

31/10 Elektromagnetisk fältteori

Kurshemsidan: www.elmagn.chalmers.se/F&D

Den elektromagnetiska modellen, Kap 1.1-3

Vi ska studera laddningar i vila & i rörelse.

Laddningen Q är en fundamental storhet, likt massan.

Det finns en viktig egenskap: laddning är bevarad. Kan ej skapas/förstöras, endast flyttas.

Vi studerar kraftverkan på avstånd.

Bygger upp en makroskopisk teori/modell

$$\rho(\vec{r}, t) = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta V}$$

ΔV innehåller många laddningar Δq , ρ är homogen i ΔV .

ρ = laddningstäthet, $[\rho] = \text{As}/\text{m}^3 = \text{C}/\text{m}^3$.

Vi kan även def. ytladdningstäthet & linjeladdningstäthet

$$\rho_s = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta S} \quad \text{resp.} \quad \rho_l = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta l}$$

Elektrostatiken, Kap 3.1-2

Laddningar i vila ger upphov till krafter på andra laddningar

Detta beskrivs med det elektriska fältet \vec{E} , $[\vec{E}] = \text{V}/\text{m}$

Kraft på testladdning

$$\vec{F} = q \vec{E}$$

Elektrostatiska postulaten

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho / \epsilon_0, \quad \epsilon_0 = 8,854 \dots \cdot 10^{-12} \text{ As/Vm}$$
$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$$

Gauss lag: $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho / \epsilon_0$

Tåg volymsintegral: $\int \vec{\nabla} \cdot \vec{E} dV = \int \rho / \epsilon_0 dV$

Divergensteoremet ger $\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = Q / \epsilon_0$

Konservativt fält

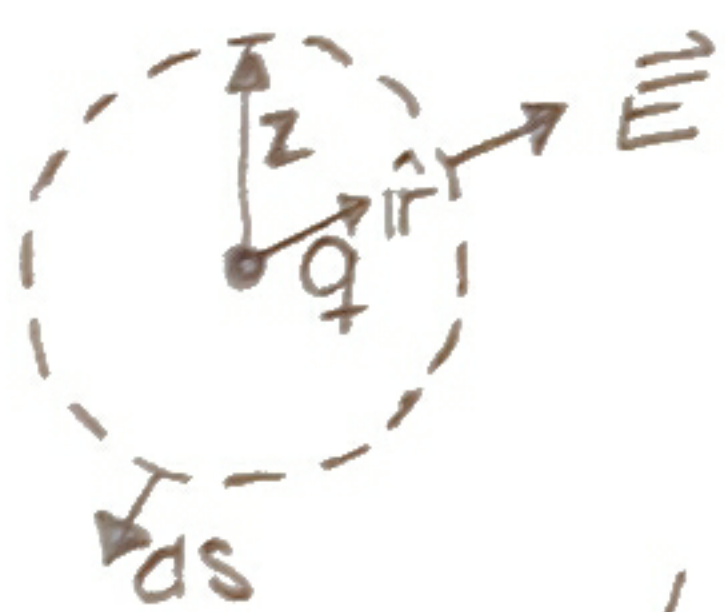
$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$$

Integrera över en yta $\int_S \vec{\nabla} \times \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0$,

Stokes sats ger $\int_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$

Vektoridentitet $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} A = 0 \Rightarrow \vec{E} = -\vec{\nabla} V$, $V =$ elektrostatisk potential

Coulombs lag, Kap 3.3



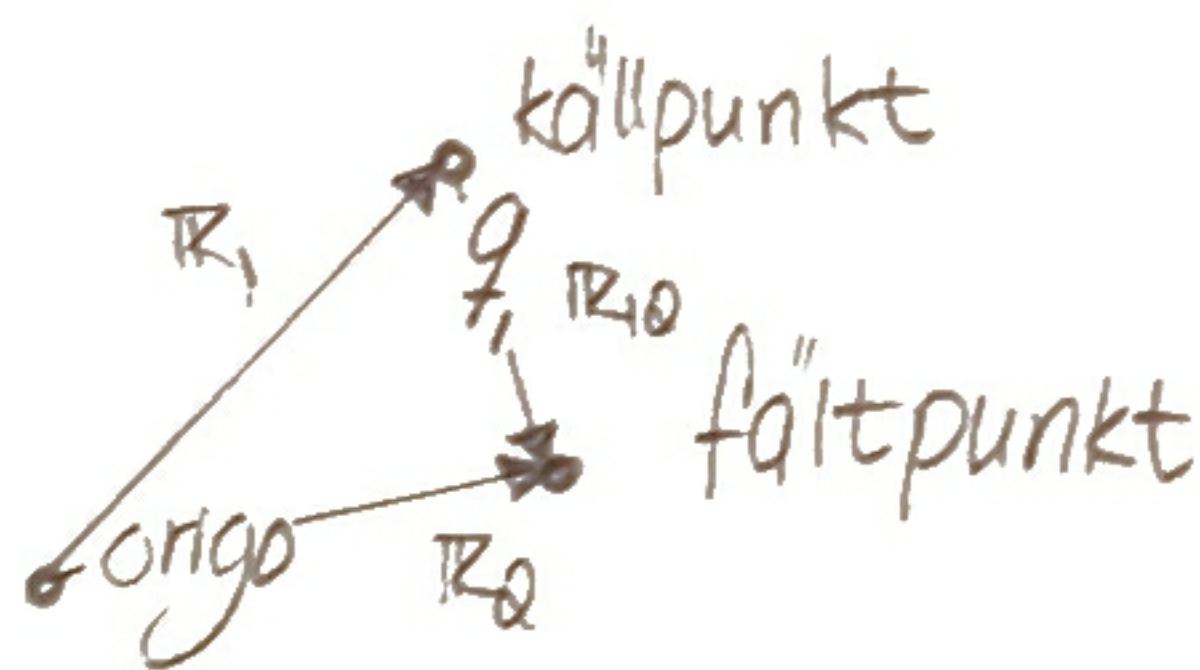
$$\vec{E} = \hat{r} E(r)$$

Gauss lag: $\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_0}$

$$4\pi r^2 E(r) = q / \epsilon_0$$

Lös ut $\vec{E}(r) = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r}$ (fältet från en pktladdning)

