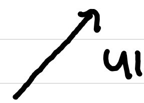
21/11 Vektorfält och elektromagnetisk fältteori (1)

Innehåll:
- Vektorer och skalärer
  + Repetition av vektorer och vektoroperationer
    - Exempel 1.4
      + Skalärprodukt
    - Exempel 1.7
      + Kryssprodukt
  + Skalära fält och vektorfält
    - Exempel
      + Temperatur konturlinjer
  + Vektorfält
    - Exempel
      + Vektorfält och fältlinjer

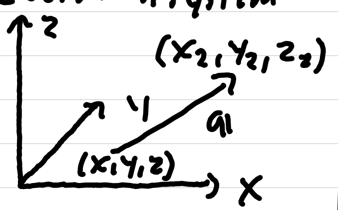
Vektorer och skalärer

Kursbok: Vector calculus, finns som PDF
Kommer att finnas dugga och inlämningsuppgifter i LP3. Inget i LP2.

- Vektorer - storlek, riktning
- Skalär - storlek

Representation av vektor 

Koordinatsystem



Introducera vektorbeteckning $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$
$\Rightarrow a_1 = x_2 - x_1,\ a_2 = y_2 - y_1,\ a_3 = z_2 - z_1$

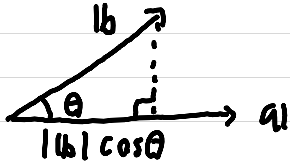
Högersystem

Koordinatsystem beskrivs med enhetsvektorer
$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \quad (\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$
Basvektorer (ortonormerade)
$|\mathbf{e}_1| = |\mathbf{e}_2| = |\mathbf{e}_3| = 1$
Kan nu skriva $\mathbf{a} = a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2 + a_3 \mathbf{e}_3$

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

Ortsvektorer: En vektor som pekar från en plats i rummet. Beteckning $\mathbf{r} = (x, y, z)$.

Skalärprodukt: $\mathbb{a} \cdot \mathbb{b} = |\mathbb{a}||\mathbb{b}|\cos\theta$



- $\mathbb{a} \cdot \mathbb{b} = \mathbb{b} \cdot \mathbb{a}$
- Om vinkelräta $\Leftrightarrow \mathbb{a} \cdot \mathbb{b} = 0$
- $\mathbb{a} \cdot \mathbb{a} = |\mathbb{a}|^2$
- $\mathbb{a} \cdot (\mathbb{b} + \mathbb{c}) = \mathbb{a} \cdot \mathbb{b} + \mathbb{a} \cdot \mathbb{c}$
- $c(\mathbb{a} \cdot \mathbb{b}) = (c\,\mathbb{a}) \cdot \mathbb{b}$

Formel för skalärprodukt

$$\mathbb{a} \cdot \mathbb{b} = (a_1 \mathbb{e}_1 + a_2 \mathbb{e}_2 + a_3 \mathbb{e}_3) \cdot (b_1 \mathbb{e}_1 + b_2 \mathbb{e}_2 + b_3 \mathbb{e}_3)$$
$$= a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

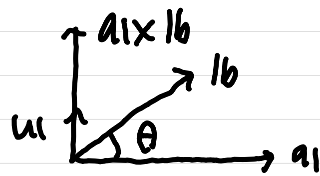
Exempel 1.4: Vilket c ger ortogonala vektorer för

$(c, 1, 1) \cdot (-1, 2, 0) = -c + 2 = 0 \Rightarrow c = 2$

Kryssprodukt: $\mathbb{a} \times \mathbb{b}$

$|\mathbb{a} \times \mathbb{b}| = |\mathbb{a}||\mathbb{b}|\sin\theta$

Vektor vinkelrät mot $\mathbb{a}$ och $\mathbb{b}$ i högersystem



$$\mathbb{a} \times \mathbb{b} = |\mathbb{a}||\mathbb{b}|\sin\theta\,\mathbb{u}$$

- $\mathbb{a} \times \mathbb{b} = -\mathbb{b} \times \mathbb{a}$
- Om $\mathbb{a} \parallel \mathbb{b} \Longleftrightarrow \mathbb{a} \times \mathbb{b} = \mathbb{0}$
- $\mathbb{a} \times (\mathbb{b} + \mathbb{c}) = \mathbb{a} \times \mathbb{b} + \mathbb{a} \times \mathbb{c}$
- $(c\,\mathbb{a}) \times \mathbb{b} = c(\mathbb{a} \times \mathbb{b})$

$$\mathbb{a} \times \mathbb{b} = (a_1, a_2, a_3) \times (b_1, b_2, b_3) = \begin{vmatrix} \mathbb{e}_1 & \mathbb{e}_2 & \mathbb{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

Exempel 1.7: Enhetsvektor vinkelrät mot $(1, 0, 1)$ och $(0, 1, 1)$

$$(1,0,1)\times(0,1,1) = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1,-1,1)$$

Normering: $\dfrac{(-1,-1,1)}{\sqrt{3}}$

Skalär trippelprodukt: $\mathbf{a}\cdot\underbrace{\underbrace{\mathbf{b}\times\mathbf{c}}_{1}}_{2} := \mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\times\mathbf{c} = \mathbf{b}\cdot\mathbf{c}\times\mathbf{a} = \mathbf{c}\cdot\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

Om två vektorer är identiska $\Rightarrow \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\times\mathbf{c} = 0$

Vektortrippelprodukt:

$$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})\,\mathbf{b} - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\,\mathbf{c}$$

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c} = -\mathbf{c}\times(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) = -(\mathbf{c}\cdot\mathbf{b})\,\mathbf{a} + (\mathbf{c}\cdot\mathbf{a})\,\mathbf{b}$$

Skalära fält och vektorfält

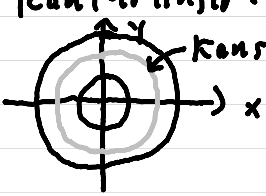
Skalärt fält i 3D: $T(x,y,z) = T(\mathbf{r})$ (temperatur)

2D: $T(x,y) = T(\mathbf{r})$

Exempel: $T(x,y) = x^2 + y^2$

Konturlinjer: Defineras av $T(x,y) = \text{konstant}$

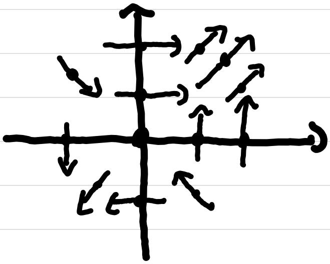
$x^2 + y^2 = \text{konstant}$



Vektorfält i 3D: $\mathbf{u}(x,y,z) = \mathbf{u}(\mathbf{r})$

2D: $\mathbf{u}(x,y) = \mathbf{u}(\mathbf{r})$

Exempel: $\mathbf{u}(x,y) = (y, x)$



Rita ut många pilar för att få förståelse för vektorfältet.

Fältlinjer: En linje som överallt har fältvektorn som tangent. Antag fält $\mathbb{F}(\mathbb{r})$. Låtsas att $\mathbb{F}$ är ett hastighetsfält $\mathbb{v}(\mathbb{r})$ (för enkelhetens och intuitionens skull). En testpartikel följer en bana

$$\frac{d\mathbb{r}}{dt} = \mathbb{v}(\mathbb{r}) \Rightarrow \frac{d\mathbb{r}(t)}{dt} = \mathbb{v}(\mathbb{r}(t))$$

Analogt för $\mathbb{F}$

$$\frac{d}{d\tau}\left(\mathbb{r}(\tau)\right) = C\, \mathbb{F}(\mathbb{r}(\tau))$$

Godtycklig konstant $\neq 0$

Exempel: $\mathbb{F}(x,y) = (y, x)$

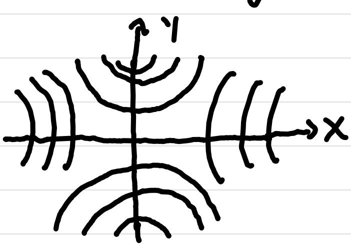
Differentialekvationer: $\begin{cases} \dfrac{dx}{d\tau} = y \\ \dfrac{dy}{d\tau} = x \end{cases}$ (C väljs till 1)

Kopplade. Använd kedjeregeln

$$\frac{dx}{d\tau} = \frac{dx}{dy}\frac{dy}{d\tau} \Rightarrow y = \frac{dx}{dy}\, x$$

$$\Rightarrow \int y\, dy = \int x\, dx \Rightarrow y^2 = x^2 + C \Rightarrow y = \pm\sqrt{C + x^2}$$

$$y^2 - x^2 = C$$



22/11 Vektorfält och elektromagnetisk fältteori ②

Innehåll:

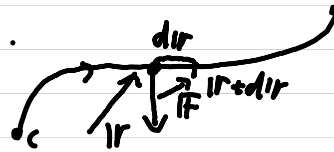
- Linje-, Yt- och Volymintegraler
  + Arbete med linjeintegraler
  + Att beräkna linjeintegraler
    - Exempel
      + Linjeintegral med given parametrisering
  + Linjeintegraler längs sluten kurva
    - Exempel
      + Sluten kurva med linjeintegral
  + Ytintegraler
    - Exempel
      + Flöde genom rör
    - Ytintegral över sluten yta
    - Exempel
      + Flöde genom cylinder
  + Volymintegraler

Linje-, Yt- och Volymintegraler

Arbete $W = F \cdot s$ ← rak

↖ konstant kraft

Om nu $\mathbf{F}$ varierar längs vägen.
Delar in vägen i många delar.
Arbetet vid förflyttning $\mathbf{r} + d\mathbf{r}$.



$$dW = -\mathbf{F} \bullet d\mathbf{r}$$

Nu längs hela C:

$$W = -\sum_{i=1}^{N} \mathbf{F}_i \bullet d\mathbf{r}_i$$

Linjeintegral längs kurvan

$$\int_C \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{N} \mathbf{F}_i \bullet d\mathbf{r}_i$$

Riktning är viktig hos C. Motsatt riktning $\Rightarrow$ multiplikation med -1.

Att beräkna linjeintegraler
Kurvan C måste parametriseras. Uttryck $\mathbf{r}(t)$ som en funktion av exempelvis tid.

$$\int_C \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = \int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \bullet d\mathbf{r} = \int_t \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \frac{d\mathbf{r}}{dt}\, dt$$

Exempel:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} y \\ x \\ z \end{bmatrix}, \quad \text{Parametrisering} \begin{bmatrix} x = t \\ y = t \\ z = 2t^2 \end{bmatrix}, \quad t \in [0,1]$$

$$\text{Uttryck } \mathbf{F}(t) = \begin{bmatrix} t \\ t \\ 2t^2 \end{bmatrix}, \quad \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \begin{bmatrix} dx/dt = 1 \\ dy/dt = 1 \\ dz/dt = 4t \end{bmatrix}$$

$$\text{Beräkna } \int_C \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = \int_0^1 (t, t, 2t^2) \bullet (1, 1, 4t)\, dt =$$

$$= \int_0^1 2t + 8t^3 \, dt = 3$$

Linje integral kring en sluten kurva

Exempel:

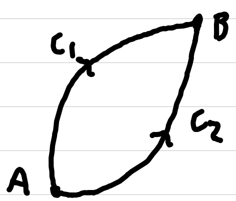
$$\mathbb{F} = \begin{bmatrix} y \\ x \\ z \end{bmatrix}, \quad \text{Parametrisering} = \begin{bmatrix} x = \cos\theta \\ y = \sin\theta \\ z = 0 \end{bmatrix}, \quad \theta \in [0, 2\pi]$$

$$\frac{d\mathbb{r}}{d\theta} = \begin{bmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbb{F}(\theta) = \begin{bmatrix} \sin\theta \\ \cos\theta \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\oint_C \mathbb{F} \bullet d\mathbb{r} = \int_0^{2\pi} (\sin\theta, \cos\theta, 0) \bullet (-\sin\theta, \cos\theta, 0) \, d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi} -\sin^2\theta + \cos^2\theta \, d\theta = \int_0^{2\pi} \cos 2\theta \, d\theta = \left[\frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{2\pi} = 0$$

Fältet $\mathbb{F}$ är konservativt.



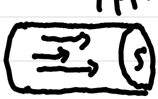
Ekvivalent definition av konservativt fält:
Integralen beror bara av ändpunkter

$$\int_{C_1} \mathbb{F} \bullet d\mathbb{r} = \int_{C_2} \mathbb{F} \bullet d\mathbb{r}$$

Andra linjeintegraler:

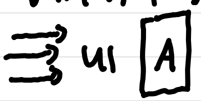
$\int_C \Phi \, d\mathbb{r}$ vektorvärd, $\int_C \mathbb{F} \times d\mathbb{r}$ också vektorvärd

Ytintegraler

Exempel: 

, flöde $\mathbb{u}$ genom S

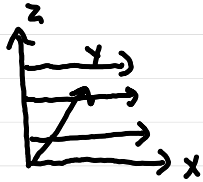
Vätska strömmar genom rör. Enklaste fallet

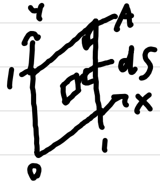


, $\mathbb{u}$ konstant i tid och rum
$|\mathbb{u}| = u_0$

$$\text{Flöde } Q = \frac{u_0 A t}{t} = u_0 A$$

Antag $|\mathbf{u}| = u_0(x,y)$

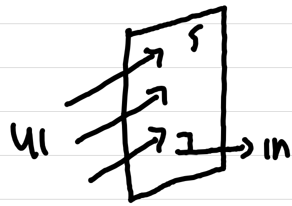




Area $dS = dx\,dy$
Flöde genom dS
$dQ = u_0(x,y) \cdot dS = u_0(x,y)\,dx\,dy$

Totalt flöde $Q = \iint_S u_0(x,y)\,dS = \int_0^1 \int_0^1 u_0(x,y)\,dx\,dy$

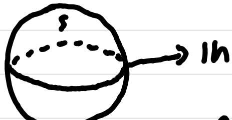
Generellt är $\mathbf{u}$ ej vinkelrätt mot ytan S.



$\mathbf{u}$:s komponent vinkelrätt mot ytan: $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}$
Flöde ytan dS: $dQ = \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}\, dS$
$Q = \iint_S \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}\, dS = \iint_S \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}\, dx\,dy$

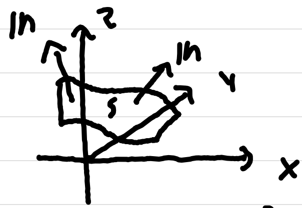
Bestäm riktning på $\mathbf{n}$ först.

Ytintegral över sluten yta



$\oiint_S \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \cdot dS$

Om S är en krökt yta



Parametrisera ytan S som $\mathbf{r}(v,w)$
Betrakta en liten förflyttning v till $v+dv$

$\Rightarrow \mathbf{r}(v+dv, w)$

Skillnadsvektorn $\mathbf{r}(v+dv,w) - \mathbf{r}(v,w) = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} dv$

$d\mathbf{r}$ är tangent till planet.

På samma sätt för $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w} dw$

Vi behöver uttrycka $\mathbf{n}\, dS$.

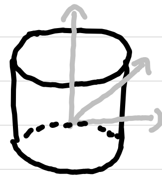
Med hjälp av kryssprodukt kan vi uttrycka

$$\mathbf{n}\, dS = \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w}\right) dv\, dw$$

Gör ytintegral

$$\iint_S \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}\, dS = \iint_S \mathbf{u} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w}\right) dv\, dw$$

Exempel: $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} x \\ z \\ -y \end{bmatrix}$



Yta beskrivs som

$$x^2 + y^2 = 1$$
$$0 \leq z \leq 1$$

Ytan parametriseras med z och θ:

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ z \end{bmatrix}.$$

Beräkna

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} = \begin{bmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \iint_S \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}\, dS = \iint_S \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}\, dz\, d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (\cos\theta, z, -\sin\theta) \cdot (\cos\theta, \sin\theta, 0)\, dz\, d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \cos^2\theta + z \sin\theta\, dz\, d\theta = \ldots = \pi$$

Volymintegral

Volym V har densitet ρ. Om ρ konstant $\Rightarrow m = \rho V$.
Men om $\rho(\mathbf{r})$, vad blir massan av volymen.
Dela upp volymen V i små δV_i.
Summa total massa $M = \sum_{i=1}^{N} \rho(\mathbf{r}_i)\, \delta V_i$

Generalisera $\iiint_V \rho \, dV = \lim_{N \to \infty} \sum_{i=1}^{N} \rho(\mathbf{r}_i) \, \delta V_i$

Också möjligt med

$\iiint_V \mathbf{u} \, dV$.

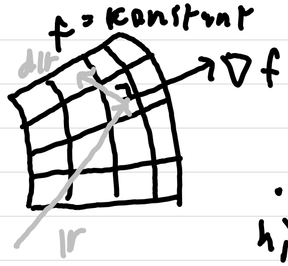
28/11 Vektorfält och elektromagnetisk fältteori ③

Innehåll:

- Gradienter, Divergens, Rotation
  - Gradienter i 3D
    - Exempel 3.4
      - Beräkna enhetsnormal
  - Gradienter, konservativa fält och potentialer
    - Teorem 3.1
  - Divergens av vektorfält
  - Rotation av vektorfält

Gradienter, Divergens, Rotation

I 3D:



- Gradienten ∇f är vinkelrät mot isoyta. Pekar i riktning mot ökande f.
- Amplituden = förändringshastighet hos f.
- Gradienten beskrivs med hjälp av partialderivator

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{e}_1 + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{e}_2 + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{e}_3$$

Visa att ovanstående påståenden gäller. Antag liten förflyttning $\mathbf{r}$ till $\mathbf{r}+d\mathbf{r}$. Ger motsvarande ändring: f till f + df. Med hjälp av Taylorutveckling:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial f}{\partial z}\Delta z$$
$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)\cdot(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$$
$$:= \nabla f \cdot d\mathbf{r}$$

Antag att $d\mathbf{r}$ ligger i planet f = konstant
$\Rightarrow df = 0 \Rightarrow \nabla f \cdot d\mathbf{r} = 0$

I allmänhet $\nabla f \neq 0$ och $d\mathbf{r} \neq 0$. Då för att $\nabla f \cdot d\mathbf{r} = 0$ måste ∇f och $d\mathbf{r}$ vara vinkelräta.

Amplituden: Ersätt $d\mathbf{r} = \mathbf{n}\, ds$, där $|\mathbf{n}| = 1$.
$|\mathbf{n}|$ är i samma riktning som f.
Beräkna $df = \nabla f \cdot \mathbf{n}\, ds = |\nabla f|\, ds$.
$\Rightarrow |\nabla f| = \dfrac{df}{ds} \Rightarrow$ Påstående om amplituden stämmer.

Exempel 3.4: Beräkna enhetsnormal till ytan $f(x,y,z) = x^2+y^2-z=0$ i punkt $(1,1,2)$

$\nabla f = \nabla(x^2+y^2-z) = (2x, 2y, -1)$

$\nabla f(1,1,2) = (2, 2, -1)$

Vektorn måste normeras $|\nabla f(1,1,2)| = \sqrt{2^2+2^2+1} = 3$

Enhetsnormalen: $\hat{n} \frac{\nabla f(1,1,2)}{|\nabla f(1,1,2)|} = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$

Gradient, konservativa fält och potentialer

Teorem 3.1: Relaterar gradient av skalärt fält till konservativa vektorfält.

Antag vektorfält $\mathbb{F}$ relaterar till skalärfält ϕ som $\mathbb{F} = \nabla\phi$.

$\nabla\phi$ existerar överallt i D.

Då är $\mathbb{F}$ konservativt i D och omvänt om $\mathbb{F}$ är konservativt kan man skriva $\mathbb{F} = \nabla\phi$.

ϕ kallas potential.

Bevis: Antag $\mathbb{F} = \nabla\phi$. Beräkna linjeintegralen från A till B längs C.

$$\int_C \mathbb{F} \cdot d\mathbb{r} = \int_C \nabla\phi \cdot d\mathbb{r} = \int_C d\phi = \left[\phi\right]_A^B = \phi(B) - \phi(A)$$

$\Rightarrow \mathbb{F}$ är konservativt.

Omvänt: Antag $\mathbb{F}$ är konservativt

$\phi(\mathbb{r}) = \int_0^{\mathbb{r}} \mathbb{F} \cdot d\tilde{\mathbb{r}}$, Vi vet att $d\phi = \mathbb{F} \cdot d\mathbb{r}$

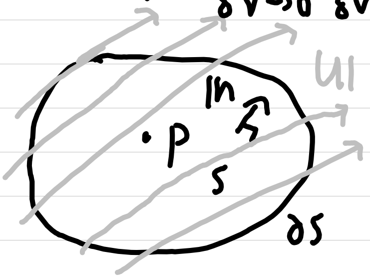
$\Rightarrow \mathbb{F} \cdot d\mathbb{r} = \nabla\phi \cdot d\mathbb{r}$ måste gälla $\forall d\mathbb{r}$

$\Rightarrow \mathbb{F} = \nabla\phi$

Notera ϕ är ej unik, en konstant kan adderas.

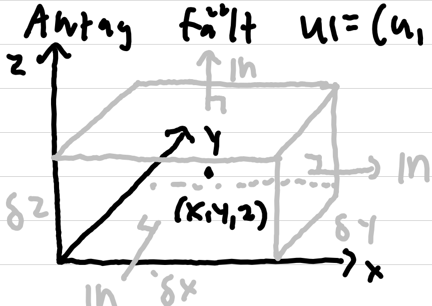
Divergens av vektorfält

$$\operatorname{div}(\mathbf{u}) := \lim_{\delta V \to 0} \frac{1}{\delta V} \oiint_{\partial S} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, dS$$



Tolkning flöde från $\mathbf{u}$ ut ur volymen ∂V delat med volymen δV.
Härled ett uttryck i kartesiska koordinater.

