E}_{io}}\right)_\perp = \frac{(1/Z_o)\cos\theta_B - (1,3/Z_o)\cos\theta_t}{(1/Z_o)\cos\theta_B + (1,3/Z_o)\cos\theta_t} = \frac{10 - 1,3\cdot 13}{10 + 1,3\cdot 13} = \frac{-6,9}{26,9} = -0,2565$$

$$\left(\frac{\bar{E}_{ro}}{\bar{E}_{io}}\right)_\parallel = 0$$

$$\left(\frac{\bar{E}_{to}}{\bar{E}_{io}}\right)_\perp = \frac{(2/Z_o)\cos\theta_B}{(1/Z_o)\cos\theta_B + (1,3/Z_o)\cos\theta_t} = \frac{2\cdot 10}{10 + 1,3\cdot 13} = \frac{20}{26,9} = 0,7435$$

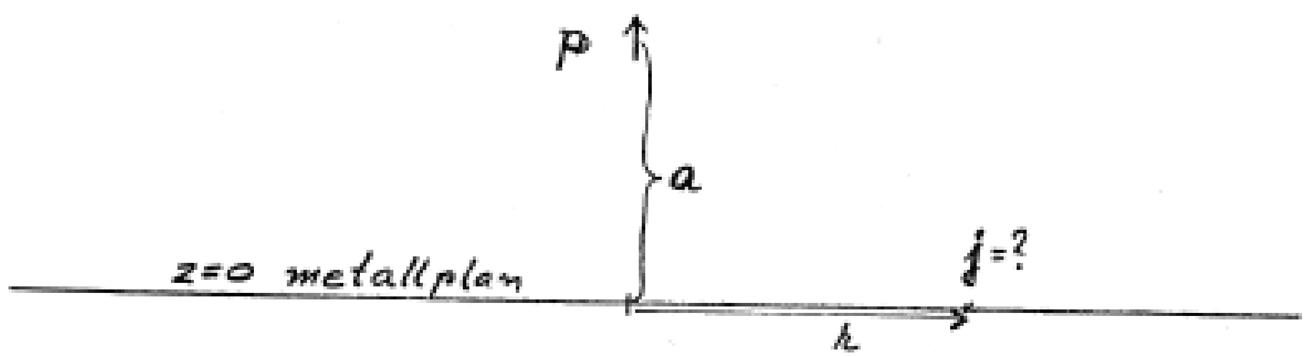
$$\left(\frac{\bar{E}_{to}}{\bar{E}_{io}}\right)_\parallel = \frac{2(Z_o/1,3)\cos\theta_B}{Z_o\cos\theta_B + (Z_o/1,3)\cos\theta_t} = \frac{20/1,3}{10 + 13/1,3} = \frac{20}{26} = 0,7692$$

$$S_{i\,med} = 2\cdot\frac{E_o^2}{2Z_o} \quad ; \quad S_{r\,med} = \frac{E_o^2}{2Z_o}\cdot(-0,2565)^2 = \frac{E_o^2}{2Z_o}\cdot 0,0658$$

$$S_{t\,med} = \frac{E_o^2}{2(Z_o/1,3)}\cdot\left[0,7435^2 + 0,7692^2\right] = \frac{E_o^2}{2Z_o}\cdot 1,4878$$

$\underline{\underline{S_{i\,med} = 2653\ \text{W/m}^2}}$; $\underline{\underline{S_{r\,med} = 87,27\ \text{W/m}^2}}$; $\underline{\underline{S_{t\,med} = 1973\ \text{W/m}^2}}$

6. En Hertz-dipol **p**(t) = $\hat{z}\, p_o \cos(\omega t)$ befinner sig i vakuum i punkten (0,0,a). I xy-planet ligger ett stort, mycket <u>gott</u> ledande metallplan. Beräkna den ytströmtäthet j(r,ϕ,0,t), som den svängande dipolen orsakar i metall-planets yta under antagandet att planet är perfekt ledande och avståndet a så stort att planet befinner sig i strålningszonen från dipolen.
<u>Ledning</u>: Använd speglingsmetoden och randvillkoret för **H**-fältet vid den perfekt ledande ytan!



⑥ Spegling av den svängande dipolen ger vidstående situation.

Formlerna för Hertz-dipolen ger

$$\bar{H}(r,\varphi,0) = \hat{\varphi}\, 2 \cdot \frac{-\omega^2 p_o \cdot (r/\sqrt{a^2+r^2})}{4\pi c \sqrt{a^2+r^2}}\, e^{-j\omega\sqrt{a^2+r^2}/c}$$

Randvillkoret för H-fältet $\hat{n}_2 \times (\bar{H}_1 - \bar{H}_2) = \bar{j}_s$ och $\bar{H}_2 = 0$ ger

$$\bar{j}_s = \hat{z} \times \hat{\varphi}\, \frac{-\omega^2 p_o r}{2\pi c (a^2+r^2)}\, e^{-j\omega\sqrt{a^2+r^2}/c} = \hat{r}\, \frac{\omega^2 p_o r}{2\pi c (a^2+r^2)}\, e^{-j\omega\sqrt{a^2+r^2}/c}$$

$$j_s(r,\varphi,0,t) = \hat{r}\, \frac{\omega^2 p_o r}{2\pi c (a^2+r^2)} \cdot \cos\left(\omega t - \frac{\omega}{c}\sqrt{a^2+r^2}\right) \quad (A/m)$$