Generalisera



$$\vec{E}(r_2) = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{q}{r_{12}^2} \hat{r}_{12}$$

Vi har använt $|r_{12}| = r_{12}$

Notation i boken $r_1 = r'$, $r_2 = r$

Nu placerar vi en laddning q_2 i fältet från q_1 & beräknar

$$\vec{F}_{10} = \frac{q_1 q_2}{r_{10}^2} \vec{E}_1(r_{10}) = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{10}^2} \hat{r}_{10} \quad \text{Coulombs lag}$$

Superposition ger fälten från många diskreta laddningar

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{k=1}^N \frac{q_k}{r_k^2} \frac{(\mathbf{R} - \mathbf{R}_k)}{|\mathbf{R} - \mathbf{R}_k|^3}$$

Fältet från kontinuerliga laddningsfördelningar

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dQ}{r^2} \hat{\mathbf{r}} = \{\text{volym}\} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho dV}{r^2} \hat{\mathbf{r}}$$

{yta} $dQ = \rho_s dS$
 {linje} $dQ = \rho_l dl$

Exempel 3.4, 3.5, 3.7 lös hemma

3.7



Bestäm \vec{E} orsakat av ρ_0 sfärisk laddning.

a) $0 \leq r \leq b$

b) $r > b$

a) lägg in Gaussytan S_i med $r < b$.

vet $\vec{E} = \hat{\mathbf{r}} E_r$, $d\vec{S} = \hat{\mathbf{r}} ds$

Fältet $\oint_{S_i} \vec{E} \cdot d\vec{S} = E_r 4\pi r^2$

Laddningen $Q = \int_V \rho dV = -\rho_0 \int_V dV = -\rho_0 \frac{4\pi}{3} r^3$

$\Rightarrow \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = Q/\epsilon_0$, $\vec{E} = -\hat{\mathbf{r}} \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} r$

1/11 Elektrostatisk potential, Kap 3:5

Studera postulatet $\nabla \times \vec{E} = 0$

Vektoridentiteten $\nabla \times \nabla A \equiv 0 \Rightarrow \vec{E} = -\nabla V$

Med minustecken kommer qV bli ett mått på lägesenergin hos testladdningen q .

Jämför med mekaniken.

Flytta laddning q från P_1 till P_2 .

Fältet orsakar en kraft på laddningen P_1

$$\vec{F} = q\vec{E}$$

Om vi flyttar laddningen q får vi motverka kraften \vec{F} med

$$-\vec{F} = \vec{F}_{\text{mek}}$$

När vi flyttar laddningen utför vi arbetet

$$\underline{W_{\text{mek}}} = \int_{P_1}^{P_2} \vec{F}_{\text{mek}} \cdot d\vec{l} = \int_{P_2}^{P_1} \vec{F} \cdot d\vec{l} = q \int_{P_2}^{P_1} \vec{E} \cdot d\vec{l} = q \int_{P_2}^{P_1} (-\nabla V) \cdot d\vec{l} =$$