Antag fält $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$



Integralen har 6 bidrag, ett från varje sida.
Integrera över S_1, $\mathbf{n}_1 = (1,0,0)$
$\Rightarrow \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = u_1$

Antag centrum av $S_1 : (x + \delta x/2, y, z)$
$dS : \delta y \, \delta x$

$$\iint_{S_1} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, dS \approx u_1\left(x + \frac{\delta x}{2}, y, z\right) \delta y \, \delta z$$

Liten yta $\Rightarrow u_1$ konstant över ytan

På samma sätt för $S_2 : \mathbf{n} = (-1, 0, 0)$
Centrum $\left(x - \frac{\delta x}{2}, y, z\right) \Rightarrow \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = -u_1$

$\Rightarrow$ Bidrag till integralen

$$\iint_{S_2} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, dS \approx -u_1\left(x - \frac{\delta x}{2}, y, z\right)$$

Addera

$$\iint_{S_1 + S_2} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, dS = \left[u_1\left(x + \frac{\delta x}{2}, y, z\right) - u_1\left(x - \frac{\delta x}{2}, y, z\right)\right] \delta y \, \delta z$$

$$\approx \frac{\partial u_1}{\partial x} \delta x \, \delta y \, \delta z \approx \frac{\partial u_1}{\partial x} \delta V$$

Gå i gräns på integralen:

$$\lim_{\delta V \to 0} \frac{1}{\delta V} \frac{\partial u_1}{\partial x} \delta V = \frac{\partial u_1}{\partial x}$$

På samma sätt för resterande 4 ytor:

$\Rightarrow \frac{\partial u_2}{\partial y}$ och $\frac{\partial u_3}{\partial z}$. Lägg ihop alla termer

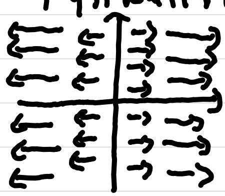
$$\Rightarrow \operatorname{div}(\mathbf{u}) = \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial u_3}{\partial z}$$

Notation: $\operatorname{div}(\mathbf{u}) = \nabla \cdot \mathbf{u}$

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

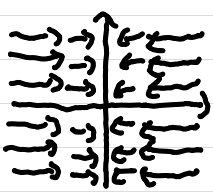
$$\Rightarrow \nabla \cdot \mathbf{u} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot (u_1, u_2, u_3) = \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial u_3}{\partial z}$$

Fysikalisk tolkning:



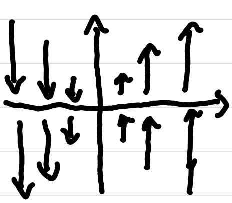
$\mathbf{u} = (x, 0, 0)$

$\nabla \cdot \mathbf{u} = 1 + 0 + 0 = 1$



$\mathbf{u} = (-x, 0, 0)$

$\nabla \cdot \mathbf{u} = -1 + 0 + 0 = 1$

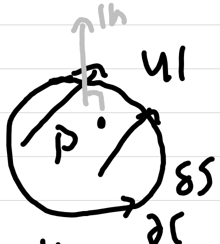


$\mathbf{u} = (0, x, 0)$

$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 + 0 + 0 = 0$

Divergensfritt

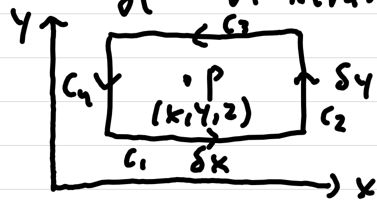
Rotation av vektorfält



$$\mathbf{n} \cdot \text{curl}(\mathbf{u}) = \lim_{\delta S \to 0} \frac{1}{\delta S} \oint_{\partial C} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{r}$$

Antag först $\mathbf{n} = \mathbf{e}_3$

Vi beräknar z-komponenten av $\text{curl}(\mathbf{u})$



För C_1: Centrum av C_1 =

$= (x, y - \frac{\delta y}{2}, z)$

$\Rightarrow \mathbf{u} \cdot d\mathbf{r} = u_1 dx$

Integral:

$$\int_{C_1} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{r} \approx u_1(x, y - \frac{\delta y}{2}, z)\, \delta x$$

På samma sätt för C_2, C_3, C_4.

$$\Rightarrow \mathbf{e}_3 \cdot \text{curl}(\mathbf{u}) = \frac{\partial u_2}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial y}$$

På samma sätt för $\mathbf{e}_1$ och $\mathbf{e}_2$

$$\Rightarrow \text{curl}(\mathbf{u}) = \left(\frac{\partial u_3}{\partial y} - \frac{\partial u_2}{\partial z}, \frac{\partial u_1}{\partial z} - \frac{\partial u_3}{\partial x}, \frac{\partial u_2}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial y} \right)$$

Notation: $\text{curl}(\mathbf{u}) = \nabla \times \mathbf{u} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{d}{dz} \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix}$

På tidigare vektorfält:

$\nabla \times (x, 0, 0) = (0, 0, 0)$ Rotationsfria

$\nabla \times (-x, 0, 0) = (0, 0, 0)$

$\nabla \times (0, x, 0) = (0, 0, 1)$

[Läs själva i boken: Laplaceoperatorn $\nabla \cdot \nabla \Phi$

Rotation av konservativt fält $\nabla \times \nabla \Phi$.]

29/11 Vektorfält och elektromagnetisk fältteori ④

Innehåll:

- Indexnotationer med tillämpningar
  + Introduktion
  + Exempel
    - Dubbel skalärprodukt
  + Exempel 4.1
    - Från notation till vektorform
  + Exempel 4.2
    - Vektorform till indexnotation
  + Kronecker delta
  + Exempel
    - Användning av kronecker delta
  + Epsilon tensorn
  + Gradienter, Divergens, Rotation
  + Kombinationer

Indexnotationer med tillämpningar

Vi kan skriva en vektor

$$\mathbf{a} = \sum_{i=1}^{3} a_i \mathbf{e}_i = a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2 + a_3 \mathbf{e}_3$$

I indexnotation skriver man a_i, i fritt index
$i = 1, 2, 3$.

Skriver till exempel $\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$
$c_i = a_i + b_i$

Skalärprodukt: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$
$= \sum_{i=1}^{3} a_i b_i$

$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_j b_j$, Dubbla index = summationsindex.
Index kan endast förekomma 1 eller 2 gånger i en term.

Exempel: $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \cdot \mathbf{d}) = a_j b_j c_k d_k = c_k a_j d_k b_j$

Exempel 4.1: Skriv $a_j b_i c_j$ på vektorform

$$\sum_{j=1}^{3} a_j b_i c_j = b_i \sum_{j=1}^{3} a_j c_j = b_i (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) =$$

fritt index

$$= (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) b_i = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{b}$$

Exempel 4.2: Skriv uttrycket $\mathbf{u} + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \mathbf{v} = |\mathbf{a}|^2 (\mathbf{b} \cdot \mathbf{v}) \mathbf{a}$ på indexform.

$$u_i + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) v_i = |\mathbf{a}|^2 (\mathbf{b} \cdot \mathbf{v}) a_i$$
$$= (\mathbf{a} \cdot \mathbf{a})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{v}) a_i$$
$$u_i + a_j b_j v_i = a_j a_j b_k v_k a_i$$

Kronecker delta δ_{ij}

Definition: $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{om } j=i \\ 0 & \text{om } j \neq i \end{cases}$

Alltså: $\delta_{11} = \delta_{22} = \delta_{33}$, annars $= 0$.

Exempel:

$$\delta_{ij} a_j = \sum_{j=1}^{3} \delta_{ij} a_j = \delta_{i1} a_1 + \delta_{i2} a_2 + \delta_{i3} a_3$$
$$= a_i$$

Skalär produkt

Visa $\mathbb{a} \cdot \mathbb{b} = \delta_{ij} a_i b_j$

$$= \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \delta_{ij} a_i b_j = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

Kunde ha skrivit $\begin{cases} \delta_{ij} b_i = b_j \\ \delta_{ij} a_i = a_j \end{cases}$

ε- tensorn

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 0 & \text{om någon av } i, j, k \text{ är lika} \\ 1 & \text{om } ijk = (1\ 2\ 3)(2\ 3\ 1)(3\ 1\ 2) \\ -1 & \text{om } ijk = (1\ 3\ 2)(2\ 1\ 3)(3\ 2\ 1) \end{cases}$$

Visa $\varepsilon_{ijk} a_j b_k = (\mathbb{a} \times \mathbb{b})_i = \mathbb{a} \times \mathbb{b}$

Visa för x-komponenten $i=1$

$$\varepsilon_{1jk} a_j b_k = \sum_{j=1}^{3} \sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{1jk} a_j b_k = \begin{cases} \text{endast } j=2,\ k=3 \\ \text{och } j=3\ k=2 \text{ bidrar} \end{cases}$$

$$= \underbrace{\varepsilon_{123}}_{=1} a_2 b_3 + \underbrace{\varepsilon_{132}}_{=-1} a_3 b_2 = a_2 b_3 - a_3 b_2$$

= kryssprodukt x-komponent

lika för $i=2$ och 3 för y respektive z.

$\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{klm} = \delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}$, 4 fria index

$$(\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c}))_i = \varepsilon_{ijk} a_j (\mathbf{b}\times\mathbf{c})_k$$
$$= \varepsilon_{ijk} a_j \varepsilon_{klm} b_l c_m$$
$$= \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm} a_j b_l c_m$$
$$= (\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}) a_j b_l c_m$$
$$= [\delta_{il} b_l = b_i]$$
$$= a_m b_i c_m - a_j b_j c_i$$
$$= (\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}) b_i - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}) c_i$$
$$= (\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\mathbf{c}$$

Gradienter, Divergens, Rotation

Grad: $\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_3}\right)$

Indexnotation: $[\nabla f]_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}$

operatorn $[\nabla]_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$

Divergensen $\nabla\cdot\mathbf{u} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = \frac{\partial u_j}{\partial x_j}$

Rotation $\nabla\times\mathbf{u}$:

Visa för x-komponent

$[\nabla\times\mathbf{u}]_1 = \frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3} = \varepsilon_{ijk}\frac{\partial u_k}{\partial x_j}$

På samma sätt för $i=2$ och 3

$\Rightarrow \nabla\times\mathbf{u} = \varepsilon_{ijk}\frac{\partial u_k}{\partial x_j}$

Kombinationer

$$0 = \nabla\times\nabla f = \varepsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial f}{\partial x_k} = \{\text{byt } j \leftrightarrow k\} =$$
$$= \varepsilon_{ikj}\frac{\partial}{\partial x_k}\frac{\partial f}{\partial x_j} = -\varepsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial x_k}\frac{\partial f}{\partial x_j} = -\varepsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial f}{\partial x_k}$$

Uttryck lika med sig själv. Måste vara 0.

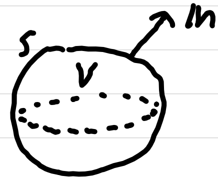
5 / 12 Vektorfält och elektromagnetisk fältteori (5)

Innehåll:

- Gauss och Stokes sats
  + Gauss sats / Divergensteoremet
    - Definition divergens
    - Masskonservering
    - Källor
    - Exempel
      + Användning i elfält
  + Stokes sats
    - Exempel
      + Användning i elfält

Gauss och Stokes sats

Gauss sats / Divergensteoremet



$$\iiint_V \nabla \cdot \mathbf{u}\, dV = \oiint_S \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}\, dS$$

$\mathbf{u}$: kontinuelig, deriverbar i V
S : Sluten yta runt V's rand
$\mathbf{n}$: utåtriktad ytnormal

Definition av divergens:

$\nabla \cdot \mathbf{u} \approx \frac{1}{\delta V_i} \oiint_{\delta S_i} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}\, dS$, δS_i, δV_i små yt/volym-element

Summera alla delvolymer δV_i

$$\sum_i \nabla \cdot \mathbf{u}\, \delta V_i \approx \sum_i \oiint_{\delta S_i} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}\, dS$$

Låt $\delta V_i \to 0$. Vänster led $\Rightarrow$ Volymintegral
Högerled $\Rightarrow$ Motstående ytnormal tar ut varandra

$$\Rightarrow \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{u}\, dV = \oiint_S \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}\, dS$$

flöde genom ytan

Total expansion av fältet i volymen V.

Fler ekvationer härleds om $\mathbf{u} = \mathbf{a} f$
$\mathbf{u} = \mathbf{a} \times \mathbf{v}$
$\mathbf{u} = f \nabla g$
$\mathbf{u} = f \nabla g - g \nabla f$

Masskonservering:

- Flöde med hastighet $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$
- Vätskan har densitet $\rho(\mathbf{r}, t)$

Massa i volymen V

Massa i V $= \iiint_V \rho \, dV$

Massflöde ut ur V $= \oiint_S \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, dS$,

in i V $= -\oiint_S \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, dS$

$$\frac{d}{dt} \iiint \rho \, dV = -\oiint \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, dS \quad \left\{ \text{byt ordning på integral och derivata} \right\}$$

$$\Rightarrow \iiint_V \frac{d}{dt} \rho \, dV = -\iiint_V \nabla \cdot (\mathbf{u} \rho) \, dV$$

$$\iiint_V \frac{d\rho}{dt} + \nabla \cdot (\mathbf{u} \rho) \, dV = 0 \Rightarrow \frac{d\rho}{dt} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0$$

Om $\rho(\mathbf{r}, t)$ konstant i tiden:

$\Rightarrow \nabla \cdot (\mathbf{u} \rho) = 0$

Källor

Integral över sluten yta S.

$$\oiint_S \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, dS = q$$

Om $q \neq 0$ fältet har en källa innanför S

$q = 0$ fältet är källfritt

$$q = \iiint_V \underbrace{\nabla \cdot \mathbf{u}} \, dV$$

ρ rymdkälltäthet, divergens av $\mathbf{u}$

Låt volymen V minska mot Q

$$\lim_{V \to Q} \oiint_S \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, dS = q$$

Om gränsvärdet existerar och har $q \neq 0$ så har fältet en punktkälla.

Exempel: Elfält från punktladdning

Vektorfält $\mathbb{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{x\mathbb{e}_1 + y\mathbb{e}_2 + z\mathbb{e}_3}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$

Divergensen $\nabla\cdot\mathbb{E} = \nabla\cdot\left(\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{x\mathbb{e}_1 + y\mathbb{e}_2 + z\mathbb{e}_3}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\right)$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} - \frac{3x^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} + \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} - \frac{3y^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} + \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} - \frac{3z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}\right) = 0,\ \text{då } (x,y,z)\neq 0$$

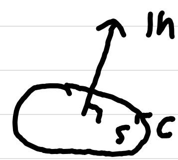
Låt S vara ett klot med radie a och centrum i origo. I sfäriska koordinater visas enklast

$$\oiint_S \mathbb{E}\cdot\mathbb{n}\,dS = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

För att Gauss sats ska vara uppfylld behövs Dirac-delta funktionen

$$\nabla\cdot\mathbb{E} = \frac{q}{\varepsilon_0}\delta(x)\delta(y)\delta(z) = \frac{q}{\varepsilon_0}\delta^3(\mathbb{r})$$

Stokes sats:



$$\iint_S \nabla\times\mathbb{u}\cdot\mathbb{n}\,dS = \oint \mathbb{u}\cdot d\mathbb{r}$$

$\mathbb{u}$ kontinuerligt deriverbar på ytan S

Bevis: $\nabla\times\mathbb{u}\cdot\mathbb{n} \approx \frac{1}{\delta S_i}\oint_{\delta C_i}\mathbb{u}\cdot d\mathbb{r}$

Summera alla bidrag

$$\sum_i \nabla\times\mathbb{u}\cdot\mathbb{n}\,\delta S_i$$

Låt $\delta S_i \to 0$, summering blir

$$\iint_S \nabla\times\mathbb{u}\cdot\mathbb{n}\,dS = \oint_C \mathbb{u}\cdot d\mathbb{r}$$

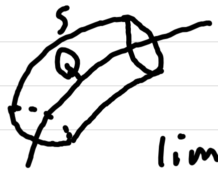
Virvlar:

Integral över sluten kurva $\oint_C \mathbf{u} \cdot d\mathbf{r} = i$

Om $i \neq 0$ har fältet en virvel innanför C
$i = 0$ virvelfritt

i kan också skrivas $i = \iint_S \underbrace{\nabla \times \mathbf{u}}_{\Omega \text{ - rymdvirvelfält}} \cdot \mathbf{n}\, dS$

-"- rotation.



$$\lim_{S \to Q} \oint_C \mathbf{u} \cdot d\mathbf{r} = i(Q)$$

så har $\mathbf{u}$ en virveltråd längs C.

Exempel: Elfält

Vektorfält: $\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \cdot \left(\frac{-y\,\mathbf{e}_1 + x\,\mathbf{e}_2}{x^2 + y^2} \right)$

Rotation $\nabla \times \mathbf{B} = 0$, då $(x,y) \neq (0,0)$
singularitet där

Högerledet $\int_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = \mu_0 I$

Uttryck rotation med Dirac-delta

$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 I_0\, \delta(x)\, \delta(y)\, \mathbf{e}_3$

6 / 12 Vektorfält och elektromagnetisk fältteori

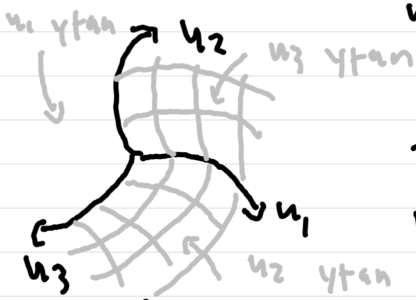
Innehåll:

- Kroklinjiga koordinater
  - Exempel
    - Skalfaktorer vid koordinatbyte
  - Gradient
  - Laplaceoperatorn
  - Rotation
  - Cylindriska koordinater
  - Sfäriska koordinater

Kroklinjiga koordinater

Transformera i kartesiska koordinater (x_1, x_2, x_3) till ett annat (u_1, u_2, u_3)

Antag entydig övergång mellan x_i och u_i.
Uttryck reaktionen $x_i = x_i(u_1, u_2, u_3)$
$u_i = u_i(x_1, x_2, x_3)$



Betrakta en liten förflyttning $d\mathbf{x}$
$d\mathbf{x} = (dx_1, dx_2, dx_3)$
Eftersom x_i är en funktion av u:

$$d\mathbf{x} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_2} du_2 + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_3} du_3$$

Indexnotation: $dx_i = \frac{\partial x_i}{\partial u_j} du_j$.

$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_1}$ är tangent till u_1 kurvan

Enhetsvektor längs u_1-kurvan

$\mathbf{e}_1 = \frac{d\mathbf{x}}{\partial u_1} / h_1$, h_1 är skalfaktorn

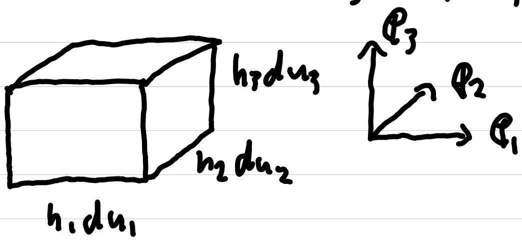
$h_1 = \left| \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_1} \right|$ På samma sätt för $\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$

Nu kan vi skriva

$$d\mathbf{x} = h_1 \mathbf{e}_1 du_1 + h_2 \mathbf{e}_2 du_2 + h_3 \mathbf{e}_3 du_3$$

Här enbart ortogonala system $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}$
Högersystem $\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3$

Lokalt kan det kroklinjiga systemet ses som rektangulärt. En förändring du_i leder till en förändring $h_i du_i$ i riktningen $\mathbf{e}_i$.



Ytelement, u_1-ytan: $dS = h_2 h_3 \, du_1 \, du_2$
Volymelement: $dV = h_1 h_2 h_3 \, du_1 du_2 du_3$
Linjeelement: $ds^2 = d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} = h_1^2 du_1^2 + h_2^2 du_2^2 + h_3^2 du_3^2$

Exempel 6.2: $\mathbf{x} = (2uv, u^2 - v^2, w)$
Enhetsvektorer skalfaktor!

$$h_u = \left|\left(\frac{\partial x_1}{\partial u}, \frac{\partial x_2}{\partial u}, \frac{\partial x_3}{\partial u}\right)\right| = \left|(2v, 2u, 0)\right| = 2\sqrt{u^2+v^2}$$

$$\mathbf{e}_u = \left(\frac{\partial x_1}{\partial u}, \frac{\partial x_2}{\partial u}, \frac{\partial x_3}{\partial u}\right) / h_u = \frac{(v, u, 0)}{\sqrt{u^2+v^2}}$$

$$h_v = |(2u, -2v, 0)| = 2\sqrt{u^2+v^2}$$

$$\mathbf{e}_v = \frac{(u, -v, 0)}{\sqrt{u^2+v^2}}$$

$$h_w = |(0,0,1)| = 1 \Rightarrow \mathbf{e}_w = (0,0,1)$$

Gradient

$df = \nabla \cdot d\mathbf{x}$
Med $d\mathbf{x} = h_1 \mathbf{e}_1 du_1 + h_2 \mathbf{e}_2 du_2 + h_3 \mathbf{e}_3 du_3$
f är en funktion av u_i

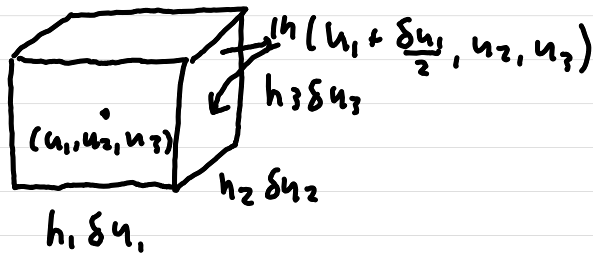
$$df = \frac{\partial f}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial f}{\partial u_2} du_2 + \frac{\partial f}{\partial u_3} du_3$$

$$= \frac{1}{h_1}\frac{\partial f}{\partial u_1} h_1 du_1 + \frac{1}{h_2}\frac{\partial f}{\partial u_2} h_2 du_2 + \frac{1}{h_3}\frac{\partial f}{\partial u_3} h_3 du_3$$

$$= \left(\frac{1}{h_1}\frac{\partial f}{\partial u_1} e_1 + \frac{1}{h_2}\frac{\partial f}{\partial u_2} e_2 + \frac{1}{h_3}\frac{\partial f}{\partial u_3} e_3 \right) \cdot dx$$

Divergens: $\nabla \cdot \mathbf{v} = \lim_{\delta V \to 0} \frac{1}{\delta V} \oiint_{\delta S} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}\, dS$

$$\mathbf{v} = V_1 e_1 + V_2 e_2 + V_3 e_3$$



Bidrag till ytintegralen på två ytor

$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}\, dS_1 \approx V_1 h_2 h_3\, du_2\, du_3$

$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}\, dS_2 \approx -\underbrace{V_1 h_2 h_3}_{\text{rumsberoende}}\, du_2\, du_3$

$\Rightarrow \delta(u_1, u_2, u_3)\, du_2\, du_3$

$= \frac{\partial (V_1 h_2 h_3)}{\partial u_1} \partial u_1 \partial u_2 \partial u_3$

$\Rightarrow \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \frac{\partial}{\partial u_1}(V_1 h_2 h_3)$, på samma sätt för övriga ytor.