$$= q \int_{P_2}^{P_1} -dV = \underline{q(V(P_2) - V(P_1))}$$

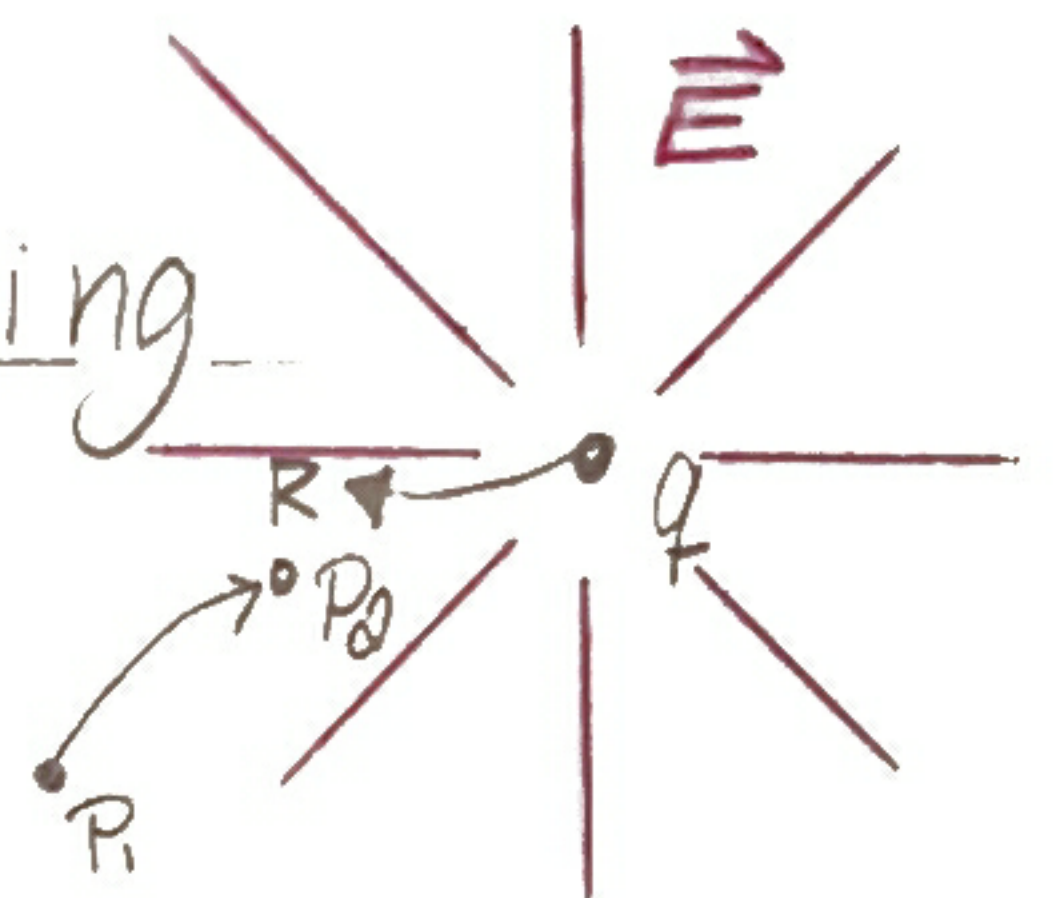
Nu löser vi ut & generaliserar

$$V(R) = \int_R^{R_{\text{ref}}} \vec{E} \cdot d\vec{l} + V(R_{\text{ref}}),$$

där $V(R_{\text{ref}})$ oftast är satt till 0.

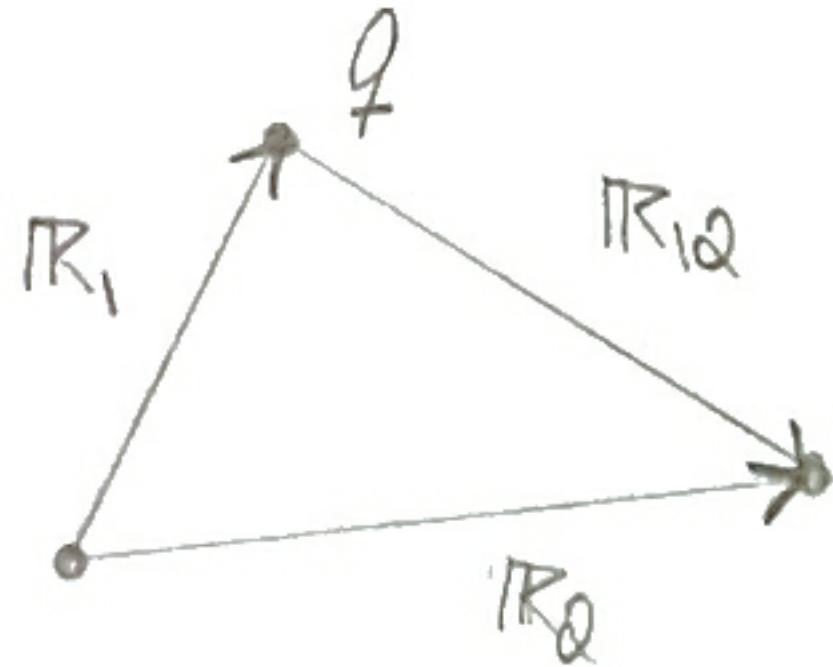
Beräkna potentialen från en punktladdning

Välj först $V(R_{\text{ref}}) = V(\infty) = 0$



Beräkna $V(\vec{r}) = \int_{\mathcal{R}} \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{R}}{R^2} \cdot \hat{R} d\mathcal{R} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R}$

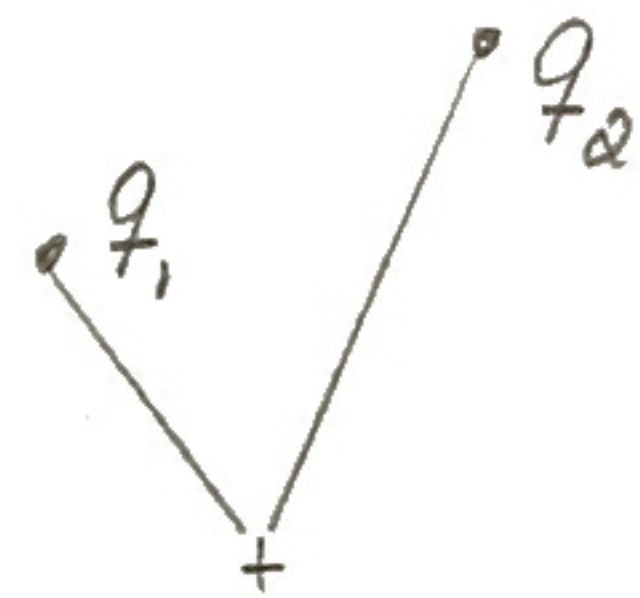
Generalisera



$V(R) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R}$, $|R_1| = R_2$

Superposition av många laddningar

Diskret $V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{k=1}^N \frac{q_k}{|R - R_k|}$