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left(\frac{\partial}{\partial u_1}(V_1 h_2 h_3) + \frac{\partial}{\partial u_2}(V_2 h_3 h_1) + \frac{\partial}{\partial u_3}(V_3 h_1 h_2) \right)$$

Laplace-Operatorn

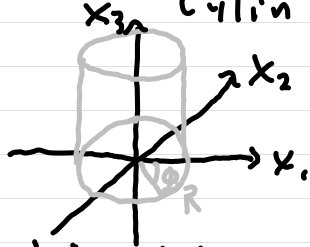
$$\nabla^2 f = \nabla \cdot (\nabla f) =$$

$$= \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}\left(\frac{h_2 h_3}{h_1}\frac{\partial f}{\partial u_1} \right) + \frac{\partial}{\partial u_2}\left(\frac{h_3 h_1}{h_2}\frac{\partial f}{\partial u_2} \right) + \frac{\partial}{\partial u_3}\left(\frac{h_1 h_2}{h_3}\frac{\partial f}{\partial u_3} \right) \right]$$

Rotation

$$\nabla \times \mathbf{V} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{vmatrix} h_1 \mathbf{e}_1 & h_2 \mathbf{e}_2 & h_3 \mathbf{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial u_1} & \frac{\partial}{\partial u_2} & \frac{\partial}{\partial u_3} \\ h_1 V_1 & h_2 V_2 & h_3 V_3 \end{vmatrix}$$

Cylindriska koordinater



$$\begin{cases} x_1 = R\cos\phi \\ x_2 = R\sin\phi \\ x_3 = z \end{cases}$$

Vi behöver enhetsvektorer och skalfaktorer

$$h_R = \left|\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial R}\right| = |(\cos\phi, \sin\phi, 0)| = 1$$

$$h_\phi = \left|\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \phi}\right| = |(-R\sin\phi, R\cos\phi, 0)| = R$$

$$h_z = \left|\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial z}\right| = |(0,0,1)| = 1$$

$$\Rightarrow \mathbf{e}_R = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial R}/h_R = (\cos\phi, \sin\phi, 0)$$

$$\mathbf{e}_\phi = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \phi}/h_\phi = (-\sin\phi, \cos\phi, 0)$$

$$\mathbf{e}_z = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial z}/h_z = (0,0,1)$$

Ytelement på cylinderytan (R-yta)

$dS = h_\phi h_z \, d\phi \, dz = R \, d\phi \, dz$

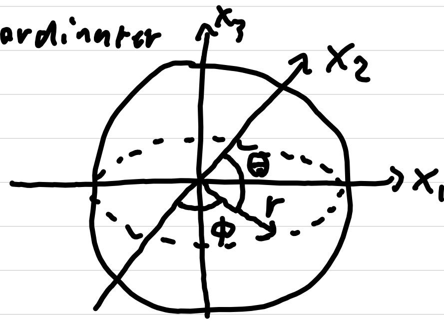
Gradient:

$$\nabla f = \frac{1}{h_1}\frac{\partial f}{\partial u_1}\mathbf{e}_1 + \frac{1}{h_2}\frac{\partial f}{\partial u_2}\mathbf{e}_2 + \frac{1}{h_3}\frac{\partial f}{\partial u_3}\mathbf{e}_3$$

$$= \frac{\partial f}{\partial R} e_R + \frac{1}{R}\frac{\partial f}{\partial \phi} e_\phi + \frac{\partial f}{\partial z} e_z$$

Sfäriska koordinater

$x_1 = r\sin\theta\cos\phi$
$x_2 = r\sin\theta\sin\phi$
$x_3 = r\cos\theta$



$0 \leq r < \infty$
$0 \leq \theta < \pi$
$0 \leq \phi < 2\pi$

$$h_r = \left|\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial r}\right| = \left|(\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta)\right| = 1$$

$h_\theta = \dots = r$
$h_\phi = \dots = r\sin\theta$

Ytelement på sfärens yta

$$dS = h_\theta h_\phi \, d\theta \, d\phi = r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\phi$$

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r} e_r + \frac{1}{r}\frac{df}{\partial \theta} e_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \phi} e_\phi$$

16/1 Vektorfält och elektromagnetisk fältteori

1

Innehåll:

- Introduktionsföreläsning
  + Allmänn info
  + Examination

Introduktionsföreläsning

Kursen bygger på kunskaper inom vektorfält.

Det finns övningsuppgifter på Yata. Av hemuppgifterna är de med ett "P" från kursboken och de utan ett "P" är från extra kompendium.

Kompendium finns på Canvas som "Exempelsamling". Där finns även lösta exempel.

Examination:

- Olika moment, tenta och quiz under kursen, dugga.
- Veckovisa teorifrågor "Quizzes" som kan ge bonuspoäng. 7 stycken. Kan öppna, titta på frågor och sedan jobba igenom. 24·7 frågor totalt, sant eller falskt. Kan bara lämna in en gång. Upp till 5 bonus. Vid tvetydighet, sammanställ en tydlig motivering och sedan hantera vid tentan.

[När man läser frågorna, tolka exakt som skrivet. Kan vara tvetydiga med avsikt.]

- Dugga på lördag LV4, elektrostatik, bara problemlösning. Innehåll skiljer sig mellan F och TM och från tidigare år. F har en vektorfältdel på dugga och tenta.
- Tentan är 4 timmar för TM, 5 timmar för F.
- Poäng och bonuspoäng finns på Canvas.
- Dugga ; SB-Multisal, TM har 2 timmar, F har 4 timmar.
- Tentan är utformad på samma sätt som tidigare år.

18/1 Vektarfält och elektromagnetisk fältteori ②

Innehåll:

- Elektromagnetisk fältteori
  + Definitioner
  + Det elektostatiska fältet
    - Elektrostatiska postulat
    - Divergensen
    - Rotationen
  + Fält från laddning
  + Coulombs lag
  + Elfält från många diskreta laddningar
  + Elfält från många kontinueliga laddningar

Elektromagnetisk fältteori

Elektromagnetisk fältteori: Studium av laddning i vila och rörelse. Detta är vad som beskrivs i kapitel 1.

Makroskopisk modell:
- Makroskopiskt innebär att laddning är jämt fördelad.
- Mikroskopisk - laddning existerar ej i varje punkt.

Volymladdningstäthet:
$\rho(\mathbb{r},t) = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta V}$
$[\rho] = As/m^3 = C/m^3$
V = volym
q = laddning

Ytladdningstäthet:
$\rho_s = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta s}$
$[\rho_s] = C/m^2$

Linjeladdningstäthet:
$\rho_\ell = \lim_{\Delta \ell \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta \ell}$
$[\rho_\ell] = C/m$

[Elektrostatiskt fält är ett tidsoberoende elektriskt fält.]

Det elektrostatiska fältet, kapitel 3-1, 3-2:
Laddningar ger upphov till krafter på andra laddningar. Kraftverkan beskrivs av ett elektriskt fält $\mathbb{E}$.

Fältet defineras genom att mäta kraft på en testladdning q: $\mathbb{F} = q\mathbb{E}$.

Elfältet defineras då som
$\mathbb{E} := \lim_{q \to 0} \frac{\mathbb{F}}{q}$, $[\mathbb{E}] = \frac{V}{m}$

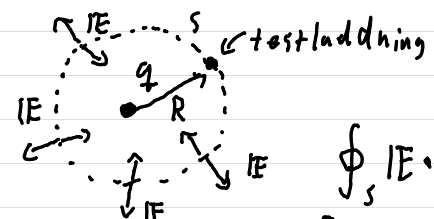
Elektrostatiska postulat:
Två postulat:
- $\nabla \cdot \mathbb{E} = \rho/\varepsilon_0$ (Gauss lag)
- $\nabla \times \mathbb{E} = 0$

$\varepsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12}\, A \cdot s/V_m$

Divergensen, kapitel 3-2:
Integralform
$$\int_V \nabla \cdot \mathbb{E}\, dV = \int_V \frac{\rho}{\varepsilon_0} dV$$
$$\oint_S \mathbb{E} \cdot d\mathbb{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0} \quad \text{(Divergensteoremet)}$$

Rotationen:
Integralform
$$\int_S \nabla \times \mathbb{E} \cdot d\vec{S} = 0$$
$$\oint_C \mathbb{E} \cdot d\vec{\ell} = 0 \quad \text{(Stokes sats)}$$

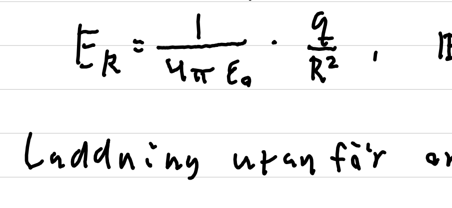
Fält från en laddning, kapitel 3-3:
Om det bara finns en enda laddning i universum:



Använd Gauss lag för att beräkna det elektriska fältet.
$$\oint_S \mathbb{E} \cdot d\vec{S} = \oint_S \hat{\mathbb{R}} E_R \cdot \hat{\mathbb{R}}\, ds =$$
$$= E_R \oint_S ds = E_R \cdot 4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

Lös ut E_R
$$E_R = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{R^2}, \quad \mathbb{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{R^2} \hat{\mathbb{R}}$$

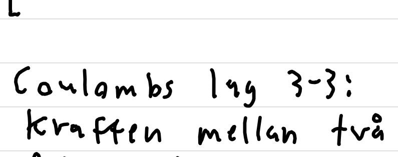
Laddning utanför origo!



Samma sfäriska symmetri kring q_1 som tidigare.
$$\mathbb{E}(\mathbb{R}_2) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q_1}{|\mathbb{R}_{12}|^2} \hat{\mathbb{R}}_{12}$$

[I kursmaterialet: $\mathbb{R}_1 = \mathbb{R}'$
$\mathbb{R}_2 = \mathbb{R}$
$|\mathbb{R}_{12}| = R_{12}$]

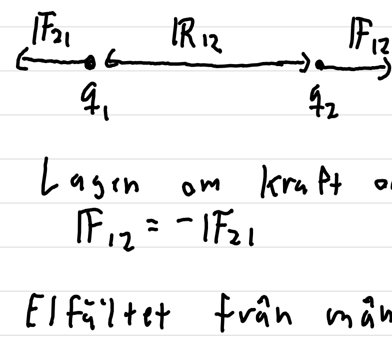
Coulombs lag 3-3:
Kraften mellan två laddningar q_2 placeras i fältet från q_1



$$\mathbb{F}_{12} = q_2 \mathbb{E}_1(\mathbb{R}_2) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1 q_2}{|\mathbb{R}_{12}|^2} \hat{\mathbb{R}}_{12}$$

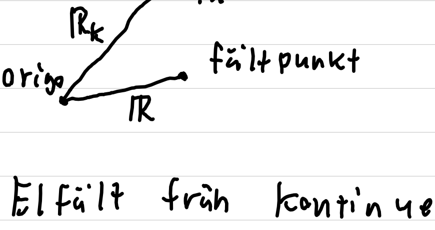
Lagen om kraft och motkraft gör att
$\mathbb{F}_{12} = -\mathbb{F}_{21}$

Elfältet från många diskreta laddningar, kapitel 3-3.1



$$\mathbb{E}(\mathbb{R}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{k=1}^{n} \frac{q_k (\mathbb{R} - \mathbb{R}_k')}{|\mathbb{R} - \mathbb{R}_k'|^3}$$

Elfält från kontinuerliga laddningsfördelningar



$$\mathbb{E}(\mathbb{R}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{V'} \frac{\hat{\mathbb{R}}}{R^2} dQ$$
$dQ = \rho dV$
$$\Rightarrow \mathbb{E}(\mathbb{R}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_V \frac{\rho}{R^2} \hat{\mathbb{R}} \cdot dV$$

På samma sätt $dQ_s = \rho_s ds$
$dQ_\ell = \rho_\ell d\ell$

19/1 Vektorfält och elektromagnetisk fältteori (3)

Innehåll:

- Elektromagnetisk potential
  + Den elektriska potentialen
  + Potential från punktladdning
  + Potential från två långa punktladdningar
  + Metall

Elektromagnetisk potential

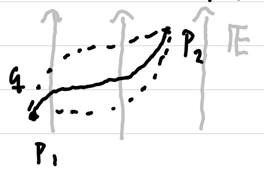
$\nabla \times \mathbb{E} = 0$

Har visat $\nabla \times \nabla A = 0$

Vi definerar $\mathbb{E} = (-) \nabla V$

Minustecken används så att lägesenergin ökar om vi tillför arbete.

Den elektriska potentialen:



Kraft på laddning:

$\mathbb{F} = q\,\mathbb{E}$

Vid förflyttning:

$\mathbb{F}_{mek} = -\mathbb{F}$

$$W_{mek} = \int_{P_1}^{P_2} \mathbb{F}_{mek} \cdot d\mathbb{r} = \int_{P_2}^{P_1} \mathbb{F} \cdot d\mathbb{r} = q \int_{P_2}^{P_1} \mathbb{E} \cdot d\mathbb{r} =$$

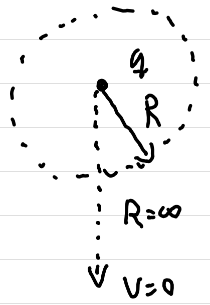
$$= q \underbrace{\int_{P_2}^{P_1} (-\nabla V) \cdot d\mathbb{r}}_{\text{kapitel } 2.6} = q \int_{P_1}^{P_2} dV = q\left(V(P_2) - V(P_1)\right)$$

$$= q V_2 - q V_1$$

Vi löser ut V_2:

$V_2 = \int_{P_2}^{P_1} \mathbb{E} \cdot d\mathbb{r} + V_1$, V_1 är referensnivå, ofta $= 0$.

Potential från punktladdning

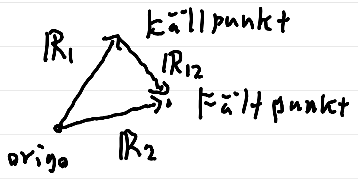


Referenspunkten $V_1 = 0$

Beräkna $V(R)$

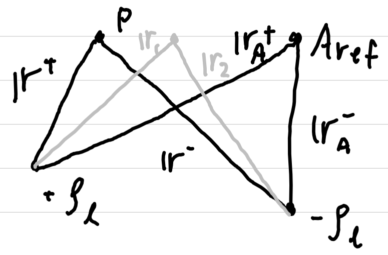
$$V = \int_R^\infty \underbrace{\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R'^2}\hat{\mathbb{r}}}_{=\mathbb{E}} \cdot \underbrace{\hat{\mathbb{r}}\, dR'}_{d\mathbb{r}}$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}$$



$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{R_{12}}$, $R_{12} = |\mathbb{R}_{12}|$

Potential från två långa linjeladdningstätheter $\pm \rho_\ell$



Från exempel 3-4 och 3-5.

$\mathbb{E} = \hat{\mathbb{r}} \frac{\rho_\ell}{2\pi\varepsilon_0 r}$

Elektriska fältet från två linjeladdningar:

$\mathbb{E} = \mathbb{E}^+ + \mathbb{E}^- = \frac{\rho_\ell \hat{\mathbb{r}}_1}{2\pi\varepsilon_0 r_1} - \frac{\rho_\ell \hat{\mathbb{r}}_2}{2\pi\varepsilon_0 r_2}$

$$V_P = \int_P^{A_{ref}} \mathbb{E} \cdot d\mathbb{r} + \underbrace{V_{ref}}_{=0} = \frac{\rho_\ell}{2\pi\varepsilon_0}\left[\int_P^A \frac{\hat{\mathbb{r}}_1}{r_1} d\mathbb{r}_1 - \int_P^A \frac{\hat{\mathbb{r}}_2}{r_2} d\mathbb{r}_2\right] =$$

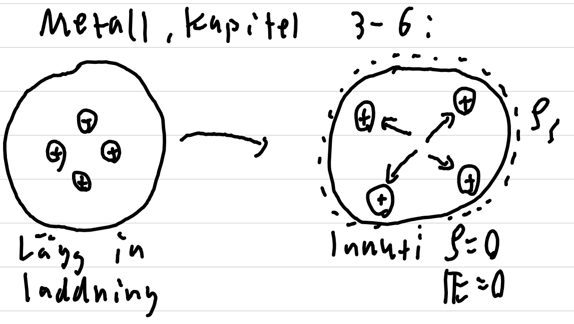
$$= \left\{ \begin{matrix} \hat{\mathbb{r}}_1 \cdot d\mathbb{r}_1 = dr_1 \\ \hat{\mathbb{r}}_2 \cdot d\mathbb{r}_2 = dr_2 \end{matrix} \right\} = \frac{\rho_\ell}{2\pi\varepsilon_0}\left[\int_{r^+}^{r_A^+} \frac{dr_1}{r_1} + \int_{r^-}^{r_A^-} \frac{dr_2}{r_2}\right] =$$

$$= \frac{\rho_\ell}{2\pi\varepsilon_0} \ln\left(\frac{r_A^+}{r_A^-} \frac{r^-}{r^+}\right)$$

Referenspunkten väldigt långt bort $\Rightarrow r_A^+ \approx r_A^-$

$\Rightarrow V_P = \frac{\rho_\ell}{2\pi\varepsilon_0} \ln\left(\frac{r^-}{r^+}\right)$

Metall, kapitel 3-6:



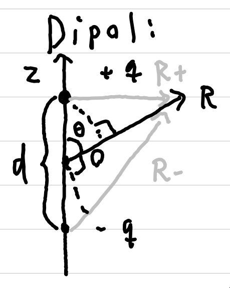
23/1 Vektorfält och elektromagnetisk fältteori (4)

Innehåll:

- Dipol och metaller
  - Dipol
    - Dielektriska material
      - Exempel
        - Vattenmolekyler
    - Polarisationsfältet
    - Potentialbidrag från polariserat material
    - Samband mellan $\mathbb{P}$ och $\mathbb{E}$
      - Exempel 3-12
        - Skal med olika suseptanser

Dipolen och metaller

Dipol:



Med dessa typer av problem är sfäriska det lämpligaste koordinat-systemet.
Summera potential från två punktladdningar

$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_+} - \frac{1}{R_-}\right)$$

Antag att $d \ll R$

$$\frac{1}{R_+} = \left(R - \frac{d}{2}\cos\theta\right)^{-1} \overset{TU}{\approx} \frac{1}{R}\left(1 + \frac{d}{2R}\cos\theta\right)$$

$$\frac{1}{R_-} = \left(R + \frac{d}{2}\cos\theta\right)^{-1} \approx \frac{1}{R}\left(1 - \frac{d}{2R}\cos\theta\right)$$

$$V = \frac{q\, d\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$$

Definera $\mathbb{p} = q\, d\vec{l}$, där $d\vec{l} = d\hat{z}$

Generalisera

$V = \frac{\mathbb{p}\cdot\hat{\mathbb{R}}}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$, $\hat{\mathbb{R}}$ pekar i R riktning

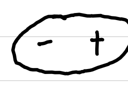
Elektriska fältet:

$$\mathbb{E} = -\nabla V = -\hat{R}\frac{\partial V}{\partial R} - \hat{\theta}\frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{|\mathbb{P}|}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\left(\hat{R}\cdot 2\cos\theta + \hat{\theta}\sin\theta\right)$$

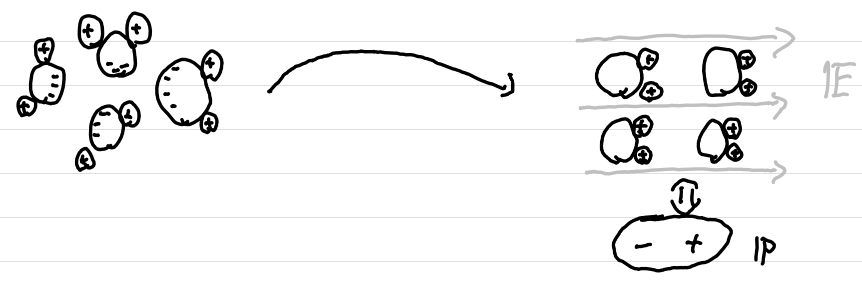
där $|\mathbb{p}| = q\cdot d$.