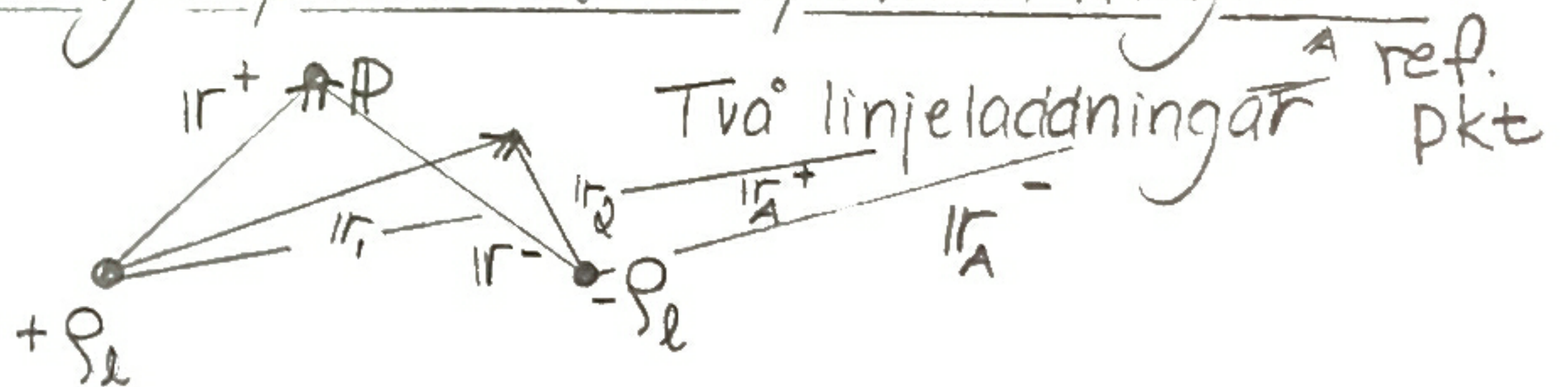
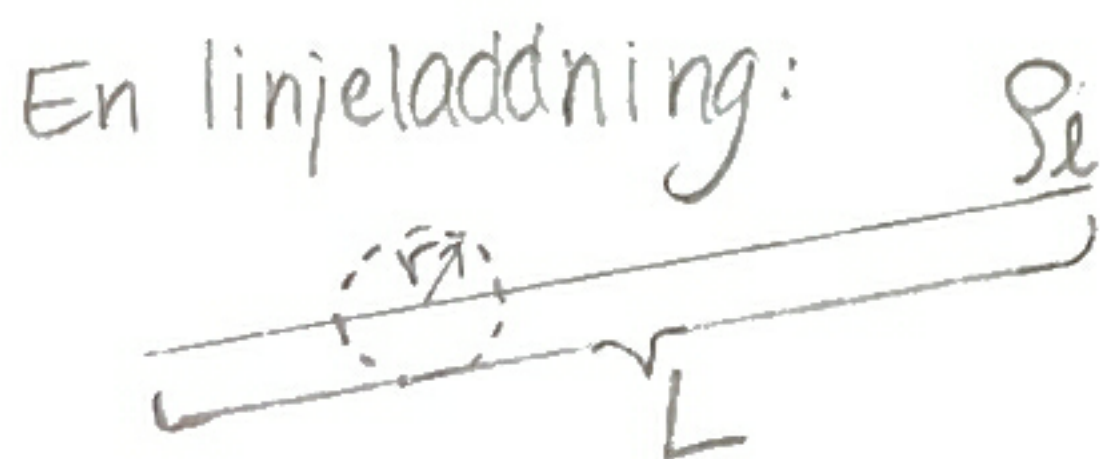


Kontinuerliga laddningsfördelningar

$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dQ}{R} = \{ \text{volym} \} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\vec{R})}{R} dV$, $R = |\vec{R} - \vec{R}'|$

Kolla ex 3.9 hemma.

Potentialen från två "långa" parallella linjeladdningar



$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = q/\epsilon_0$
 $E_r 2\pi L = \frac{\rho_L L}{\epsilon_0}$

E-fältet $\vec{E}_P = \vec{E}^+ + \vec{E}^- = \frac{\rho_L \hat{r}^+}{2\pi\epsilon_0 r^+} - \frac{\rho_L \hat{r}^-}{2\pi\epsilon_0 r^-}$

$\Rightarrow \vec{E}_r = \hat{r} E_r = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0 r}$

Zäkna ist med potentialen

$V(P) - V(A) = \int_P^A \vec{E} \cdot d\vec{r} = \dots$

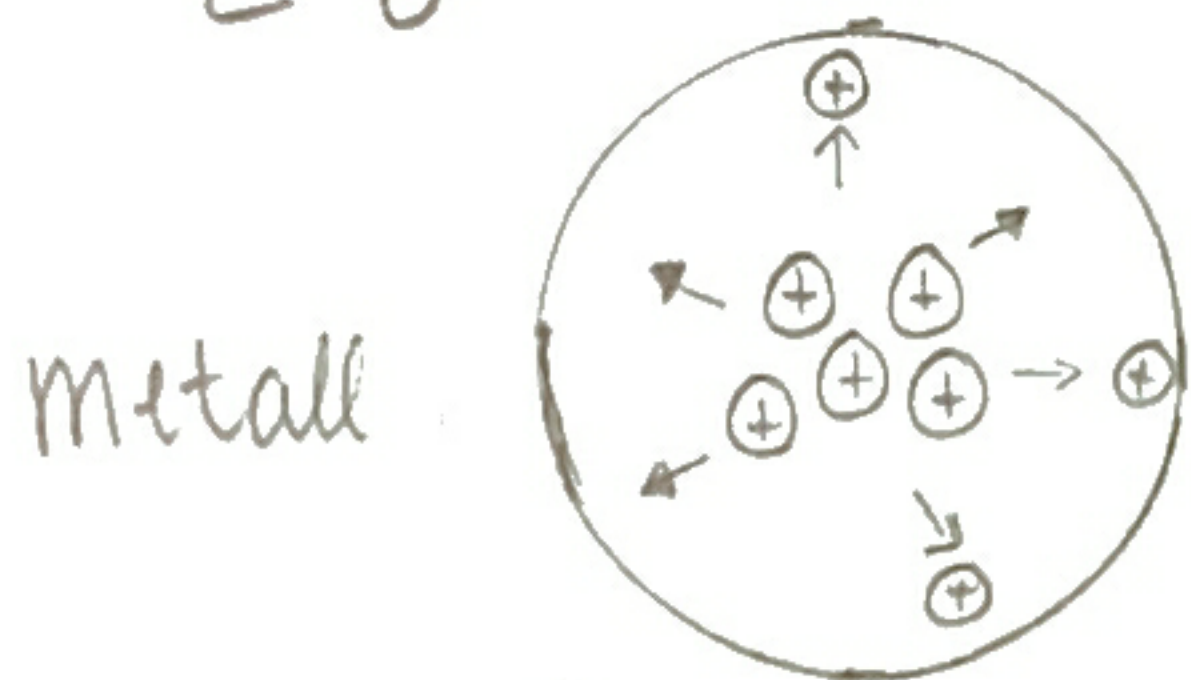
$$= \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0} \left[\int_{r^+}^{r_A^+} \frac{dr_1}{r_1} - \int_{r^-}^{r_A^-} \frac{dr_2}{r_2} \right] \quad \text{ty } \begin{cases} \hat{r}_2 \cdot d\vec{l} = -dr_2 \\ \hat{r}_1 \cdot d\vec{l} = dr_1 \end{cases}$$