[Kolla Exempel 3-9, 3-11]

Dielektriska material, kapitel 3-7:
Om vi har en atom med ett pålagt E-fält,

Detta ersätts oftast av den simplifierade dipolen  $\mathbb{P}$.

Exempel: Vattenmolekyler har en denna fördelning



Polarisationsfältet
Summera dipolmomentet i en volym ΔV.

stora P $\mathbb{P} := \lim_{\Delta V \to 0} \sum_{k=1}^{n\Delta V} \frac{\mathbb{p}_k}{\Delta V}$, Notera dipolmomentet $\mathbb{p}$ är lilla $\mathbb{p}$.

$[\mathbb{P}] = C/m^2$

Potentialbidrag från polariserat material:
Använd

$$\nabla'\cdot(f\cdot\mathbb{A}) = f\,\nabla'\cdot\mathbb{A} + \mathbb{A}\cdot\nabla' f \qquad (*)$$

$\mathbb{A} = \mathbb{P}$ och $f = 1/R$

Uttryck dipolmoment från en liten volym ΔV

$\Delta\mathbb{p} = \mathbb{P}\,\Delta V'$, V' betyder volym

$d\mathbb{p} = \mathbb{P}\, dV'$

Betrakta $\Delta V'$ som en enda dipol

$$\underset{\text{potential}}{dV} = \frac{d\mathbb{p}\cdot\hat{\mathbb{R}}}{4\pi\varepsilon_0 R^2} = \frac{\mathbb{P}\cdot\hat{\mathbb{R}}}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\,\underset{\text{volym}}{dV'}$$

Integrera över volym

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{V'}\frac{\mathbb{P}\cdot\hat{\mathbb{R}}}{R^2}\,dV' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{V'}\mathbb{P}\cdot\nabla'\left(\frac{1}{R}\right)dV'$$

$$R^2 = (\underset{\text{fältpunkt}}{x} - \underset{\text{källpunkt}}{x'})^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2$$

$$\Rightarrow \nabla'\left(\frac{1}{R}\right) = \frac{\hat{\mathbb{R}}}{R^2}$$

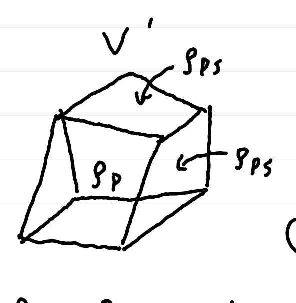
Använd vektoridentiteten (*)

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\int_{V'}\underbrace{\nabla'\cdot\left(\frac{\mathbb{P}}{R}\right)}_{\text{ren divergens}}dV' - \int\underbrace{\frac{\nabla'\cdot\mathbb{P}}{R}}_{\text{inte ren divergens}}dV'\right]$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\oint_{S'}\frac{\mathbb{P}\cdot\hat{\mathbb{n}}}{R}\,ds + \int_{V'}\frac{-\nabla'\cdot\mathbb{P}}{R}\,dV'\right]$$

Identifiera $\rho_{ps} = \mathbb{P}\cdot\hat{\mathbb{n}}$ Polarisationsytladdningstäthet

$\rho_p = -\nabla'\cdot\mathbb{P}$ Polarisationsladdningstäthet (volym)



Tag en godtycklig volym V'.
Vad blir polarisationsladdningen i V'?

$$Q_p = \int_{S'}\rho_{ps}\,ds' + \int_{V'}\rho_p\,dV' = 0$$

0 på grund av lika många positiva som negativa laddningar.

$$\nabla\cdot\mathbb{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}(\rho + \rho_p) = \frac{1}{\varepsilon_0}(\rho - \nabla\cdot\mathbb{P})$$

$$\Rightarrow \nabla\cdot(\varepsilon_0\mathbb{E} + \mathbb{P}) = \rho$$

Definera förskjutningsfältet $\mathbb{D}$ som

$\mathbb{D} := \varepsilon_0\mathbb{E} + \mathbb{P}$ (kapitel 3-8)

$\Rightarrow \nabla\cdot\mathbb{D} = \rho$

På integral form blir detta

$\oint_S \mathbb{D}\cdot d\vec{S} = Q$ fri laddning, aktivt har placerat dit till skillnad från polarisationsladdning.

Samband mellan $\mathbb{P}$ och $\mathbb{E}$
Linjärt isotropt medium gäller att

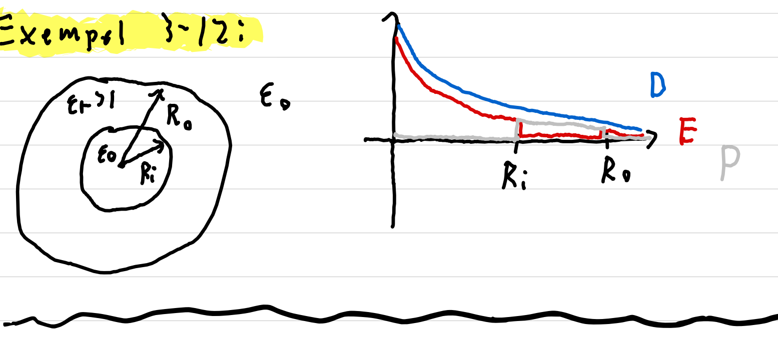
$\mathbb{P} = \varepsilon_0\chi_e\mathbb{E}$ Elektrisk susceptibilitet (bokstav chi)

$$\mathbb{D} = \varepsilon_0\mathbb{E} + \mathbb{P} = \varepsilon_0\underbrace{(1+\chi_e)}_{:=\varepsilon_r}\mathbb{E} = \varepsilon_0\varepsilon_r\mathbb{E}$$

För vakuum är $\chi_e = 0$

[Läs igenom exempel 3-12, 3-14, 3-15]

Exempel 3-12:

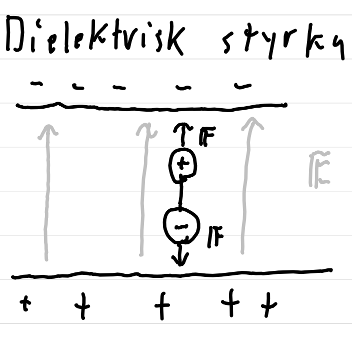


24/1 Vektorfält och elektromagnetisk fältteori (5)

Innehåll:
- Dipoler fortsättning
  + Dielektrisk styrka
  + Randvillkor
  + Kondensator/kapacitans
  + Beräkning av kapacitanser
- Elektrostatisk energi
  + Generalisera till kontinuerliga laddnings-
  + fördelningar
  + Energimetoden för kraftberäkningar
  + Exempel att lösa på

Dipoler fortsättning

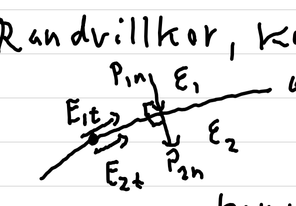
Dielektrisk styrka, kapitel 3-8.1:



Molekyl med en polarisering i ett elektriskt fält kan börja att slitas itu. När de gör detta orsakar de en blixt.

Styrkan är så starkt fält som kan läggas på innan de slits itu. Finns tabeller.

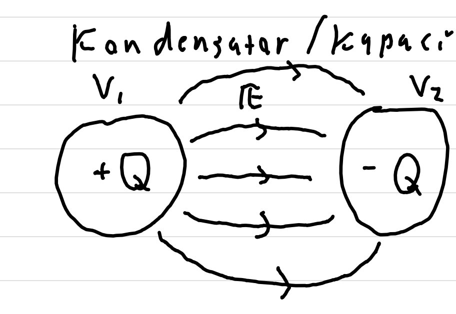
Randvillkor, kapitel 3-9:



Precis på randen mellan två material är de tangentiella komponenterna kontinuerliga.

$$E_{1t} = E_{2t}$$
$$D_{1n} - D_{2n} = \rho_s$$

Kondensator/kapacitans, kapitel 3-10:

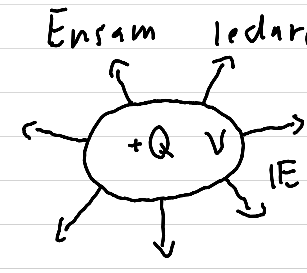


[Fältlinjers orientering är efter en positiv testladdning.]

Kapacitansen definieras som

$$C := \frac{Q}{V_1 - V_2} = \frac{Q}{\Delta V}$$

Ensam ledare:



För att definiera potentialen V_1 använd att $V_{ref} = V_\infty = 0$. Detta ger kapacitansen

$$C = \frac{Q}{V_1 - V_\infty} = \frac{Q}{V_1}$$

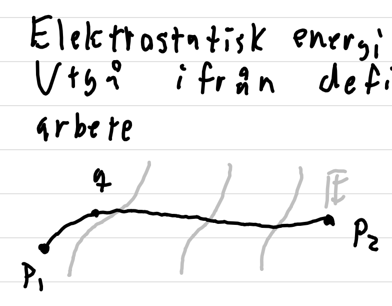
Beräkning av kapacitanser:

- Alternativ 1:
  - 1) Placera ut $\pm Q$
  - 2) Beräkna $\mathbb{E}$ med till exempel Gauss lag eller med superposition.
  - 3) Beräkna potentialskillnaden
    $$V_{12} = \int_{P_2}^{P_1} \mathbb{E} \cdot d\mathbf{r},$$ där P_1, P_2 är punkter för potentialerna
  - 4) Beräkna kapacitansen
    $$C = \frac{Q}{|V_{12}|}$$

- Alternativ 2:
  - 1) Antag V_1 och V_2
  - 2) Beräkna $V(\mathbb{R})$
  - 3) $\mathbb{E} = -\nabla V$
  - 4) $Q = \oint_S \varepsilon_0 \mathbb{E} \cdot d\vec{s}$
  - 5) $C = \dfrac{Q}{|V_1 - V_2|}$

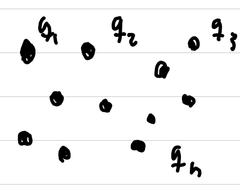
Elektrostatisk energi, kapitel 3-11:

Utgå ifrån definitionen av elektrostatiskt arbete



$$W_{12} = q \int_{P_2}^{P_1} \mathbb{E} \cdot d\mathbf{r} = q \Delta V$$

Säg att vi har ett tomt rum och lägger dit en laddning i taget.



För q_1 krävdes inget arbete.
För q_2 blir

$$W_2 = q_2 \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_{21}},$$ där R_{21} är avstånd från q_1 till q_2

$$W_3 = q_3 \left(\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_{31}} + \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_{32}} \right)$$
$$\vdots$$
$$W_n = q_n \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{q_1}{R_{n1}} + \frac{q_2}{R_{n2}} + \dots + \frac{q_{n-1}}{R_{n\,n-1}} \right)$$

Total energi blir

$$W_e = \sum_{k=1}^{n} W_k$$

Gör om beräkningarna fast baklänges.

$$W_n' = q_n \cdot 0, \quad W_{n-1}' = q_{n-1} \left(\frac{q_n}{4\pi\varepsilon_0 R_{n-1\,n}} \right)$$
$$\vdots$$
$$W_2' = q_2 \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{q_n}{R_{2n}} + \frac{q_{n-1}}{R_{2\,n-1}} + \dots \frac{q_3}{R_{23}} \right)$$
$$W_1' = q_1 \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{q_n}{R_{1n}} + \dots + \frac{q_2}{R_{12}} \right)$$

Total energi blir då

$$W_e = \sum_{k=1}^{n} W_k',$$ hatera samma W_e

Matematiska tricket för beräkningarna

$$2W_e = \sum_{k=1}^{n} W_k' + W_k = q_1 V_1 + q_2 V_2 + \dots + q_n V_n$$
$$W_e = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} q_k V_k \quad \text{(ömsesidig energi)}$$

Alternativ metod finns att finna i kapitel 3-11.

Generalisera till kontinuerliga laddningsfördelningar

$$\left.\begin{array}{l} \sum_{k=1}^{n} \longrightarrow \int_{V'} \\ q_k \longrightarrow \rho\, dV \\ V_k \longrightarrow V(\mathbb{R}) \end{array}\right] \Rightarrow W_e = \underbrace{\frac{1}{2} \int_{V'} \overset{\text{Potential}}{V(\mathbb{R})}\, \rho(\mathbb{R})\, d\overset{\text{volym}}{V'}}_{\text{Total energi}}$$

Alternativ form, kapitel 3-11.1:

$$W_e = \frac{1}{2} \int_{V'} V(\mathbb{R}) \rho(\mathbb{R})\, dV' = \frac{1}{2} \int_{V'} V(\mathbb{R}) (\nabla \cdot \mathbb{D})\, dV' =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot (V \mathbb{D}) = \\ V(\nabla \cdot \mathbb{D}) + \mathbb{D} \cdot \nabla V \end{array} \right\} = \frac{1}{2} \int_{V'} \left(\nabla \cdot (V\mathbb{D}) - \mathbb{D} \cdot \nabla V \right) dV' =$$

$$= \frac{1}{2} \oint_{S'} V \mathbb{D}\, d\vec{s} + \frac{1}{2} \int_{V'} \mathbb{D} \cdot \mathbb{E}\, dV' = \left[\begin{array}{l} ds \sim R^2 \\ V \sim 1/R, \; R \gg 1 \\ D \sim 1/R^2 \end{array} \right]$$

Detta ger att ytintegralen måste vara proportionell mot $1/R$. Ytintegralen går mot 0 då $R \to \infty$.

$$\Rightarrow W_e = \frac{1}{2} \int_{V'} V(\mathbb{R}) \rho(\mathbb{R})\, dV' \Leftrightarrow \frac{1}{2} \int_{V'} \mathbb{D} \cdot \mathbb{E}\, dV'$$

Energimetoden för kraftberäkning, kapitel 3-11.2:

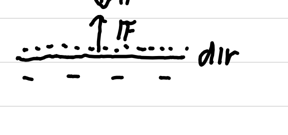
Vi vill relatera ändring i energi, orsakad av förflyttning, till kraften.

- 1) Antag system av kroppar med fix laddning
- 2) System av (ledande) kroppar med fix potential

1) System av kroppar med laddning Q_L. Vid förflyttning $d\mathbf{r}$ utför systemet arbetet
$$dW = \mathbb{F}_Q \cdot d\mathbf{r}.$$
Systemet är isolerat, ingen laddning tillförs.
$$dW = -dW_e = \mathbb{F}_Q \cdot d\mathbf{r}$$

Differentiell förändring av skalär, ekvation 2.88, ger

$$dW_e = \nabla W_e \cdot d\mathbf{r}$$
$$\Rightarrow -\nabla W_e \cdot d\mathbf{r} = \mathbb{F}_Q \cdot d\mathbf{r}$$
$$\Rightarrow \mathbb{F}_Q = -\nabla W_e$$



I kartesiska koordinater:

$$(\mathbb{F}_Q)_x = -\frac{\partial W_e}{\partial x}$$
$$(\mathbb{F}_Q)_y = -\frac{\partial W_e}{\partial y}$$
$$(\mathbb{F}_Q)_z = -\frac{\partial W_e}{\partial z}$$

Exempel att läsa på:

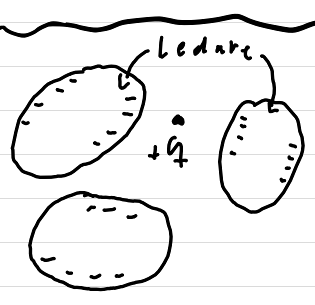
$\underbrace{3\text{-}17}_{\text{viktig}}$, 3-18, 3-19, 3-22, $\underbrace{3\text{-}24}_{\text{viktig}}$

27/1 Vektorfält och elektromagnetisk fältteori (6)

Innehåll:

- Elektrostatiska randvillkor
  + Poissons och Laplaces ekvationer, härledning
  + Entydighetssatsen
  + Speglingsmetoden
    - Exempel
      + Linjeladdning parallellt med cylinder
  + Numerisk lösning av Poisson
    - Exempel
      + Större rutnät

Elektrostatiska randvärdesproblem, kapitel 4.1



1) Laddning känd
Potentialen känd på ytor
⇒ Bestäm potentialen "överallt".
2) Potentialen känd på ytor
⇒ Bestäm potential överallt

Poissons och Laplaces ekvation, härledning:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbb{D} = \rho \Rightarrow \\ \nabla \times \mathbb{E} = 0 \Rightarrow \end{cases} \quad \begin{cases} \nabla \cdot (\varepsilon \mathbb{E}) = \rho \\ \mathbb{E} = -\nabla V \end{cases}$$

$\Rightarrow \nabla \cdot (\varepsilon \nabla V) = -\rho$
Antag ε konstant i rummet

$\Rightarrow \boxed{\nabla^2 V = -\rho/\varepsilon}$ Poissons ekvation

Om ingen laddning

$\boxed{\nabla^2 V = 0}$ Laplace ekvation

Entydighetssatsen 4-3:
Med givna randvillkor är lösningen av Laplace och Poissons ekvationer unik.

Bevis: Antag motsatsen, visa att den ej är sant.
Antag $\nabla^2 V_1 = \rho_1/\varepsilon_0$
$\nabla^2 V_2 = \rho_2/\varepsilon_0$

Bilda skillnadslösning $V_d = V_1 - V_2$
För skillnadslösningen $\nabla^2 V_d = 0$

Randvillkor $V_d = 0$ på ledare
Använd vektoridentitet

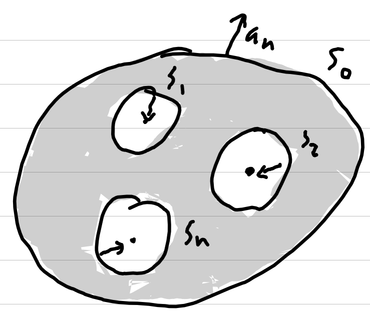
$$\nabla \cdot (V_d \nabla V_d) = \underbrace{V_d \nabla^2 V_d}_{=0} + \nabla V_d \cdot \nabla V_d$$

$\Downarrow$

$$\nabla \cdot (V_d \nabla V_d) = \nabla V_d \cdot \nabla V_d$$

Integrera över volym

$$\oint_S V_d \nabla V_d \cdot \vec{a}_n \, dS = \int_\tau |\nabla V_d|^2 dV$$



$S = S_0 + S_1 + S_2 + \ldots + S_n$

På $S_1, S_2, \ldots, S_n \Rightarrow V_d = 0$
På S_0 kanske $V_d = 0$

Låt S_0 vara sfärisk-ish och låt R gå mot ∞.

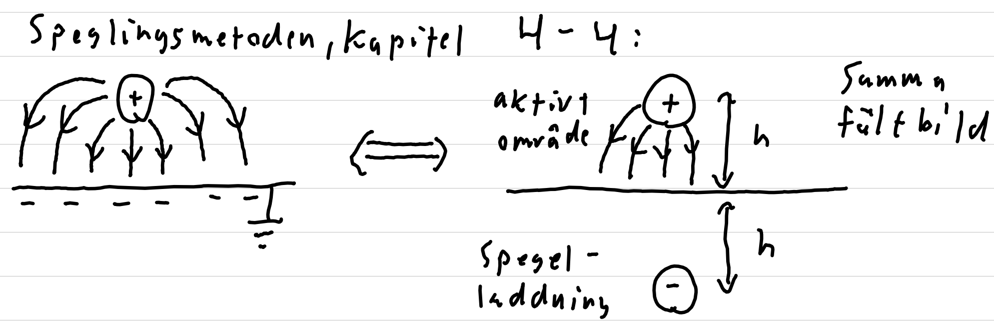
$V \sim \frac{1}{R}$, $\nabla V_d \sim \frac{1}{R^2}$, $S \sim R^2$

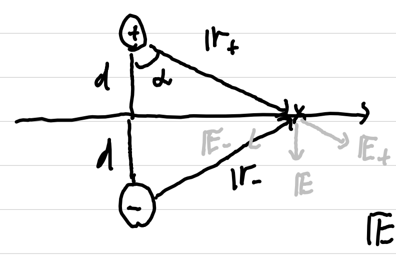
$\Rightarrow \oint V_d \nabla V_d \cdot \vec{a}_n \, dS \longrightarrow 0$

$\nabla V_d \cdot \vec{a}_n$ kan också vara 0.
Om vänster ledet i integralekvationen är 0 måste också $\int_\tau |\nabla V_d|^2 dV = 0$
uppfylls bara om $|\nabla V_d|^2 = 0 \Rightarrow \nabla V_d = 0$
Vi har $V_d = 0$ på randen.
$\Rightarrow V_d = 0$ överallt

$V_d = V_1 - V_2 = 0 \Rightarrow V_1 = V_2$ entydighet $\square$

Speglingsmetoden, kapitel 4-4:





Potential i planet:

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q}{|\mathbb{r}_+|} - \frac{Q}{|\mathbb{r}_-|}\right) = 0$$

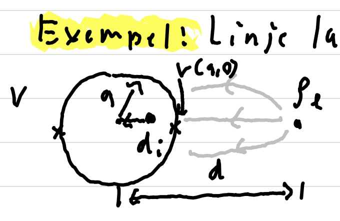
ty $|\mathbb{r}_+| = |\mathbb{r}_-|$.
$\mathbb{E}$ hamnar helt i $\hat{z}$-led.

Summera

$$\mathbb{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q\,\hat{r}_+}{|\mathbb{r}_+|^2} - \frac{Q\,\hat{r}_-}{|\mathbb{r}_-|^2}\right), \text{ ersätt } \begin{cases} \hat{r}_+ = -\hat{z}\cos\alpha \\ \hat{r}_- = \hat{z}\cos\alpha \end{cases}$$

$$= \frac{2Q\cos\alpha}{4\pi\varepsilon_0|\mathbb{r}_+|^2}(-\hat{z}) = \frac{Q\cos\alpha}{2\pi\varepsilon_0|\mathbb{r}_+|^2}(-\hat{z})$$

Exempel: Linjeladdning parallellt med cylinder



a = radie av cylinder
d_i = avstånd till spegellinje
d = avstånd från linjeladdning

Vi vill kunna hitta en spegelladdning så att cylindern kan ersättas med en linjeladdning.

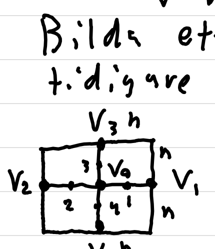
$$V = \frac{\rho_\ell}{2\pi\varepsilon_0} \ln\left(\frac{r_-}{r_+}\right) \qquad V(r, \alpha)$$

Vi uttrycker potentialen i $V(a, 0)$ och $V(a, \pi)$

$$V = \frac{\rho_\ell}{2\pi\varepsilon_0} \ln\left(\frac{a - d_i}{d - a}\right) = \frac{\rho_\ell}{2\pi\varepsilon_0} \ln\left(\frac{a + d_i}{d + a}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{a - d_i}{d - a} = \frac{a + d_i}{d + a} \Rightarrow d_i = \frac{a^2}{d}$$

Numerisk lösning av Poisson:
kapitel 4-4 i "Elfält sammandrag".
Diskretisera ∇^2-operatorn i ekvationerna
$\nabla^2 V = 0$
$\nabla^2 V = -\rho/\varepsilon$
Bilda ett rutnät av området S från beviset tidigare



$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_1 \approx \frac{V_1 - V_0}{h}$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_2 \approx \frac{V_0 - V_2}{h}$$

$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right)_0 \approx \frac{\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_1 - \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_2}{h} \approx \frac{V_1 + V_2 - 2V_0}{h^2}$$

På samma sätt i y-led.

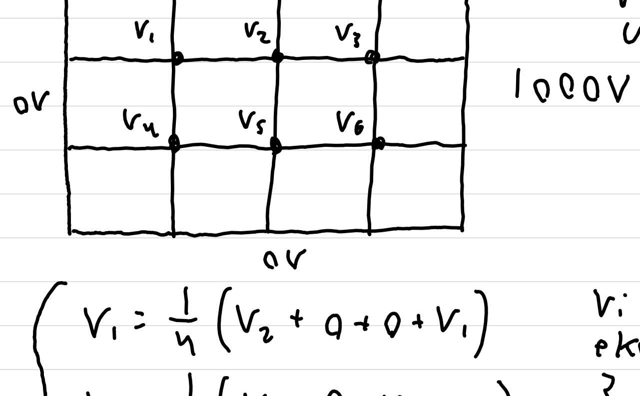
$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \approx \frac{V_3 + V_4 - 2V_0}{h^2}$$

$$(\nabla^2 V)_0 \approx \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right)_0 + \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right)_0 \approx \frac{V_1 + V_2 + V_3 + V_4 - 4V_0}{h^2}$$

För $\nabla^2 V = 0$ fås

$$V_0 = \frac{1}{4}(V_1 + V_2 + V_3 + V_4)$$

Exempel: Större rutnät!



symmetri!
$V_1 = V_4$, $V_2 = V_5$, $V_3 = V_6$
Uttryck V_1, V_2, V_3

$$\begin{cases} V_1 = \frac{1}{4}(V_2 + 0 + 0 + V_1) \\ V_2 = \frac{1}{4}(V_2 + 0 + V_1 + V_2) \\ V_3 = \frac{1}{4}(1000 + 0 + V_2 + V_3) \end{cases}$$

Vi fick ett ekvationssystem
3 ekvationer
3 obekanta.

$$4\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1000 \end{bmatrix}$$

$V_1 \approx 47{,}6$ V
$V_2 \approx 142{,}6$ V
$V_3 \approx 381{,}0$ V

30/1 Vektorfält och elektromagnetisk fältteori (7)

Innehåll:

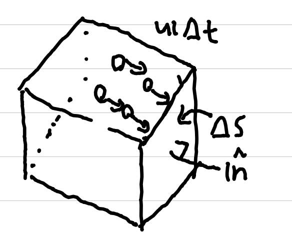
- Elektrisk ström
  + Definition
    - Elektrisk ström
  + Kontinuitetsekvationen
  + Ohms lag
  + Ohms lag i metall
  + Relaxationstid
  + Joules lag

Elektrisk ström

Kapitel 5-1, 5-2.

Olika typer av ström
- Kandukorsström: rörelse/drift av elektroner i metall/halvledare
- Konvektionsström: laddningar i rörelse i vacuum.

__Definition:__ Elektrisk ström definieras som laddning ur per tidsenhet.



$$\Delta Q = N q u \cdot \hat{n}\, \Delta S\, \Delta t$$
$$\Delta i := \frac{\Delta Q}{\Delta t} = N q (u \cdot \hat{n}) \Delta S$$

Laddningstäthet N $(1/m^3)$

Generalisera för fler laddningsbärare $\quad \Delta \vec{S} = \Delta S \hat{n}$

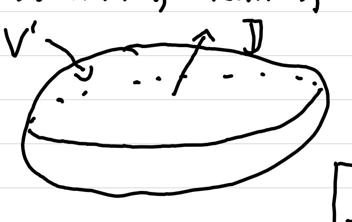
$$\Delta i = \underbrace{\sum_j (N_j q_j u_j)}_{J \leftarrow \text{stora } J} \cdot \Delta \vec{S}$$

$$\Delta i = J \cdot \Delta \vec{S}$$

Ström genom en yta:

$$I = \int_S J \cdot d\vec{S}$$

__Kontinuitetsekvationen__ kapitel 5-4:
Laddning kan ej förstöras/skapas bara flyttas.



$$\Delta Q = -I \Delta t = -\Delta t \oint J \cdot d\vec{S}$$
$[\Delta \to d]$

$$\boxed{-\frac{dQ}{dt} = \oint_S J \cdot d\vec{S} \quad \text{(Integralform)}}$$

J är definerat ut från ytan.

$$\oint_S J \cdot d\vec{S} = \int_{V'} \nabla \cdot J \cdot dV' = -\frac{d}{dt}\left(\int_{V'} \rho\, dV'\right)$$

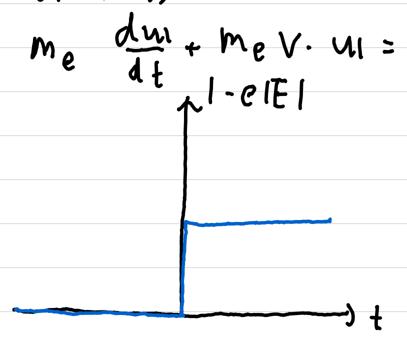
$$\int_{V'} \nabla \cdot J + \frac{\partial \rho}{\partial t}\, dV' = 0$$

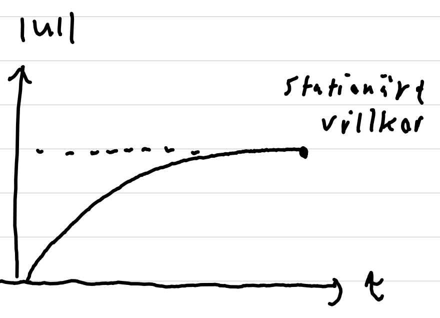
V' godtycklig $\quad \nabla \cdot J = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$ på punktform

Statiska fall ger att $\nabla \cdot J = 0$ (likström).

__Ohms lag:__
Elektroners rörelse beskrivs med Newtons andra lag ($F = ma$)

$$m_e \frac{du}{dt} + m_e \nu \cdot u = -eE$$





Lösning:

$$u(t) = \frac{-eE}{m_e \nu}\left[1 - \exp(-\nu t)\right]$$

Stationärtillstånd $t \to \infty$

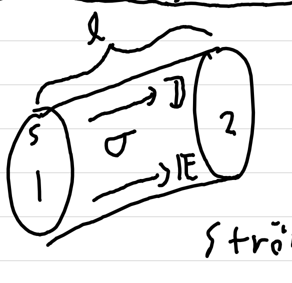
$$u = -\frac{eE}{m_e \nu} = \underbrace{\mu_e}_{\text{mobilitet}} E$$

Om vi betraktar "många" laddningar men en laddningsbärartyp

$$J = -eNu = \frac{Ne^2}{m_e \nu} E \overset{?}{=} \underbrace{N e \mu_e}_{\sigma} E$$

$$\boxed{J = \sigma E \quad \text{Ohms Lag}}$$

__Ohms lag i metall__, Kapitel 5-3



E-fält: $E = \frac{V_{12}}{l}$

ström $I = \int_S J \cdot d\vec{S} = |J| \cdot S = JS$

Strömtäthet $\quad J = \frac{I}{S}$

Sätt in i Ohms lag

$$\frac{I}{S} = \sigma \frac{V_{12}}{l} \Rightarrow V_{12} = \underbrace{\frac{l}{\sigma S}}_{:=R} I$$

Definition: Resistans defineras som

$$R := \frac{l}{\sigma S}$$

__Relaxations tid__, kapitel 5-4:
Laddning i en metall fördelar sig så $E = 0$ inuti.

$$\nabla \cdot J = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$
$$\sigma \nabla \cdot E = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$
$$\Rightarrow \sigma \frac{\rho}{\varepsilon} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

Lösning:

$$\rho = \rho_0 \exp\left[-\frac{\sigma}{\varepsilon} t\right] \qquad \tau := \frac{\varepsilon}{\sigma} \text{ relaxationstid}$$

__Jules lag__, Kapitel 5-5:
E-fältet skapar kraft
Valenselektroner rör sig. Detta kostar energi
Hur mycket?

$$\Delta W = q E \cdot \Delta r$$

Motsvarande effekt

$$\Delta p = \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{q E \cdot \Delta r}{\Delta t}$$

$$p = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta W}{\Delta t} = q E \cdot u$$

Effekt i volymen dV

$$dp = \sum_i dp_i = E \cdot \sum_i (N_i q_i u_i)\, dV$$

för laddningsbärare

$$= E \cdot J\, dV$$

Effekttäthet $\quad \frac{dp}{dV} = E \cdot J$

för godtycklig volym V.

$$P = \int_{V'} E \cdot J\, dV'$$

13/2 Vektorfält och elektromagnetisk fältteori (8)

Innehåll:
- Magnetfältet
  + Definition
  + Två postulat
  + Postulat på integral form
  + Exempel
    - B-fält från en tråd
  + Vektorpotential
  + Biot-Savats lag
  + Exempel
    - $\mathbb{A}$ och $\mathbb{B}$ med hjälp av Biot-Savats lag

Magnetfältet

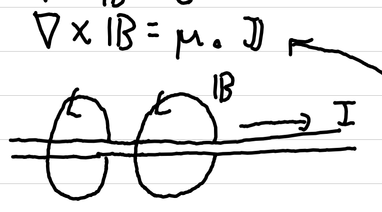
Kapitel 6-1 och kapitel 6-2.

Definition: Den magnetiska kraften beskrivs som $\mathbb{F}_m = q(\mathbb{u} \times \mathbb{B})$. Kraften är vinkelrät mot elfältet.

Två postulat:

$\nabla \cdot \mathbb{B} = 0$ — Divergens = 0

$\nabla \times \mathbb{B} = \mu_0 \mathbb{J}$ — Rotation är nollskilld



Likström

Är postulaten konsistenta?

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbb{A}) = 0 \Rightarrow 0 = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbb{B}) = \nabla \cdot (\mu_0 \mathbb{J}) = \mu_0 \nabla \cdot \mathbb{J}$$

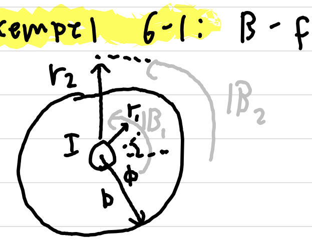
Stämmer enligt kontinuitetsekvationen

Postulat på integral form:

$$\oint_S \mathbb{B} \cdot d\vec{s} = 0$$

$$\int_\gamma \mathbb{B} \cdot d\mathbb{r} = \mu_0 I$$

Exempel 6-1: B-fält innuti ledaren



Högerhands regeln $\mathbb{B}_1 = \hat{\phi} B_\phi$
Skapar en Gaussyta för då B-fältet är konstant, en symmetri. Kallas amperesslinga

$$d\mathbb{r} = \hat{\phi} r_1 \, d\phi$$

$$\int_{C_1} \mathbb{B}_1 \, d\mathbb{r} = \int_0^{2\pi} B_\phi r_1 \, d\phi = 2\pi r B_\phi$$

$$I_1 = I \underbrace{\frac{\pi r_1^2}{\pi b^2}}_{\text{Areakvot}} = \frac{r_1^2}{b^2} I \Rightarrow 2\pi r_1 B_\phi = \mu_0 \frac{r_1^2}{b^2} I$$

$$\Rightarrow B_\phi = \frac{\mu_0 r_1 I}{2\pi b^2}$$

För B_2 är den inneslutna strömmen hela I. Utanför ledaren blir

$$B_\phi = \frac{\mu_0 I}{2\pi r_2}$$

[För en ihålig ledare är B-fältet lika med 0 innuti ledaren.]

Vektorpotential, kapitel 6-3:

Vi har vedan att $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbb{A}) = 0$. Vi har också att $\nabla \cdot \mathbb{B} = 0$. På kan vi definera vektorpotentialen $\mathbb{A}$ enligt $\mathbb{B} = \nabla \times \mathbb{A}$.

Enligt rotationspostulatet har vi

$$\nabla \times \mathbb{B} = \mu_0 \mathbb{J} \Rightarrow \nabla \times (\nabla \times \mathbb{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbb{A}) - \nabla^2 \mathbb{A} = \mu_0 \mathbb{J}$$

Vi får välja vad divergensen av $\mathbb{A}$ blir. Vi väljer ett enkelt tal, $\nabla \cdot \mathbb{A} = 0$.

$\Rightarrow -\nabla^2 \mathbb{A} = \mu_0 \mathbb{J}$ (Vektor Poisson)

$$\begin{cases} -\nabla^2 A_x = \mu_0 J_x \\ -\nabla^2 A_y = \mu_0 J_y \\ -\nabla^2 A_z = \mu_0 J_z \end{cases},$$

I elektrostatiken hade vi $\nabla^2 V = -\rho/\varepsilon$

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{V'} \frac{\rho}{R} dv'$$

Vi kan identifiera

$$\mathbb{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{\mathbb{J}}{R} dv'$$

Biot-Savarts lag, kapitel 6-4:

Beräkna $\mathbb{B}$ från $\mathbb{J}$ genom att utgå från

$$\mathbb{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{\mathbb{J}}{R} dv'$$

$$\mathbb{B} = \nabla \times \mathbb{A}$$

$$\Rightarrow \mathbb{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \nabla \times \frac{\mathbb{J}}{R} dv'$$

Vi vet att $\nabla \times f\mathbb{G} = f \nabla \times \mathbb{G} + \nabla f \times \mathbb{G}$.
I vårt fall: $f = 1/R$, $\mathbb{G} = \mathbb{J}$

$$\Rightarrow \mathbb{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{1}{R} \underbrace{\nabla \times \mathbb{J}}_{=0} + \underbrace{\nabla\left(\frac{1}{R}\right)}_{= -\frac{\hat{\mathbb{R}}}{R^2}} \times \mathbb{J} \, dv'$$

[Rotation i fältpunkt = 0 för $\mathbb{J}$]

$$\Rightarrow \boxed{\mathbb{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{\mathbb{J} \times \hat{\mathbb{R}}}{R^2} dv'}$$

Jämför med elektrostatiken

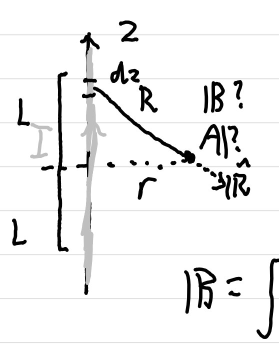
$$\mathbb{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{V'} \frac{\rho \hat{\mathbb{R}}}{R^2} dv'$$

[$\hat{\mathbb{R}}$ pekar från källpunkt till fältpunkt]

Biot-Savarts lag från en ström ger att

$$\mathbb{J} \, dV' = I \, d\mathbb{r} \Leftrightarrow \mathbb{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_\gamma \frac{d\mathbb{r} \times \hat{\mathbb{R}}}{R^2}$$

Exempel 6-4b: Ledare med ström I, längd $2L$, centrerad vid $z=0$ i $\hat{z}$ riktning. Vad är $\mathbb{A}$ och $\mathbb{B}$ som ligger r från ledaren.



Lösning: Mha Biot-Savarts lag

$$\mathbb{B} = \int d\mathbb{B} = \int_{-L}^{L} \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\mathbb{r} \times \hat{\mathbb{R}}}{R^2}$$

$$\mathbb{R} = \hat{r} r - \hat{z} z, \quad d\mathbb{r} = \hat{z} \, dz$$

$$d\mathbb{r} \times \mathbb{R} = \hat{z} \, dz \times (\hat{r} r - \hat{z} z) = \hat{\phi} \, r \, dz$$

$$|\mathbb{R}| = R = \sqrt{r^2 + z^2}$$

$$\mathbb{B} = \hat{\phi} \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-L}^{L} \frac{r \, dz}{(r^2 + z^2)^{3/2}} = \dots = \phi \frac{\mu_0 L}{2\pi r \sqrt{L^2 + r^2}}$$

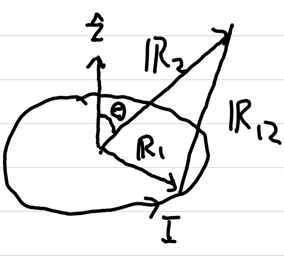
14/2 # Vektorfält och elektromagnetisk fältteori ⑨

Innehåll:

- Magnetostatik
  - Magnetisk dipol
  - Magnetiseringsfältet $\mathbb{M}$
  - Vektorpotential från ett magnetiserat material
  - H-fältet
  - Tre typer av material
  - Exempel
    - Beräkning av B-fält
  - Magnetiska kretsar

Magnetostatik

Magnetisk dipol, kapitel 6-5:



$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\oint \frac{d\mathbf{r}_1}{R_{12}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int d\vec{s} \times \nabla_1\left(\frac{1}{R_{12}}\right) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int d\vec{s} \times \frac{\mathbf{R}_{12}}{R_{12}^3}$$

$$\approx \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_s d\vec{s} \times \frac{\mathbf{R}_2}{R_2^3}, \text{ för } R_2 >> R_1$$

$$\left[\mathbf{m} = I\int_s d\vec{s}, \text{ magnetisk dipolmoment}\right]$$

$$\Rightarrow \mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\mathbf{m} \times \frac{\mathbf{R}_2}{R_2^3}$$

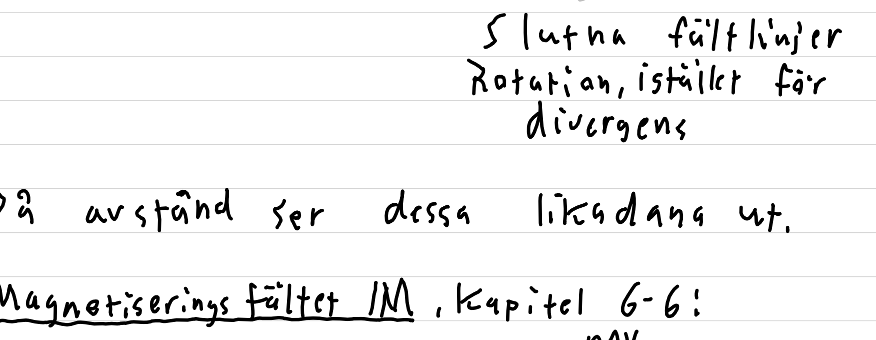
I sfäriska koordinater

$\mathbf{m} = |\mathbf{m}|\hat{z}$

$\mathbf{A} = \hat{\phi}\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{m\sin\theta}{R}$, där $m = |\mathbf{m}|$

$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = \frac{\mu_0 m}{4\pi R^3}(\hat{\mathbf{R}}2\cos\theta + \hat{\theta}\sin\theta)$

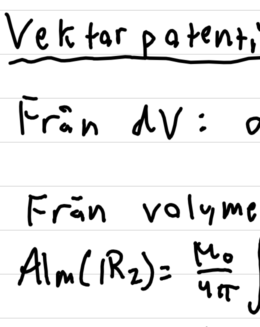
Jämför med elektrostatiken



Slutna fältlinjer
Rotation, istället för divergens

På avstånd ser dessa likadana ut.

Magnetiserings fältet $\mathbb{M}$, kapitel 6-6:



$$\mathbb{M}(\mathbf{R}) = \lim_{\Delta V \to 0} = \frac{\sum_{k=1}^{n\Delta V} \mathbf{m}_k}{\Delta V}$$

Differential kalkyl

$$\mathbb{M} = \frac{d\mathbf{m}}{dV}$$

Vektorpotential från ett magnetiserat material

Från dV: $d\mathbf{A}_m(\mathbf{R}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\mathbb{M}\,dV \times \mathbf{R}_{12}}{R_{12}^3}$

Från volymen:

$$\mathbf{A}_m(\mathbf{R}_2) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{\mathbb{M}\,dV \times \mathbf{R}_{12}}{R_{12}^3} = \ldots =$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{\nabla_1 \mathbb{M}(\mathbf{R}_1)}{R_{12}}dV + \frac{\mu_0}{4\pi}\oint_S \frac{\mathbb{M}(\mathbf{R}_1) \times d\vec{S}}{R_{12}}$$

Identifiera

$\mathbf{J}_m(\mathbf{R}_1) = \nabla \times \mathbb{M}(\mathbf{R}_1)$

$\mathbf{J}_{ms}(\mathbf{R}_1) = \mathbb{M} \times \hat{\mathbf{n}}$

H-fältet, kapitel 6-7:

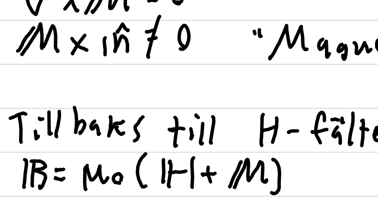
Jämför med D-fält i elektrostatiken.

$$\frac{1}{\mu_0}\nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{J}_{fri} + \mathbf{J}_m = \mathbf{J}_{fri} + \nabla \times \mathbb{M}$$

$$\nabla \times \underbrace{\left(\frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbb{M}\right)}_{:=\mathbf{H}} = \mathbf{J}_{fri}$$

Postulatet blir då $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_{fri}$

Hur ser detta ut i ett magnetiserat material?