$$= \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{r_A^+ r^-}{r_A^- r^+}\right). \quad \text{Låt nu } A \rightarrow \infty \text{ då } r_A^+ \approx r_A^-$$

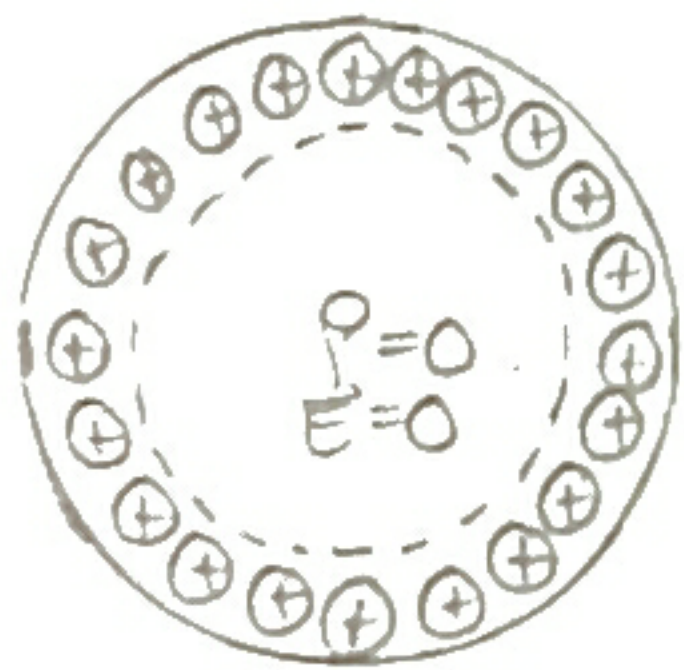
$$\Rightarrow V(p) = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{r^-}{r^+}\right).$$

Metaller i elektrostatiska fält, 3.6

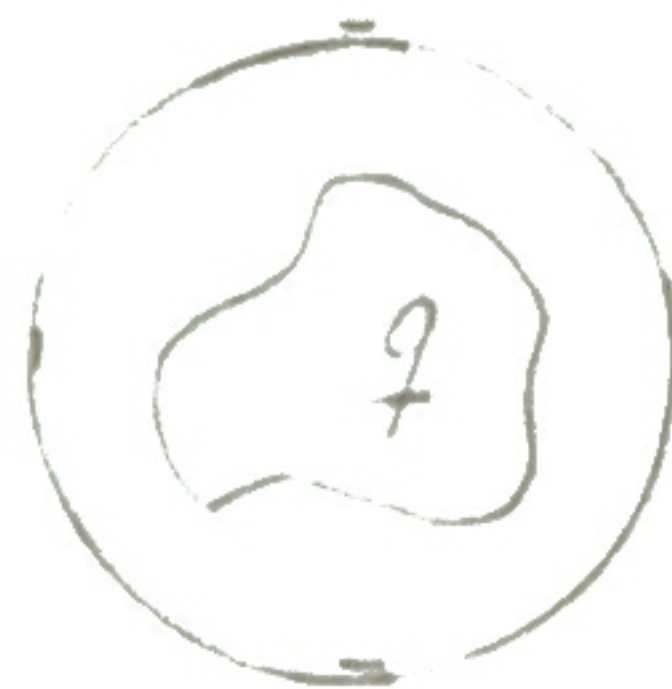
$$E=0$$



laddningar lägger sig på ytan eftersom de repellerar varandra
 I metallen $\rho=0$ & $\vec{E}=0$
 På ytan $\rho_s \neq 0$ & $\vec{E} \neq 0$