Tvärsnitt av ett material. Kan betrakta som ett flertal dipoler, med olika täthet

I ett homogont magnetiserat material:

$\nabla \times \mathbb{M} = 0$

$\mathbb{M} \times \hat{\mathbf{n}} \neq 0$ "Magnetiseringsström går på ytan."

Tillbaks till H-fältet

$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbb{M})$

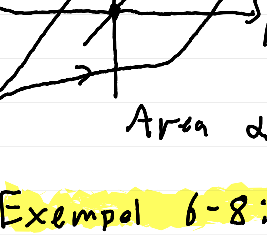
$\mathbb{M}$ skapas då vi lägger på fält. $\mathbb{M}$ beror av $\mathbf{H}$.

Modellerar $\mathbb{M} = \chi_m \mathbf{H}$, χ_m är magnetisk susceptibilitet.

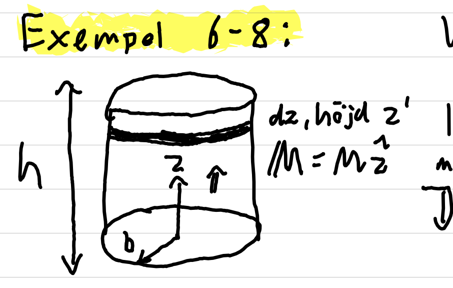
$$\Rightarrow \mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbb{M}) = \mu_0\underbrace{(1 + \chi_m)}_{:=\mu_r}\mathbf{H} = \mu_0\mu_r\mathbf{H}$$

Tre typer av magnetiska material, kapitel 6-4

- Diamagnetiska χ_m (liten och negativ)
- Paramagnetik χ_m (liten och positiv)
- Ferromagnetiska χ (stor och positiv)



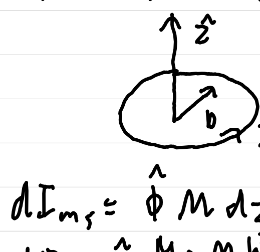
Alla ska röra sig åt samma håll. Det finns dock en tröghet.



, Däremot vid sänkning av H-fält vill $\mathbf{B}$ förbli där den var.

Area $\propto$ - Energi åtgång

Exempel 6-8: Vad är $\mathbf{B}$ fältet i $(0,0,z)$



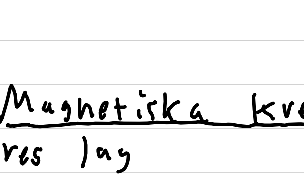
dz, höjd z'

$\mathbb{M} = M\hat{z}$

$\mathbf{J}_m = \nabla' \times \mathbb{M} = 0$, ty $\mathbb{M}$ konstant. med avseende på källpunkt

$$\mathbf{J}_{ms} = \mathbb{M} \times \hat{\mathbf{n}} = \begin{cases} 0, & z = 0 \text{ eller } z = h \\ \hat{z}M \times \hat{\mathbf{r}} = \hat{\phi}M \end{cases}$$

Ekvation 6-38: $\mathbf{B} = \frac{\hat{z}\cdot\mu_0 I b^2}{2(z^2+b^2)^{3/2}}$



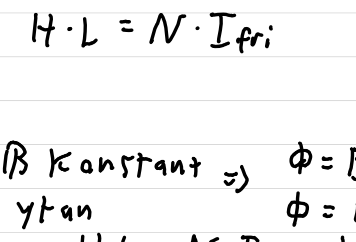
$dI_{ms} = \hat{\phi}M\,dz$

$d\mathbf{B} = \hat{z}\frac{\mu_0 M b^2 dz}{2((z-z')^2+b^2)^{3/2}}$

$$\Rightarrow \mathbf{B} = \int d\mathbf{B} = \hat{z}\int_0^L dB = \ldots = \hat{z}\left(\frac{\mu_0 M}{2}\frac{z}{\sqrt{z^2+b^2}} - \frac{z-L}{(z-L)^2+b^2}\right)$$

Magnetiska kretsar, kapitel 6-8

Amperes lag



$$\oint_c \mathbf{H} \cdot d\mathbf{r} = I_{fri}$$

Integralen C omsluter N lindningsvarv

$$\oint_c \mathbf{H} \cdot d\mathbf{r} = N I_{fri}$$

$$H \cdot \underbrace{2\pi r_0}_{=L} = N I_{fri} \Longleftrightarrow H \cdot L = N \cdot I_{fri}$$

$\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\vec{S}$ Om $\mathbf{B}$ konstant över ytan $\Rightarrow$ $\Phi = B \cdot S$, $\Phi = \mu H S$

Vi vill nu uttrycka $H \cdot L = N \cdot I$ mha Φ.

$$\Phi \cdot \underbrace{\frac{L}{\mu S}}_{\text{Reluktans}} = NI \longrightarrow \Phi R = NI$$

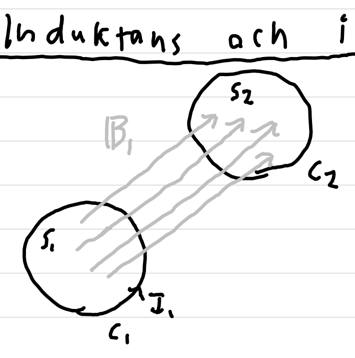
16/2 Vektorfält och elektromagnetisk fältteori (10)

Innehåll:

- Tidsvarierande fält
  + Induktans och induktorer
  + Självinduktans
  + Exempel
    - Självinduktans i rektangulär torus
  + Energi för att bygga upp fältet
  + Energimetoden för kraftberäkningar
  + Amperes kraftlag
  + Exempel
    - Krafträkning på grund av ström

Tidsvarierande fält

Induktans och induktorer, kapitel 6-11:



C_1 kopplar till C_2 med ett magnetiskt flöde Φ

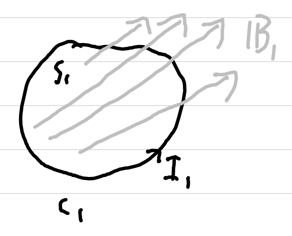
$$\Phi_{12} = \int_{S_2} \mathbf{B}_1 \cdot d\vec{s}_2 = \underbrace{L_{12}}_{\text{ömsesidig induktans}} I_1$$

Länkat flöde: $\Lambda_{12} = N_2 \Phi_{12}$

Generaliserat:

$$\Phi_{12} = L_{12} I_1$$
$$\Rightarrow \Lambda_{12} = L_{12} I_1$$
$$L_{12} = \frac{\Lambda_{12}}{I_1}$$

Självinduktans:



självinduktans

$$\Phi_{11} = \int_{S_1} \mathbf{B}_1 \cdot d\vec{s}_1 = L_{11} I_1$$

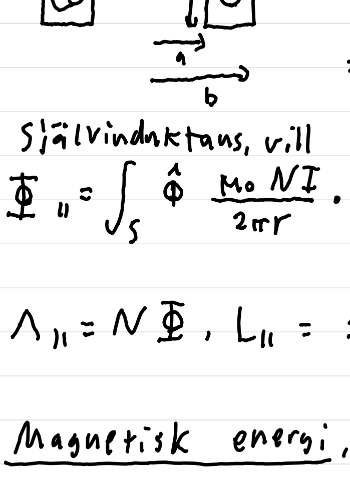
Generaliserar

$$\Lambda_{11} = N_1 \Phi_1$$

Beräkning:
1) Antag ström I_1
2) Beräkna B_1 med Amperes lag eller Biot-Savarts lag.
3) Beräkna Φ_{12} eller Φ_{11} med en integral
4) Beräkna Λ_{12} eller Λ_{11}
5) Beräkna $L_{12} = \frac{\Lambda_{12}}{I_1}$ eller $L_{11} = \frac{\Lambda_{11}}{I_1}$

[Notera likheten med beräkning av kapacitans]

Exempel 6-14:



endast riktning, inte flöde

$$B_1: \mathbf{B} = \hat{\phi} B_\phi$$
$$d\vec{l} = \hat{\phi}\, r\, d\phi$$

Symmetrier ger Amperes lag

$$\mu_0 N I_1 = \int_c \mathbf{B} \cdot d\vec{l}$$
$$= \int_c B_\phi\, r\, d\phi = 2\pi r B_\phi$$
$$\Rightarrow B_\phi = \frac{\mu_0 I N}{2\pi r}$$

Självinduktans, vill ha flödet Φ_{11}

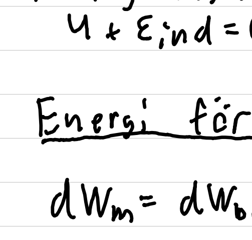
$$\Phi_{11} = \int_S \hat{\phi} \frac{\mu_0 N I}{2\pi r} \cdot \hat{\phi}\, h\, dr = \frac{\mu_0 N I h}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

$$\Lambda_{11} = N \Phi, \quad L_{11} = \frac{\Lambda_{11}}{I} = \frac{\mu_0 N^2 h}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

Magnetisk energi, kapitel 6-12:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{d\mathbf{B}}{dt} \qquad \int_S \nabla \times \mathbf{E} \cdot d\vec{s} = -\int_S \frac{d\mathbf{B}}{dt} \cdot d\vec{s}$$

$$\underbrace{\int_c \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}}_{\mathcal{E}_{ind}} = -\frac{d\Phi}{dt} = \mathcal{E}_{ind}$$



inducerad spänning

$$\mathcal{E}_{ind} = -\frac{d\Phi}{dt} = \frac{-d}{dt}(Li) = -L\frac{di}{dt}$$

Antag resistanslös slinga

$$u + \mathcal{E}_{ind} = 0$$

Energi för att bygga upp fältet

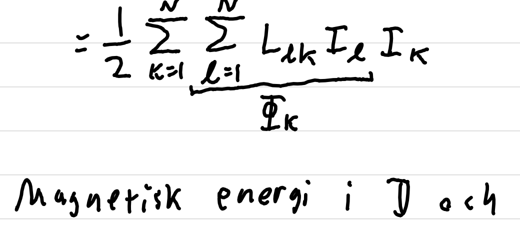
$$dW_m = dW_{batteri} = u\, i\, dt = -\mathcal{E}_{ind}\, i\, dt = i\, d\Phi$$
$$= i L\, di$$

$$\left\{ \Phi = Li \Rightarrow \frac{d\Phi}{di} = L \Rightarrow d\Phi = L\,di \right\}$$

Integrera för att få totala arbetet

$$W_m = \int_0^I dW_m = \int_0^I i L\, di = \frac{1}{2} L I^2$$

För N stycken slingor:



Totalt arbete

$$W_m = \int_0^{I_N} dW_m = \sum_{k=1}^{N} I_k \Phi_k \int_0^1 \alpha\, d\alpha = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N} \Phi_k I_k$$
$$= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N} \underbrace{\sum_{l=1}^{N} L_{lk} I_l}_{\Phi_k} I_k$$

Magnetisk energi i $\mathbf{J}$ och $\mathbf{A}$, och i $\mathbf{H}$ och $\mathbf{B}$

Uttryck

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\vec{s} = \oint_L \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$$
$$I = \int_S \mathbf{J} \cdot d\vec{s}$$

Ersätt summan med integraler

$$W_m = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{J} \cdot \mathbf{A}\, dV = \dots = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}\, dV$$

Energimetoden för kraftberäkningar, kapitel 6-13.3:

Uttryck energi som funktion av förflyttning. Energin kan uttryckas i I och Φ. Två fall:

1) Håll Φ konstant, låt I variera
2) Håll I konstant, låt Φ variera

Fall 1: Antag liten förflyttning $d\vec{l}$.
$\Rightarrow$ Ingen inducerad spänning
$\Rightarrow$ Ingen energi tillförs

Mekaniskt arbete för förflyttning $d\vec{l}$ utförs på bekostnad av lagrad energi

$$\mathbf{F}_\Phi \cdot d\vec{l} = -dW_m = -(\nabla W_m) \cdot d\vec{l}$$
$$\Rightarrow \boxed{\mathbf{F}_\Phi = -\nabla W_m}$$

Fall 2:

$$\boxed{\mathbf{F}_I = \nabla W_m}$$

Amperes kraftlag, kapitel 6-13.2

$$\mathbf{F} = q\mathbf{u} \times \mathbf{B}$$

Vad blir kraften på strömförande ledare?
Ledare: $d\vec{l}$
Tvärsnitts area: S
Laddningsbärare per volymsenhet: N $[N] = 1/m^3$
Laddningarnas hastighet: $\mathbf{u}$

$$d\mathbf{F}_m = N q S |d\vec{l}|\, \mathbf{u} \times \mathbf{B}$$
$$= N q\, dV\, \mathbf{u} \times \mathbf{B}$$
$$= N q\, \mathbf{u} \times \mathbf{B}\, dV$$
$$= \mathbf{J} \times \mathbf{B}\, dV$$

Kraften på volymen V'

$$\mathbf{F}_m = \int_{V'} \mathbf{J} \times \mathbf{B}\, dV'$$

Betrakta tråd med längd $d\vec{l}$, radie a

$$d\mathbf{F}_m = \mathbf{J} \times \mathbf{B}\, \pi a^2\, dl$$
$$= J \pi a^2\, d\vec{l} \times \mathbf{B}$$
$$= I\, d\vec{l} \times \mathbf{B}$$

Kraft på en slinga

$$\mathbf{F}_m = I \int_c d\vec{l} \times \mathbf{B}$$

Exempel 6-21:

20/2 Vektarfält och elektromagnetisk fältteori (11)

Innehåll:

- Induktion
  + Tre fall
    - Fall 1: Stationär slinga tidsvarierande B-fält
    - Fall 2: Rörlig slinga, stationärt B-fält
    - Fall 3: Rörlig slinga och tidsvarierande B-fält
  + Exempel
    - Roterande slinga i B-fält
  + Exempel
    - Kapacitans med krets

Induktion

Kapitel 7-1 och 7-2

$\nabla \times \mathbb{E} = -\frac{d\mathbb{B}}{dt}$, Faradays postulat/lag

$\int_S \nabla \times \mathbb{E} \cdot d\vec{s} = -\int_S \frac{d\mathbb{B}}{dt} d\vec{s}$

$\oint_C \mathbb{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi}{dt} = \mathcal{E}_{ind}$

<u>Tre fall:</u>

1) Fix slinga i $\mathbb{B}(t)$

2) Rörlig ledare i statisk $\mathbb{B}(t)$

3) Rörlig ledade i $\mathbb{B}(t)$

Fall 1: Tidsvarierande $\mathbb{B}$ - fält

$\mathcal{E}_{ind} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}\int_S \mathbb{B} \cdot d\vec{s}$

$\nabla \times \mathbb{E} = -\frac{d\mathbb{B}}{dt}$, ej rotationsfritt, som i elektrostatiken

Använd $\mathbb{B} = \nabla \times \mathbb{A}$

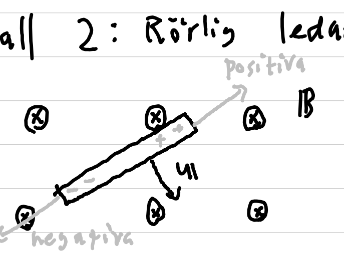
$\nabla \times \mathbb{E} = -\frac{d(\nabla \times \mathbb{A})}{dt}$, byt ordning på d/dt och $\nabla \times$.

$\nabla \times \left(\mathbb{E} + \frac{d\mathbb{A}}{dt}\right) = 0 \Rightarrow \mathbb{E} + \frac{d\mathbb{A}}{dt}$ är konservativt

$\Rightarrow \boxed{\mathbb{E} = -\nabla V - \frac{d\mathbb{A}}{dt}}$ ← tidsvarierande strömmar

laddning

Fall 2: Rörlig ledare



$\mathbb{F}_m = q\, \mathbb{u} \times \mathbb{B}$

Detta skapar två poler, on positiv och en negativ. Dessa vill sedan utjämnas igen.

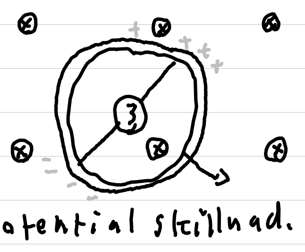
Kraftbalans: $-\nabla V + \mathbb{F}_m / q = 0$

$\Rightarrow \nabla V = \mathbb{u} \times \mathbb{B}$

Det finns då en användbar potentialskillnad mellan ändarna.

$V_2 - V_1 = \int_1^2 \nabla V \cdot d\vec{l} = \int_1^2 \mathbb{u} \times \mathbb{B} \cdot d\vec{l}$

Fråga: Om man har en roterande cirkel, var ska man koppla in lampa för att den ska lysa.



Vi vill ha en potential-skillnad. Detta uppnås om linjer vinkelräta mot färd-riktningen kopplas. Störst potentialskillnad.

Fall 3: $\mathbb{E} = q(\mathbb{E} + \mathbb{u} \times \mathbb{B})$

En observatör färdas med ledaren (relativitetsteori)

$\mathbb{F} = q(\mathbb{E}' + 0 \times \mathbb{B}') = q\,\mathbb{E}'$

Krafter är lika $\Rightarrow \mathbb{E}' = \mathbb{E} + \mathbb{u} \times \mathbb{B}$

eller $\mathbb{E} = \mathbb{E}' - \mathbb{u} \times \mathbb{B}$

Säg att vi har slinga med kontur C, yta S, som rör sig med hastighet $\mathbb{u}$

Labb system $\oint_C \mathbb{E} \cdot d\vec{l} = -\int_S \frac{d\mathbb{B}}{dt} \cdot d\vec{s} = \mathcal{E}_{ind}$

Rörligt system $\oint_C \mathbb{E}' \cdot d\vec{l} = \underbrace{-\int_S \frac{d\mathbb{B}}{dt} \cdot d\vec{s}}_{\text{induktion}} + \underbrace{\oint_C \mathbb{u} \times \mathbb{B} \cdot d\vec{l}}_{\text{rörelse}} = \mathcal{E}_{ind}$

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbb{E} = -\frac{d\mathbb{B}}{dt} \\ \nabla \times \mathbb{H} = \mathbb{J} \quad (*) \end{cases} \qquad \begin{matrix} \nabla \cdot \mathbb{D} = \rho \\ \nabla \cdot \mathbb{B} = 0 \end{matrix}$$

$\nabla \cdot \mathbb{J} + \frac{d\rho}{dt} = 0$, kontinuitetsekvationen

Är dessa konsistenta?