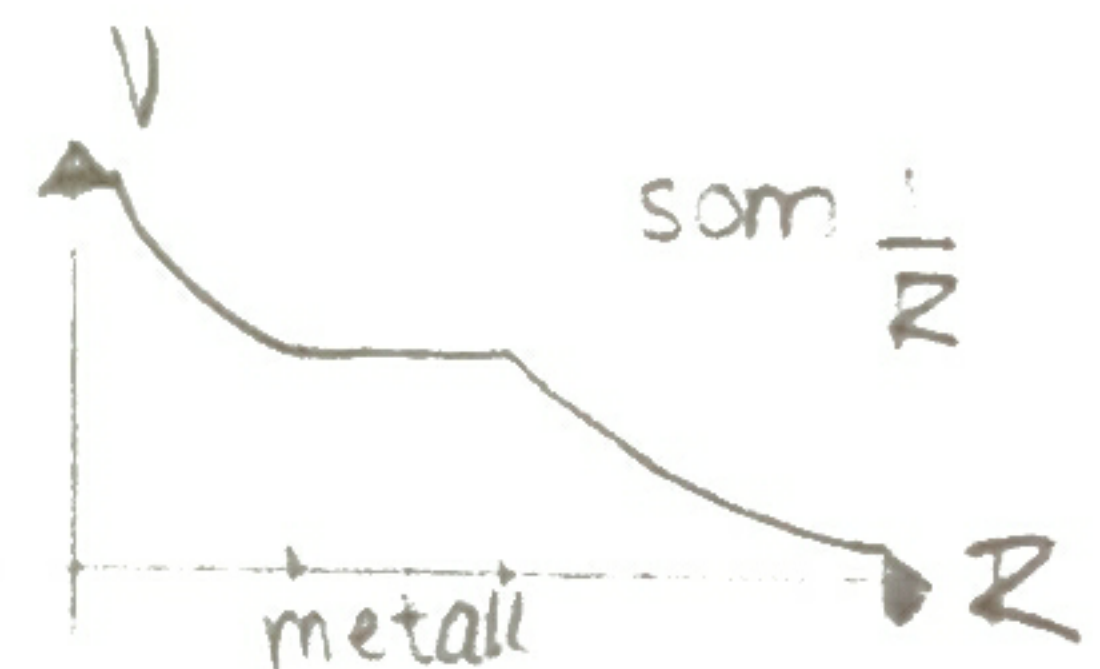
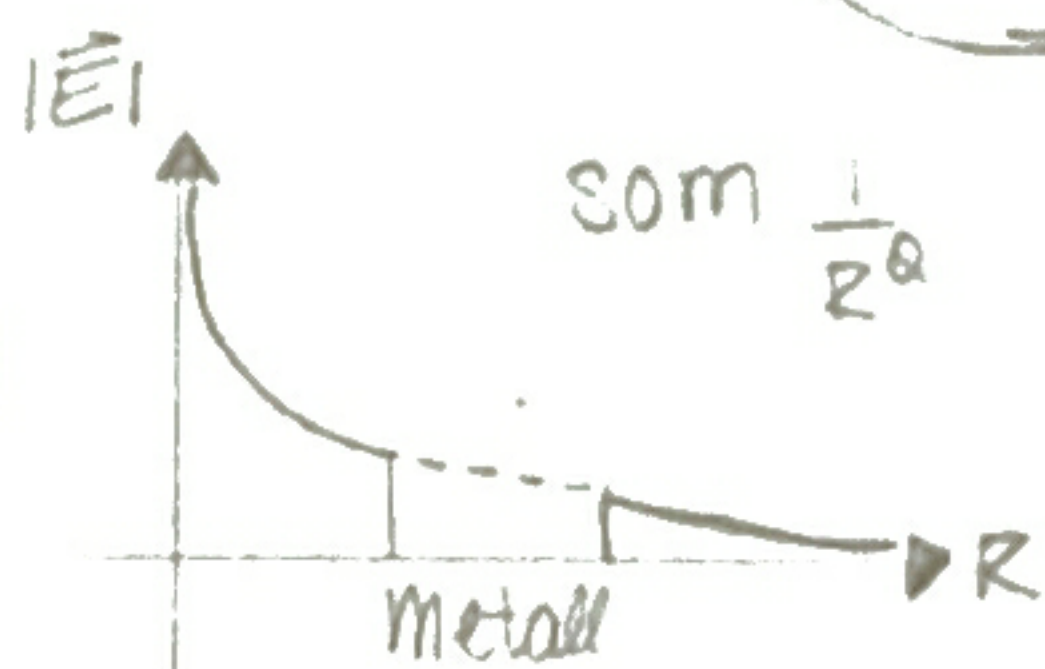
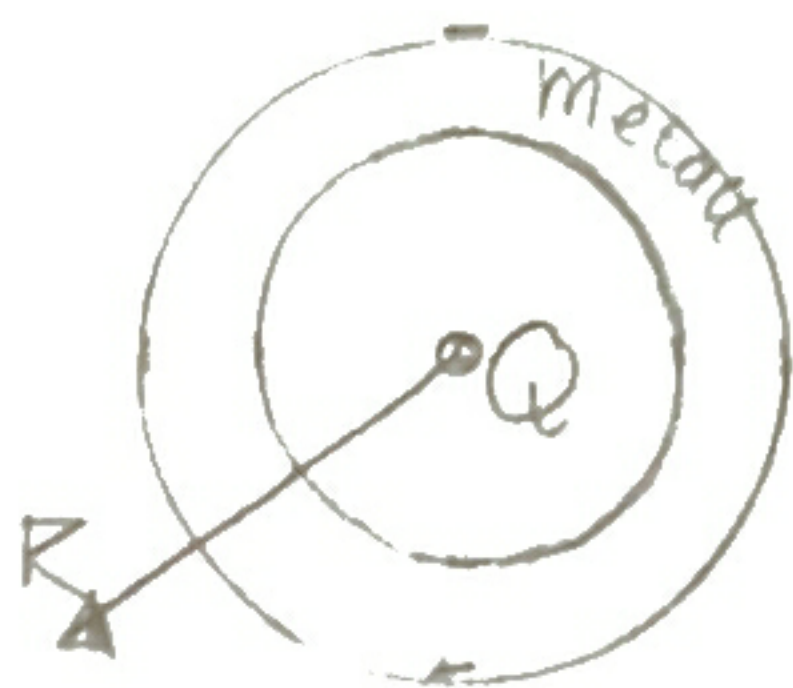