$\cancel{0 \equiv \nabla \cdot (\nabla \times \mathbb{H}) = \nabla \cdot \mathbb{J}} = \underbrace{-\frac{d\rho}{dt}}_{\neq 0\ \forall \rho}$

Maxwell löste detta problem

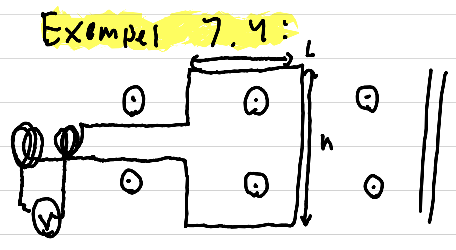
$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbb{H}) = \underbrace{\nabla \cdot \mathbb{J} + \frac{d\rho}{dt}}_{=0?} = 0$

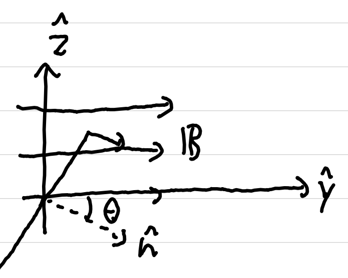
Använd $\nabla \cdot \mathbb{D} = \rho$

$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbb{H}) = \nabla \cdot \mathbb{J} + \frac{d(\nabla \cdot \mathbb{D})}{dt} = \nabla \cdot \left(\mathbb{J} + \frac{d\mathbb{D}}{dt}\right)$

$\Rightarrow \boxed{\nabla \times \mathbb{H} = \mathbb{J} + \frac{d\mathbb{D}}{dt}}$, istället för $\nabla \times \mathbb{H} = \mathbb{J}$ (*)

Exempel 7.4:





a) Börja med stillastående slinga

$\mathbb{B} = \hat{y}\, B_0 \sin(\omega t)$

$\Phi = \int_S \mathbb{B} \cdot d\vec{s} = \hat{y}\, B_0 \sin(\omega t) \cdot \hat{n}\, hL$

$= B_0 hL \sin(\omega t) \cos\alpha$

$\mathcal{E}_{ind} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}\left(B_0 hL \sin(\omega t)\cos\alpha\right)$

$= -B_0 hL\, \omega \cos(\omega t)\cos(\alpha)$

b) Roterande slinga med ω

Antag $\alpha = 0$ vid $t = 0 \Rightarrow \alpha = \omega t$

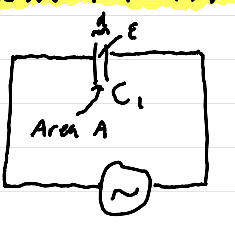
Vi hade $\Phi = B_0 hL \sin(\omega t)\cos(\alpha)$

$= B_0 hL \sin(\omega t)\cos(\omega t)$

$= B_0 hL \frac{\sin(2\omega t)}{2}$

$\mathcal{E}_{ind} = -\frac{d\Phi}{dt} = -B_0 hL\, \omega \cos(2\omega t)$

Exempel 7.5:



$V_C = V_0 \sin(\omega t)$

Ström $i_C = C_1 \frac{dV_C}{dt} = \omega C_1 V_0 \cos(\omega t)$

Fält mellan plattorna

$\mathbb{D} = \varepsilon \mathbb{E} = \varepsilon \frac{V_0 \sin(\omega t)}{d}$

$i_D = \int_A \frac{d\mathbb{D}}{dt} \cdot d\vec{s} = \underbrace{\varepsilon \frac{A}{d}}_{=C_1} V_0\, \omega \cos(\omega t)$

$= \omega C_1 \cos(\omega t)$

21/2 Vektorfält och elektromagnetisk fältteori 12

Innehåll:

- Retarderade potentialer
  + Härledning vågekvationen
  + Typisk lösning
  + Godtycklig laddningsfördelning
  + Vågekvationen i termer av $\mathbb{E}$ och $\mathbb{H}$
- Komplexa fält
  + Postulaten på komplex form
- Plana vågar

Retarderade potentialer

Kapitel 7-4 och 7-6

$$\mathbb{E} = -\nabla V - \frac{dA}{dt}$$

∇V: laddning, $\frac{dA}{dt}$: induktion

I statiken

$$\begin{cases} V = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \int_{V'} \frac{\rho}{R} \, dV' \\ A = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{\mathbb{J}}{R} \, dV' \end{cases}$$

$$\nabla \times \mathbb{H} = \mathbb{J} + \frac{d\mathbb{D}}{dt}$$

$$\nabla \times \mathbb{B} = \mu \mathbb{J} + \mu \frac{d\mathbb{D}}{dt}$$

$$\Rightarrow \nabla \times (\nabla \times \mathbb{A}) = \mu \mathbb{J} + \mu\varepsilon \frac{d}{dt}\left(-\nabla V - \frac{d\mathbb{A}}{dt}\right)$$

$$[\nabla \times (\nabla \times \mathbb{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbb{A}) - \nabla^2 \mathbb{A}]$$

$$\nabla^2 \mathbb{A} - \mu\varepsilon \frac{d^2\mathbb{A}}{dt^2} = -\mu \mathbb{J} + \nabla\left(\nabla \cdot \mathbb{A} + \mu\varepsilon \frac{dV}{dt}\right)$$

[Vi kan låta $\nabla \cdot \mathbb{A}$ vara godtyckligt. Vi väljer $\nabla \cdot \mathbb{A} = -\mu\varepsilon \frac{dV}{dt}$ så att parentes blir 0.]

$$\nabla^2 \mathbb{A} - \mu\varepsilon \frac{d^2\mathbb{A}}{dt^2} = -\mu \mathbb{D} \quad \text{(vågekvationen)}$$

Detta överrensstämmer med Poissons ekvation i statiken, där tidsderivator är 0.

Skalär potential V?

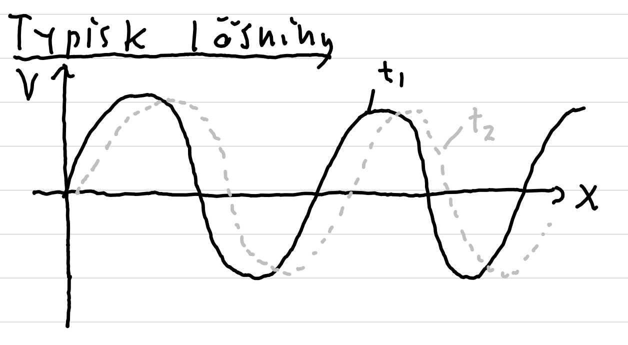
$$\nabla \cdot \mathbb{D} = \rho$$

$$\nabla \cdot \varepsilon\left(-\nabla V - \frac{\partial \mathbb{A}}{dt}\right) = \rho$$

$$\nabla^2 V + \frac{d}{dt}(\nabla \cdot \mathbb{A}) = -\frac{\rho}{\varepsilon}$$

$$\nabla^2 V - \mu\varepsilon \frac{d^2 V}{dt^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon} \quad \text{(vågekvation)}$$

Typisk lösning



Lägg en laddning $\rho(t)\,dV'$ i origo

Vi får då sfärisk symmetri

$$\frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R}\left(R^2 \frac{\partial V}{\partial R}\right) - \mu\varepsilon \frac{d^2 V}{dt^2} = 0 \leftarrow \text{utanför origo}$$

Variabelbyte $V(R,t) = \frac{1}{R} u(R,t)$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial R^2} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

Kan visa att funktioner med följande tidsberoende är lösningen

$$u_1 = f(t - R\sqrt{\mu\varepsilon})$$
$$u_2 = f(t + R\sqrt{\mu\varepsilon})$$

$$V_1 = \frac{u_1}{R} = \frac{1}{R} f(t - R\sqrt{\mu\varepsilon})$$

I elektrostatiken hade vi

$$\Delta V = \frac{\rho \, dV'}{4\pi\varepsilon R}$$

Jämför uttrycken och identifiera

$$\Delta V_1 = \frac{1}{R} \Delta f(t - R\sqrt{\mu\varepsilon}) = \frac{\rho(t - R\sqrt{\mu\varepsilon})\,dV'}{4\pi\varepsilon R}$$

Godtycklig laddningsfördelning:

$$V_1(R,t) = \int_{V'} \frac{\rho(t - R\sqrt{\mu\varepsilon})}{4\pi\varepsilon R} \, dV'$$

Samma form som i elektrostatiken. Den enda skillnaden är den inre funktionen för ρ.

Vågekvationen i termer av $\mathbb{E}$ och $\mathbb{H}$:

$$\nabla^2 \mathbb{E} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \mathbb{E}}{\partial t^2} = \mu \frac{\partial \mathbb{J}}{\partial t} + \frac{1}{\varepsilon} \nabla \rho$$

$$\nabla^2 \mathbb{H} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \mathbb{H}}{\partial t^2} = -\nabla \times \mathbb{J}$$

Ofta kan högerleden sättas = 0 vid propagation av fält.

Komplexa fält Kapitel 7-7:

Tidsberoende fält, sinus format

$$\mathbb{E}(x,y,z,t) = \hat{x} E_{ox}(x,y,z) \cos(\omega t + \theta_x(x,y,z)) + \hat{y} E_{oy}(x,y,z) \cos(\omega t + \theta_y(x,y,z)) + \hat{z} E_{oz}(x,y,z) \cos(\omega t + \theta_z(x,y,z))$$

Komplext, $\mathbb{E} \in \mathbb{C}$

$$\bar{\mathbb{E}}(x,y,z) = \hat{x} E_{ox}(x,y,z) e^{j\theta_x(x,y,z)} + \hat{y} E_{oy}(x,y,z) e^{j\theta_y(x,y,z)} + \hat{z} E_{oz}(x,y,z) e^{j\theta_z(x,y,z)}$$
$$= \hat{x} \bar{E}_{ox} + \hat{y} \bar{E}_{oy} + \hat{z} \bar{E}_{oz}$$

Relationen mellan reellt och komplext fält

$$\mathbb{E}(x,y,z,t) = \mathrm{Re}\{\bar{\mathbb{E}}(x,y,z) e^{j\omega t}\}$$

Postulaten på komplex form:

$$\nabla \times \mathbb{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \mathbb{B} \quad \text{(Faradays lag)}$$

$$\Rightarrow \nabla \times \left(\mathrm{Re}\{\bar{\mathbb{E}} e^{j\omega t}\}\right) = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\mathrm{Re}\{\bar{\mathbb{B}} e^{j\omega t}\}\right)$$

$$\Leftrightarrow \mathrm{Re}\{\nabla \times (\bar{\mathbb{E}} e^{j\omega t})\} = \mathrm{Re}\left\{-\frac{\partial}{\partial t}(\bar{\mathbb{B}} e^{j\omega t})\right\}$$

$$\Leftrightarrow \mathrm{Re}\{e^{j\omega t} \nabla \times \bar{\mathbb{E}}\} = \mathrm{Re}\{\bar{\mathbb{B}}(-j\omega e^{j\omega t})\}$$

Måste gälla $\forall t$.

$$\Rightarrow \nabla \times \bar{\mathbb{E}} = -j\omega \bar{\mathbb{B}}$$

Minnesregel $\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow j\omega$

Övriga postulaten

$$\nabla \times \bar{\mathbb{H}} = \bar{\mathbb{J}} + j\omega \bar{\mathbb{D}}$$
$$\nabla \cdot \bar{\mathbb{B}} = 0$$
$$\nabla \cdot \bar{\mathbb{D}} = \bar{\rho}$$

Vågekvationen

$$\nabla^2 \bar{V} + k^2 \bar{V} = -\bar{\rho}/\varepsilon$$
$$\nabla^2 \bar{\mathbb{A}} + k^2 \bar{\mathbb{A}} = -\mu \bar{\mathbb{J}}$$

Plana vågor Kapitel 8-1:

$$\nabla^2 \bar{\mathbb{E}} + k_0^2 \bar{\mathbb{E}} = 0 \qquad k_0 = \omega\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}$$

Antag E_x

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k_0^2\right) E_x = 0$$

Antag konstant amplitud och fas vinkelrätt mot propagationsriktning.

Antag propagation i z-led.

$$\Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial x^2} \bar{E}_x = 0$$
$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} \bar{E}_x = 0$$
$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \bar{E}_x + k_0^2 \bar{E}_x = 0$$

Lösningar!

$$E_x(z) = E_0^+ e^{-jk_0 z} + E_0^- e^{jk_0 z}$$

24/2 Vektorfält och elektromagnetisk fältteori (13)

Innehåll:
- Plana vågar
  + Plana vågar med förluster
  + Polarisation
  + Fashastighet
  + Goda ledare
  + Material med små förluster
  + Vågimpedans
  + Skine-effekt

Plana vågor

$\nabla^2 \mathbb{E} + k_0 \mathbb{E} = 0$

I x-led: framåt, bakåt gående våg

$\bar{\mathbb{E}}_x(z) = \mathbb{E}^+_x(z) + \bar{\mathbb{E}}^-_x(z)$

$= \bar{E}_0^+ e^{-jk_0 z} + \bar{E}_0^- e^{jk_0 z}$

Plan våg i godtycklig riktning

$\mathbb{E}(x,y,z) = \bar{E}_0 e^{-jk_x x - jk_y y - jk_z z}$

För att vågekvationen ska uppfyllas

$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \omega^2 \mu \varepsilon$

$\mathbb{k} = \hat{x} k_x + \hat{y} k_y + \hat{z} k_z$ (pekar i propogationsriktning)

Generell form: $\bar{\mathbb{E}}(\mathbb{R}) = \bar{E}_0 e^{-j \mathbb{k} \cdot \mathbb{R}}$

där $\mathbb{R} = \hat{x} x + \hat{y} y + \hat{z} z$

I material med förluster

$\nabla^2 \mathbb{E} + k_c^2 \mathbb{E} = 0$

$k_c = \omega \sqrt{\mu \varepsilon_c}$

$\varepsilon_c = \varepsilon' - j\varepsilon''$

$\varepsilon' = \varepsilon_0 \varepsilon_r$

$\varepsilon'' = \sigma / \omega$

$\gamma := jk_c = j\omega\sqrt{\mu_c} = \alpha + j\beta$

<u>Plana vågor med förluster</u>, kapitel 8-3:

$\frac{\partial^2 \bar{\mathbb{E}}_x(z)}{\partial z^2} - \gamma^2 \mathbb{E}_x(z) = 0$

Framåtgående våg:

$\bar{E}_x(z) = \bar{E}_x^+(0) e^{-\gamma z}$

Reell lösning

$E(z,t) = \mathrm{Re}\{ \bar{E}_x(z) e^{j\omega t} \}$

$= \mathrm{Re}\{ E_0^+ e^{j\theta^+} e^{-(\alpha + j\beta)z} e^{j\omega t} \}$

$= E_0^+ e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z + \theta^+)$

<u>Polarisation</u>, kapitel 8-2 och 8-3:

Mer allmänt: $\bar{\mathbb{E}} = \hat{x} E_{y_0} \cos(\omega t - \beta z) + \hat{y} E_{y_0} \cos(\omega t - \beta z + \varphi)$

Vi har olika fall:

- Linjär polariserat: $\varphi = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$
- Cirkulär polariserat: $E_{x_0} = E_{y_0}$ och $\varphi = (k + 1/2)\pi$
- Elliptisk polarisation: Alla andra fall

För en intuitiv förståelse för linjär polarisation är de två vågorna med samma fas, växlar mellan vektorsumman ↗ ↙ ↗ ↙ ...

Cirkulär polarisation ger att summan av de två komponenterna bildar en perfekt cirkel.

Ökat σ ger en dämpad svägning

<u>Fashastighet</u> kapitel 8-2:

$E = E_0 e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z + \theta)$

Vi åker med till exempel en "dal"

$\Rightarrow \omega t - \beta z = \text{Konstant}$

Derivera med avseende på t:

$\omega - \beta \frac{\partial z}{\partial t} = 0 \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\omega}{\beta} = u_p$ fashastighet

$\gamma = jk_c = j\omega\sqrt{\mu \varepsilon_c} = \alpha + j\beta$

$\varepsilon_c = \varepsilon' - j\varepsilon'' = \varepsilon - j\sigma/\omega$

$\gamma = j\omega\sqrt{\mu\varepsilon'} \left(1 + \frac{\sigma}{j\omega\varepsilon'}\right)^{1/2}$

$\alpha = \omega \sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2}} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2} - 1 \right)^{1/2} \qquad \alpha > 0$

$\beta = \omega \sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2}} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2} + 1 \right)^{1/2} \qquad \beta > 0$

<u>Goda ledare</u>:

$\frac{\sigma}{\omega\varepsilon} \gg 1$

$\Rightarrow \alpha \approx \beta \approx \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}}$

<u>Material med små förluster</u>:

$\frac{\sigma}{\omega\varepsilon} \ll 1 \Rightarrow \alpha \approx \frac{\sigma}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}, \quad \beta = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}$

<u>Vågimpedans</u> (intrinsic impedence), kapitel 8-2.2:

η i boken, oftast z annars

eta

Ansätt plan våg: $\mathbb{E} = \hat{x} E_x(z) = \hat{x} \bar{E}_x^+(z) + \hat{x} \bar{E}_x^-(z)$

Sätt in postulatet $\nabla \times \mathbb{E} = -j\omega\mathbb{B}$

$\bar{\mathbb{H}} = \frac{-1}{j\omega\mu} \left[\hat{y} \frac{\partial E_x}{\partial z} \right] = -\hat{y} \frac{-1}{j\omega\mu} \left[-\gamma \bar{E}_x^+(z) + \gamma \bar{E}_x^-(z) \right]$

$= \hat{y} \frac{\gamma}{j\omega\mu} \left[\bar{E}_x^+(z) - \bar{E}_x^-(z) \right] = \hat{y} \left[\bar{H}_y^+(z) + \bar{H}_y^-(z) \right]$

$H_y^+ = \underbrace{\frac{\gamma}{j\omega\mu}}_{:= 1/z \text{ eller } 1/\eta} E_x^+(z)$

$\bar{H}_y^- = -\frac{\gamma}{j\omega\mu} \bar{E}_x^-(z)$

$z := \frac{j\omega\mu}{\gamma}$ eller $\eta = \frac{j\omega\mu}{\gamma}$

Godtycklig plan våg:

$\bar{\mathbb{E}}(\mathbb{R}) = \bar{\mathbb{E}}(0) e^{-\gamma \hat{k} \cdot \mathbb{R}}, \quad \hat{k} \cdot \mathbb{E} = 0$

$\mathbb{H} = \frac{1}{z} \hat{k} \cdot \mathbb{E} \Leftrightarrow \mathbb{E} = z \mathbb{H} \times \hat{k}$

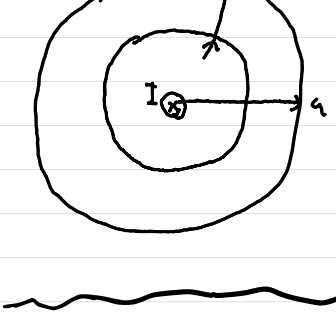
<u>Skine-effekt</u>, kapitel 8-3

$e^{-\alpha z}$ visar hur fältet dämpas.

På djupet $\delta = 1/\alpha$ har fältet dämpats

$e^{-\alpha/\alpha} = e^{-1} \approx 37\%$, $\delta :=$ inträngningsdjup

I tråd



För mer information, se "El fält i sammandrag, avsnitt 10.2.9"

Maxwell i cylindriska koordinater

28/2 Vektorfält och elektromagnetisk fältteori (14)

Innehåll:

- Vågrörelser
  - Grupphastighet
  - Poyntingvektorn
  - Tidsmedelvärde av Poyntingvektorm
  - Reflektans och transmittans
  - Snett infall
  - Total reflektion

Vågrörelser

Grupphastighet, kapitel 8-4:

Antag två vågor $\omega_0+\Delta\omega$ och $\omega_0-\Delta\omega$
$\beta_0+\Delta\beta$ och $\beta_0-\Delta\beta$

Lägg ihop två vågor

$$E(z,t)=E_0\cos((\omega_0+\Delta\omega)t-(\beta_0+\Delta\beta)z)+$$
$$+E_0\cos((\omega_0-\Delta\omega)t-(\beta_0-\Delta\beta)z)$$
$$=2E_0\cos\underbrace{(\Delta\omega t-\Delta\beta z)}_{\text{Konstant}}\cos(\omega_0 t-\beta_0 z)$$

$$u_g=\frac{dz}{dt}=\frac{\Delta\omega}{\Delta\beta}\ ,\ \text{låt}\ \substack{\Delta\omega\to 0\\ \Delta\beta\to 0}\iff 1/\left(\frac{\partial\beta}{\partial\omega}\right)$$

Poyntingsvektorn, kapitel 8-5!

$\vec{S}:=\mathbb{E}\times\mathbb{H}$

Härledning

$$\nabla\cdot(\mathbb{E}\times\mathbb{H})=\mathbb{H}(\nabla\times\mathbb{E})-\mathbb{E}(\nabla\times\mathbb{H})$$
$$=\mathbb{H}\left(-\frac{\partial\mathbb{B}}{\partial t}\right)-\mathbb{E}\left(\mathbb{J}+\frac{\partial\mathbb{D}}{\partial t}\right)$$
$$=-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(\mathbb{H}\cdot\mathbb{B})-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(\mathbb{E}\cdot\mathbb{D})-\frac{\mathbb{J}\cdot\mathbb{J}}{\sigma}$$

Integrera över V':

$$\int_{V'}\nabla(\mathbb{E}\times\mathbb{H})\,dV'=-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int_{V'}\mathbb{H}\cdot\mathbb{B}\,dV'-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int_{V'}\mathbb{E}\cdot\mathbb{D}\,dV'-$$
$$-\int_{V'}\frac{\mathbb{J}\cdot\mathbb{J}}{\sigma}\,dV'$$

$$\underbrace{\int_S\mathbb{E}\times\mathbb{H}\,d\vec{S}}_{\text{Effekt ut/in}}=[\Delta\text{Elekrostatisk energi}]+[\Delta\text{Magnetostatisk energi}]$$

Tidsmedelvärde av Poyntingsvektorn, kapitel 8-5!