Gauss lag

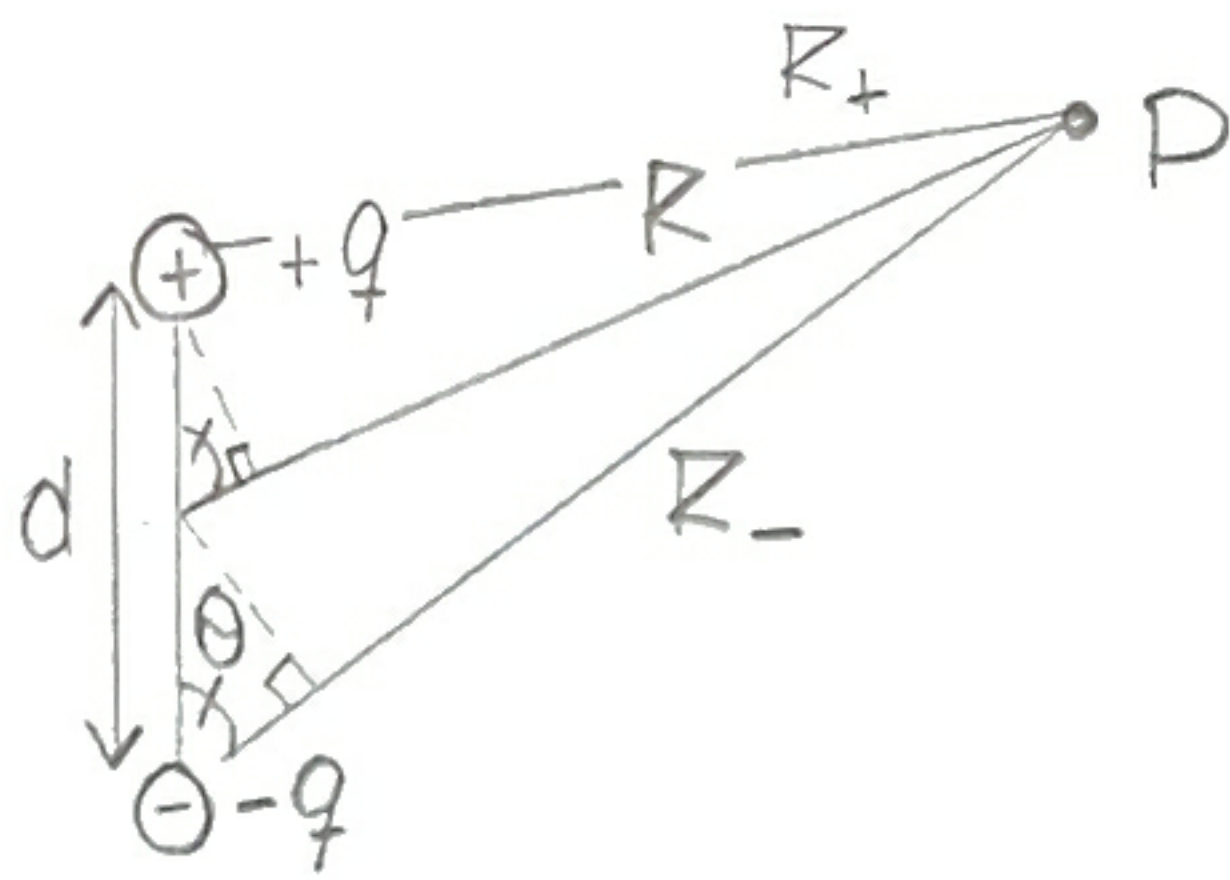


$$\int \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_0}$$

Ex 3.11



3/11 Den elektriska dipolen 3-3.1 & 3-5.1



Addera potentialer från två punktladdningar

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_+} - \frac{1}{R_-} \right)$$

$$d \ll R$$

Beskriv dipolen som

$$p = qd$$

$$\frac{1}{R_+} \approx \left(R - \frac{d}{2} \cos\theta \right)^{-1} \approx R^{-1} \left(1 + \frac{d}{2R} \cos\theta \right)$$

$$\frac{1}{R_-} \approx \left(R + \frac{d}{2} \cos\theta \right)^{-1} \approx R^{-1} \left(1 - \frac{d}{2R} \cos\theta \right)$$

$$\Rightarrow V = \frac{q d \cos\theta}{4\pi\epsilon_0 R^2} \quad \text{om } p = qd$$

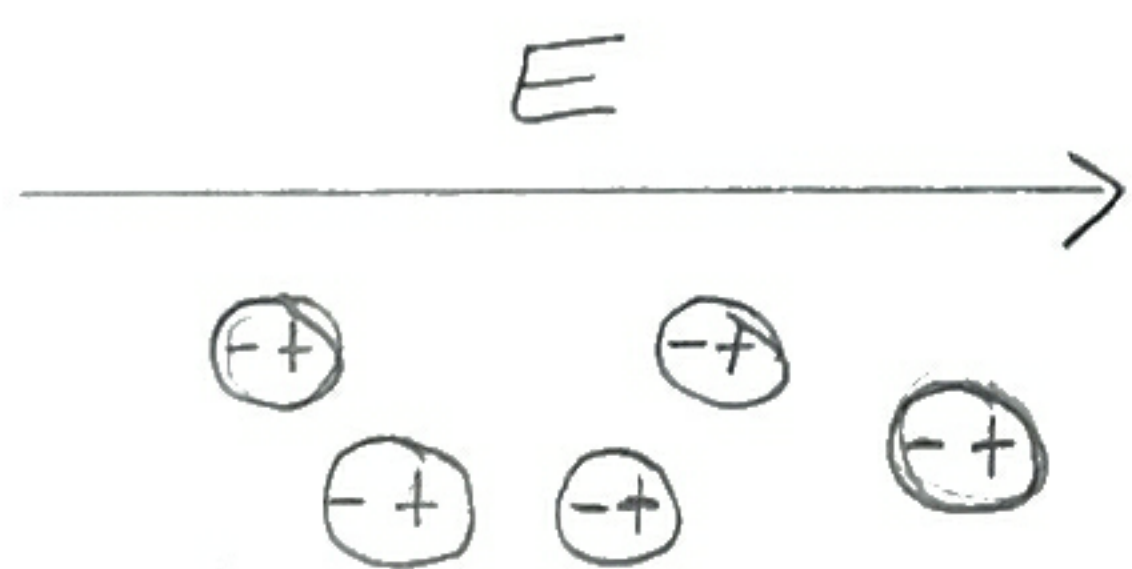
$$V = \frac{p \hat{R}}{4\pi\epsilon_0 R^2}$$