Ansätt $\mathbb{E}=\mathbb{E}_r+j\mathbb{E}_i$ $\quad\vec{\mathbb{E}}=\mathbb{E}_r\cos(\omega t)-\mathbb{E}_i\sin(\omega t)$
$\mathbb{H}=\mathbb{H}_r+j\mathbb{H}_i$ $\quad\mathbb{H}=\mathbb{H}_r\cos(\omega t)-\mathbb{H}_i\sin(\omega t)$

Beräkna Poyntingsvektorn

$$\vec{S}=\mathbb{E}\times\mathbb{H}=(\mathbb{E}_r\cos(\omega t)+\mathbb{E}_i\sin(\omega t))\times(\mathbb{H}_r\cos(\omega t)-\mathbb{H}_i\sin(\omega t))$$

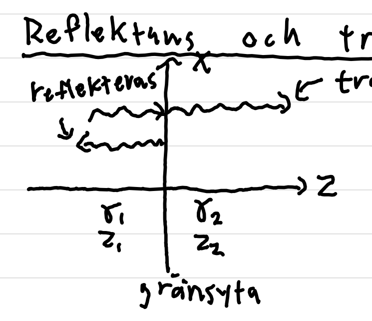
$$=\mathbb{E}_r\times\mathbb{H}_r\cos^2\omega t+\mathbb{E}_i\times\mathbb{H}_i\sin^2\omega t-$$
$$-(\mathbb{E}_i\times\mathbb{H}_r+\mathbb{E}_r\times\mathbb{H}_i)\underbrace{\sin(\omega t)\cos(\omega t)}_{=0}$$

Tidsmedelvärde: $\bar{S}=\frac{1}{T}\int_0^T\vec{S}\,dt=\frac{1}{2}(\mathbb{E}_r\times\mathbb{E}_r+\mathbb{E}_i\times\mathbb{H}_i)$

Komplex form: $\frac{1}{2}\mathrm{Re}(\mathbb{E}\times\mathbb{H}^{*})=$ ← komjugat

$$=\frac{1}{2}\mathrm{Re}(\mathbb{E}_r+j\mathbb{E}_i)\times(\mathbb{H}_r-j\mathbb{H}_i)$$
$$=\frac{1}{2}\mathrm{Re}(\mathbb{E}_r\times\mathbb{H}_r+\mathbb{E}_i\times\mathbb{H}_i)+j(\dots)\leftarrow\text{ej reellt}$$
$$=\frac{1}{2}(\mathbb{E}_r\times\mathbb{H}_r+\mathbb{E}_i\times\mathbb{H}_i)$$

Reflektans och transmittans, kapitel 8.6 och 8.8:



Antag vågor

$\bar{\mathbb{E}}_1^+=\hat{x}\bar{E}_{10}^+e^{-\gamma_1 z}$ $\quad\bar{\mathbb{H}}_1^+=\hat{y}\frac{\bar{E}_{10}^+}{Z_1}e^{-\gamma_2 z}$

$\bar{\mathbb{E}}_1^-=\hat{x}\bar{E}_{10}^-e^{\gamma_1 z}$ $\quad\bar{\mathbb{H}}_1^-=-\hat{y}\frac{\bar{E}_{10}^-}{Z_1}e^{\gamma_2 z}$

$\bar{\mathbb{E}}_2^+=\hat{x}\bar{E}_{20}^+e^{-\gamma_2 z}$ $\quad\bar{\mathbb{H}}_2^+=\hat{y}\frac{\bar{E}_{20}^+}{Z_2}e^{-\gamma_2 z}$

Randvillkor vid $z=0$:

$E_{1,trans}=E_{2,trans}$
$H_{1,trans}=H_{2,trans}$

$$\Rightarrow\underbrace{\bar{E}_{10}^+}_{\text{känd}}+\bar{E}_{10}^-=\bar{E}_{20}^+\ ,\quad\frac{\overbrace{\bar{E}_{10}^+}^{\text{känd}}}{Z_1}-\frac{\bar{E}_{10}^-}{Z_1}=\frac{\bar{E}_{20}^+}{Z_2}$$

$$\Rightarrow\bar{E}_{10}^-=\underbrace{\frac{Z_2-Z_1}{Z_2+Z_1}}_{:=\Gamma}\bar{E}_{10}^+\ ,\quad\bar{E}_{20}^+=\underbrace{\frac{2Z_2}{Z_2+Z_1}}_{:=\tau}\bar{E}_{10}^+$$

Vinkelrätt mot infall

Kan då visa att $1+\Gamma=\tau$

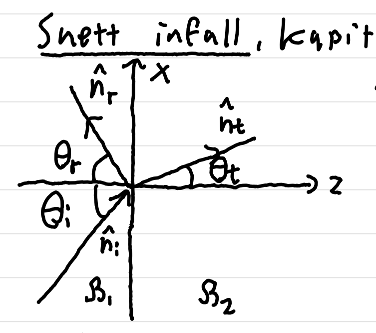
För elfält gäller reflektion

$$R=\frac{|\vec{S}_r|}{|\vec{S}_i|}=\frac{|\vec{E}_r|^2}{|\vec{E}_i|^2}=|\Gamma|^2$$

$$T=\frac{|\vec{S}_t|}{|\vec{S}_i|}=\frac{|\vec{S}_i-\vec{S}_r|}{|\vec{S}_i|}=1-\frac{|\vec{S}_r|}{|\vec{S}_i|}=1-R$$

Kan även visa att $R+T=1$.

Snett infall, kapitel 8-10:



$\sigma_1=0$ $\quad\sigma_2=0$

Ansätt $\bar{\mathbb{E}}_i=\bar{E}_{i0}e^{-j\beta_1\hat{n}_i\cdot\mathbb{R}}$

$\bar{\mathbb{E}}_r=\bar{E}_{r0}e^{-j\beta_1\hat{n}_r\cdot\mathbb{R}}$

$\bar{\mathbb{E}}_t=\bar{E}_{t0}e^{-j\beta_2\hat{n}_t\cdot\mathbb{R}}$

$\hat{n}_i=(\sin\theta_i,0,\cos\theta_i)$
$\hat{n}_r=(\sin\theta_r,0,\cos\theta_r)$
$\hat{n}_t=(\sin\theta_t,0,\cos\theta_t)$

$\hat{n}_i\cdot\mathbb{R}=x\sin\theta_i+z\cos\theta_i$
$\hat{n}_r\cdot\mathbb{R}=x\sin\theta_r+z\cos\theta_r$
$\hat{n}_t\cdot\mathbb{R}=x\sin\theta_t+z\cos\theta_t$

Randvillkor vid $z=0$:

$$\begin{cases}(\bar{\mathbb{E}}_{i0})_t+(\bar{\mathbb{E}}_{r0})_t=(\mathbb{E}_{t0})_t\\(\bar{\mathbb{H}}_{i0})_t+(\bar{\mathbb{H}}_{r0})_t=(\bar{\mathbb{H}}_{t0})\end{cases}$$

$(\dots)_t$ = tangential komponent

$$\Rightarrow(\bar{\mathbb{E}}_{i0})_t e^{-j\beta_1 x\sin\theta_i}+(\bar{\mathbb{E}}_{r0})_t e^{-j\beta_1 x\sin\theta_r}=(\mathbb{E}_{t0})_t e^{-j\beta_2 x\sin\theta_t}$$

Ekvationerna ska gälla för alla x

$\beta_k=\frac{\omega}{c_k}$

$$\Rightarrow\frac{\omega}{c_1}x\sin\theta_i=\frac{\omega}{c_1}x\sin\theta_r=\frac{\omega}{c_2}\sin\theta_t$$

$$\Rightarrow\frac{\sin\theta_i}{c_1}=\frac{\sin\theta_t}{c_2}\quad\text{(Snells lag}$$

Totalreflektion, kapitel 8.10 och 8.11:

Då $\varepsilon_1>\varepsilon_2$ (Antag $\mu_1=\mu_2$ och förlustfritt)

$c=\frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$

Snells lag blir då $\sin\theta_i\sqrt{\mu\varepsilon_1}=\sin\theta_t\sqrt{\mu\varepsilon_2}$

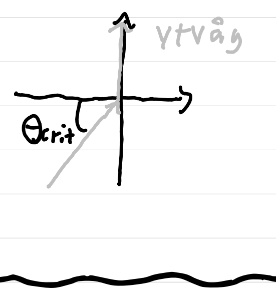
$\sin\theta_t=\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}}\sin\theta_i$

Vad händer om $\theta_t=\pi/2$

$\theta_i=\arcsin\left(\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}\right)=:\theta_{crit}$ ← kritisk vinkel

För $\theta_i>\theta_{crit}$

$$\sin\theta_t=\underbrace{\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}}\sin\theta_i}_{>1}$$



Inga reella lösningar

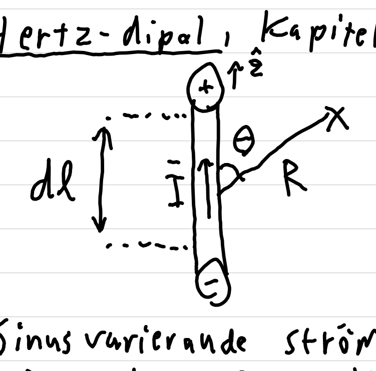
1/3 Vektorfält och elektromagnetisk fältteori (15)

Innehåll:

- Antenner
  + Hertz-dipol
  + Strålningsdiagram
  + Utstrålad effekt
  + Antennförstärkning
  + Strålningsresistans
  + Dipolantenn
  + Array

Antenner

Hertz-dipol, kapitel 11-1 och 11-2:



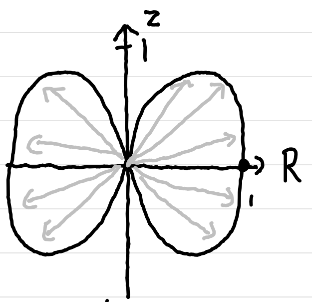
Retarderande potential
$$\bar{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'} \frac{\bar{J}e^{-j\beta R}}{R}\,dV'$$

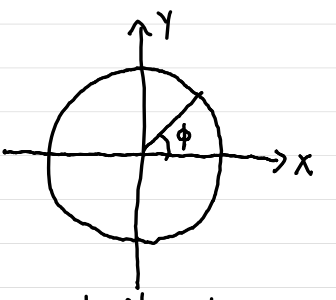
Sinusvarierande ström
Låt $d\ell \ll \lambda$, våglängd, $d\ell \ll R$.

[Retarderad potential ≈ Fördröjd potential]

Antag även att $\bar{I}$ konstant längsmed antennen.
$$d\bar{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\hat{z}\,\frac{\bar{I}\,d\ell}{R}\,e^{-j\beta R}$$
$$B = \nabla \times \bar{A}$$
$$\Rightarrow \dots\ d\bar{E}_\theta = j\,\frac{\bar{I}\,d\ell}{4\pi}\,\frac{e^{-j\beta R}}{R}\,\underset{\text{vågimpedansen}}{Z}\,\beta\sin\theta$$
$$d\bar{H}_\phi = j\,\frac{\bar{I}\,d\ell}{4\pi}\,\frac{e^{-j\beta R}}{R}\,\beta\sin\theta$$

Strålningsdiagram, kapitel 11-3:





θ-plan
E-plan

ϕ-planet
H-planet

Utstrålad effekt, kapitel 11-3:
$\vec{S} = |E \times H|$, där vi får E och H från Hertzdipol
Tidsinvariant: $\vec{S}_{av} = 1/2 \cdot \mathrm{Re}\{|E \times H^*\}$

Total utstrålad effekt
$$P_r = \oint_{S'} \vec{S}_{av}\cdot d\vec{s}\,' = \oint_{S'} \tfrac{1}{2}\mathrm{Re}\{|E\times H^*\}\cdot d\vec{s}\,'$$
För Hertz-dipolen
$$|E \times H^* = \dots\ \hat{R}\,Z\,\beta^2\,\frac{\bar{I}^2\,d\ell^2}{16\pi^2}\,\frac{1}{R^2}\sin^2\theta$$
$$P_r = \oint_{S'} \vec{S}_{av}\cdot ds' = \dots = \frac{\bar{I}^2}{2}\cdot 80\pi^2\left[\frac{d\ell}{\lambda}\right]^2$$

Antennförstärkning, kapitel 11-2:
$$G_D(\theta,\phi) = \frac{|\vec{S}(\theta,\phi)|}{P_r/4\pi R^2},\quad S(\theta,\phi) = \tfrac{1}{2}\mathrm{Re}\{|E \times H^*\}$$
där R beroendet tar ut varandra.

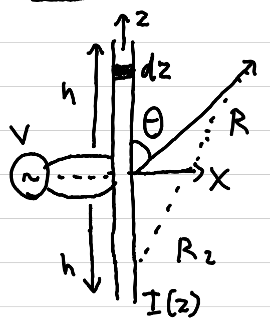
För Hertz-dipolen:
$$G_D(\theta,\phi) = \frac{3}{2}\sin^2\theta$$

Direktivitet $D = \max(G_D)$
Hertz-dipol $D = 1.5$

Strålningsresistans, kapitel 11-3:
$$P_r = R_r I^2_{\text{effektiv}} = \frac{1}{2}R_r I^2_{\text{amplitud}}$$

För Hertz-dipolen:
$$R_r = 80\pi^2\left(\frac{d\ell}{\lambda}\right)^2$$
Om till exempel $d\ell = 0{,}01 \Rightarrow R_r = 0{,}08\,\Omega$

Dipolantennen, kapitel 11-4:



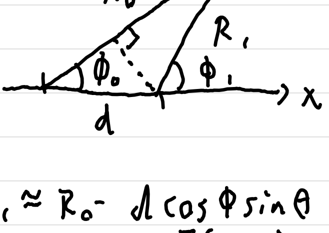
R är ej konstant för hela linjen.
Ström på antennen
$$\bar{I}(z) = \bar{I}_m\sin(\beta(h-|z|))$$
$$dE_\theta = \underset{\text{vågimpedans}}{Z_0}\,d\bar{H}_\phi = j\,\frac{\bar{I}\,dz}{4\pi}\,e^{-j\beta R}$$

Det horizontella avståndet för R kan approximeras som $R - z\cos\theta$, när det är långt ifrån antennen.
$$\Rightarrow d\bar{E}_\theta = Z_0\,d\bar{H}_\phi = j\,\frac{\bar{I}\,dz}{4\pi}\,\frac{e^{-j\beta(R - z\cos\theta)}}{R - z\cos\theta}\,Z_0\,\beta\sin\theta$$
$$\approx j\,\frac{\bar{I}\,dz}{4\pi}\,\frac{e^{-j\beta(R-z\cos\theta)}}{R}\,Z_0\,\beta\sin\theta$$

$$\Rightarrow \bar{E}_\theta = \int d\bar{E}_\theta = \left[\begin{array}{c}\text{Halvvågsantenn}\\ h = \lambda/4\end{array}\right] = \dots$$
$$= j\,\frac{60\bar{I}_m}{R}\,e^{-j\beta R}\,\underbrace{\left(\frac{\cos(\pi\cdot\cos\theta/2)}{\sin\theta}\right)}_{:=F(\theta),\ \text{elementfaktorn}}$$

För halvvågsdipolen
$P_r = 36{,}5(I_m)^2$
Strålningsresistans $R \approx 73.1\,\Omega$
Direktivitet $D = 1.64$

Array, kapitel 11-5:



$$E_0 = E_m\,F(\theta,\phi)\,\frac{e^{-j\beta R_0}}{R_0}$$
$$E_1 = E_m\,F(\theta,\phi)\,\frac{e^{-j\beta R_1}}{R_1}$$
$$E = E_0 + E_1$$

$R_1 \approx R_0 - d\cos\phi\sin\theta$
$$E = \dots = E_m\,\frac{F(\theta,\phi)}{R_0}\,e^{-j\beta R}\,e^{-\Psi/2}\,\underbrace{2\cos\left(\frac{\Psi}{2}\right)}_{\text{Array faktor}}$$
$$\left[\Psi = \beta d\cos\theta\sin\phi + \xi\right]$$

9/3 Vektorfält och elektromagnetisk fältteori (16)

Innehåll:
- Repetition
  + Magnetostatik
    - Magnetisk kraft
    - Postulat
    - Amperes lag
      + Linjeström
    - Biot-Savarts lag
    - Vektorpotential
    - Magnetisk dipol
    - Randvillkor
    - Energi
    - Amperes kraftlag
  + Dynamik
    - Maxwells ekvationer/postulat
    - Kontinuitets ekvationen
    - Lorentz kraft
    - Självinduktans
    - Ömsesidig induktans
    - Induktioner av Faradays lag
    - Lentz lag
    - Retarderade potentialer
  + Komplexa fält
    - Komplexa våg ekvationen
    - Plan våg
    - Poyntingvektorn
    - Reflektion och transmission i gränsytor
  + Antenner
    - Hertzdipolen
    - Dipolantenn

Repetition

Magnetostatiken:

Kraften $\mathbf{F} = q\mathbf{u} \times \mathbf{B} = \vec{I} \times \mathbf{B}$

Postulat: $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$
$\nabla \times \mathbf{B} = \mu \mathbf{J}$

[Tips! Med postulat på tentan är det alltid två postulat i elektrostatik och två i magnetostatik]

Amperes lag: $\oint_C \mathbf{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$

Linjeström: $\mathbf{B}(R) = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi R}$

Biot-Savarts lag: $\mathbf{B} = \dfrac{\mu_0}{4\pi} \displaystyle\int_{V'} \dfrac{\mathbf{J} \times \hat{\mathbf{R}}}{R^2} dV'$

[Tips: Vad är källpunkt, vad är fältpunkt?]

Vektor potential $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \Rightarrow \nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}$
Samma riktning som $\mathbf{J}$

Integral för vektorpotential:
$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{\mathbf{J}}{R} dV'$$

Magnetisk dipol:

$\mathbf{H} = \dfrac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M}$, oftast $\mathbf{B} = \mu_0 \mu_r \mathbf{H}$

[Tips: Var är $\mathbf{H}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{M}$ fälten definerade?]

Randvillkor:
$\mathbf{B}_{1n} = \mathbf{B}_{2n}$ ← kontinuelig
$\mathbf{H}_{1t} - \mathbf{H}_{2t} = \mathbf{J}_s$ ← diskontinuitet ibland, ytström

[Tips! Finns det olika material i problemet, vad är våra randvillkor?]

Energi $W_m: \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{V'} \mathbf{J} \cdot \mathbf{A}\, dV' = \dfrac{1}{2}\int_{V'} \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}\, dV'$

$\mathbf{F}_I = \nabla W_m$
$\mathbf{F}_\phi = -\nabla W_m$

Amperes kraftlag:
$$\mathbf{F}_m = \int_{V'} \mathbf{J} \times \mathbf{B}\, dV'$$

Dynamiken:

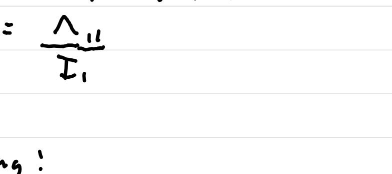
Maxwells ekvationer/postulat:
$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$
$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$
$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$$
$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

Kontinuitetsekvationen:
$$\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

Lorentzkraft $= \mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B})$

Självinduktans: $\Phi_{11} = L_{11} i_1$
$\mathcal{E}_{ind} = -L_1 \dfrac{di}{dt}$

Ömsesidig induktans:
$$\Phi_{12} = \int_{S_2} \mathbf{B}_1 \cdot d\vec{S_2} = L_{12}\, i_1$$



Beräkningsgång
1) Antag I_1
2) Beräkna $\mathbf{B}_1$, Amperes lag eller Biot-Savarts lag
3) Beräkna Φ_{12} eller Φ_{11}
4) Beräkna Λ_{12}, eller Λ_{11}, beror på antal varv
5) Bilda $L_{12} = \dfrac{\Lambda_{12}}{I_{12}}$, $L_{11} = \dfrac{\Lambda_{11}}{I_1}$

Induktioner av Faradays lag:
$$\mathcal{E}_{ind} = -\frac{d\Phi}{dt}$$
[Tips: Beräkna inducerad spänning i en krets]

Lentz lag:
Inducerade spänningar motverkar förändringar i pålagt $\mathbf{B}$-fält.

Retarderade potentialer:
$$\mathbf{A}(\mathbf{R}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{\mathbf{J}(R, t - R_{12}/c)}{R_{12}} dV'$$
$$V(\mathbf{R}, t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{V'} \frac{\rho(R, t - R_{12}/c)}{R_{12}} dV'$$

Komplexa fält:
$\dfrac{\partial}{\partial t} \rightarrow j\omega$, $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathrm{Re}\left\{ \bar{\mathbf{E}} e^{j\omega t} \right\}$
[Tips: Denna är viktig]

Komplex vågekvation
$$\nabla^2 \bar{\mathbf{E}} - \gamma \bar{\mathbf{E}} = 0,$$
$$\gamma = \alpha + j\beta = \sqrt{j\omega\mu(j\omega\varepsilon + \sigma)}$$
Special fall
$\dfrac{\sigma}{\omega\varepsilon} \gg 1$, $\dfrac{\sigma}{\omega\varepsilon} \ll 1$
[Tips! Lägg vikten på goda, respektive dåliga ledare, dvs specialfallen ovan.]

Plan våg (Uniform plane waves):
$\bar{\mathbf{E}}(\mathbf{R}) = \bar{\mathbf{E}}(0) e^{-\gamma \hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{R}}$, $\hat{\mathbf{k}}$ propagationsriktning

$\hat{\mathbf{k}} \cdot \bar{\mathbf{E}}(0) = 0$ måste gälla

Vågimpedans $Z = \dfrac{j\omega\mu_0}{\gamma}$

$\bar{\mathbf{H}}(\mathbf{R}) = \dfrac{\hat{\mathbf{k}} \times \bar{\mathbf{E}}(\mathbf{R})}{Z}$

Fashastighet! $V_{fas} = \dfrac{\omega}{\beta}$

Grupphastighet: $V_{grupp} = 1 \Big/ \dfrac{\partial \beta}{\partial \omega}$

Payntingvektorn: $\vec{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$
Tidsmedelvärdet $\vec{S}_{av} = \dfrac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{ \bar{\mathbf{E}} \times \bar{\mathbf{H}}^* \right\}$

Reflektion och transmission i gränsytor:
Vinkelrätt infall
$\Gamma = \dfrac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1}$, $\tau = \dfrac{2Z_2}{Z_2 + Z_1}$

Snett infall: Snells lag $\theta_1 = \theta_2$
$c_2 \sin(\theta_i) = c_1 \sin(\theta_t)$

Total reflektion: $\theta_{kritisk} = \arcsin\left(\dfrac{c_1}{c_2}\right)$

Frenels ekvation: $\Gamma_\perp = \dfrac{\cos\theta_i / Z_1 - \cos\theta_t / Z_2}{\cos\theta_i / Z_1 + \cos\theta_t / Z_2}$

$\tau_\perp = \dfrac{2\cos\theta_i / Z_2}{\cos\theta_i / Z_1 + \cos\theta_t / Z_2}$

$\Gamma_{\parallel} = \dfrac{-Z_1 \cos\theta_i + Z_2 \cos\theta_t}{Z_1 \cos\theta_i + Z_2 \cos\theta_t}$

$\tau_{\parallel} = \dfrac{2Z_2 \cos\theta_i}{Z_1 \cos\theta_i + Z_2 \cos\theta_t}$

Antenner:

Hertzdipolen:
$$\bar{\mathbf{E}}_{rad} = \hat{\theta}\, \frac{Z_0 j\omega\, dl\, \bar{I}}{4\pi c R} \sin\theta\, e^{-j\beta R}$$
$$\mathbf{H}_{rad} = \hat{\varphi}\, \frac{j\omega\, dl\, \bar{I}}{4\pi c R} \sin\theta\, e^{-j\beta R}$$

Dipolantenn:
$$\mathbf{E} = \int_{-h}^{h} d\mathbf{E}_{rad}$$

[Tips: För arrayer görs en approximation i exponenten men inte i nämnaren]