E-fältet

$$E = -\nabla V = -\hat{R} \frac{\partial V}{\partial R} - \hat{\theta} \frac{1}{R} \frac{\partial V}{\partial \theta}$$

$$= \frac{p}{4\pi\epsilon_0 R^3} (\hat{R} 2 \cos\theta + \hat{\theta} \sin\theta)$$

Dielektriska material i E-fält, 3-7



I ett E-fält: polariseras atomer

- dipoler bildas
- molekyler roterar

Definiera polarisationsfältet genom att summera dipolmoment

$$P = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\sum_{k=1}^N p_k}{\Delta V} \quad [C/m^2]$$

Potentialbidrag från materialet

Dipolmoment från dV' : $dp = P dV'$

$V' = \text{volym}$

Potentialbidrag från dV' : $dV = \frac{P \cdot \hat{R} dV'}{4\pi\epsilon_0 R^2}$

Integrera över volymen V'

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \frac{\mathbb{P} \cdot \hat{\mathbb{R}}}{R^2} dV'$$

Använd $\nabla' \left(\frac{1}{R} \right) = -\frac{\hat{\mathbb{R}}}{R^2} \Rightarrow V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \mathbb{P} \cdot \nabla' \left(\frac{1}{R} \right) dV'$

$\nabla' \cdot (f\mathbb{A}) = f \nabla' \cdot \mathbb{A} + \mathbb{A} \cdot \nabla' f$, $\mathbb{P} = \mathbb{A}$, $f = \frac{1}{R}$

Nu får vi $V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\int_{V'} \nabla' \cdot \left(\frac{\mathbb{P}}{R} \right) dV' - \int_{V'} \frac{\nabla' \cdot \mathbb{P}}{R} dV' \right] =$

{Divergenssatsen} $= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_{S'} \frac{\mathbb{P} \cdot \hat{\mathbb{n}}}{R} dS' + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} -\frac{\nabla' \cdot \mathbb{P}}{R} dV'$

$-\nabla' \cdot \mathbb{P} = \rho_p$
 $\mathbb{P} \cdot \hat{\mathbb{n}} = \rho_{ps}$
 $\rho = \text{polarisations t\u00e4thet}$

$Q_p = \oint_S \rho_{ps} dS + \int_V \rho_p dV = 0$ viktig egenskap hos material

F\u00f6rskjutningsf\u00e4ltet \mathbb{D} , 3-8

I n\u00e4rvaro av dielektrikum, $\nabla \cdot \mathbb{E} = \frac{1}{\epsilon_0} (\rho + \rho_p) = \frac{1}{\epsilon_0} (\rho - \nabla \cdot \mathbb{P})$

$\Rightarrow \nabla \cdot (\epsilon_0 \mathbb{E} + \mathbb{P}) = \nabla \cdot \mathbb{D} = \rho$

ρ fr\u00e4 laddning
 ρ_p bunden laddning

Postulatet i termer av \mathbb{D} : $\nabla \cdot \mathbb{D} = \rho$

P\u00e5 integralform $\oint \mathbb{D} \cdot d\mathbb{S} = Q$ total fr\u00e4 innesluten laddning

Samband mellan \mathbb{P} & \mathbb{E}

\mathbb{P} beror av \mathbb{E} som en icke-linj\u00e4r tensor.

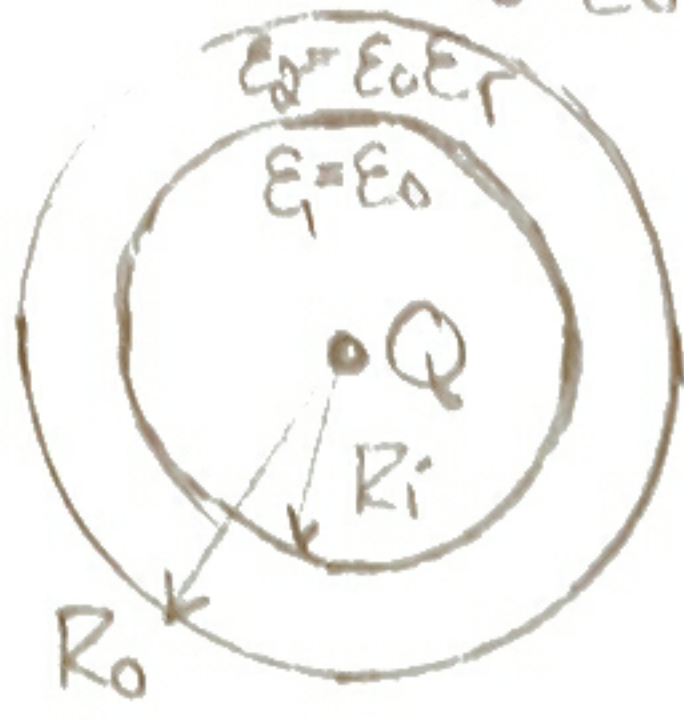
M\u00e5nga material kan beskrivas med linj\u00e4r proportionalitet

$\mathbb{P} = \epsilon_0 \chi_e \mathbb{E}$, $\chi_e = \text{elektrisk susceptibilitet}$

$\Rightarrow \mathbb{D} = \epsilon_0 (1 + \chi_e) \mathbb{E}$ $1 + \chi_e = \epsilon_r$

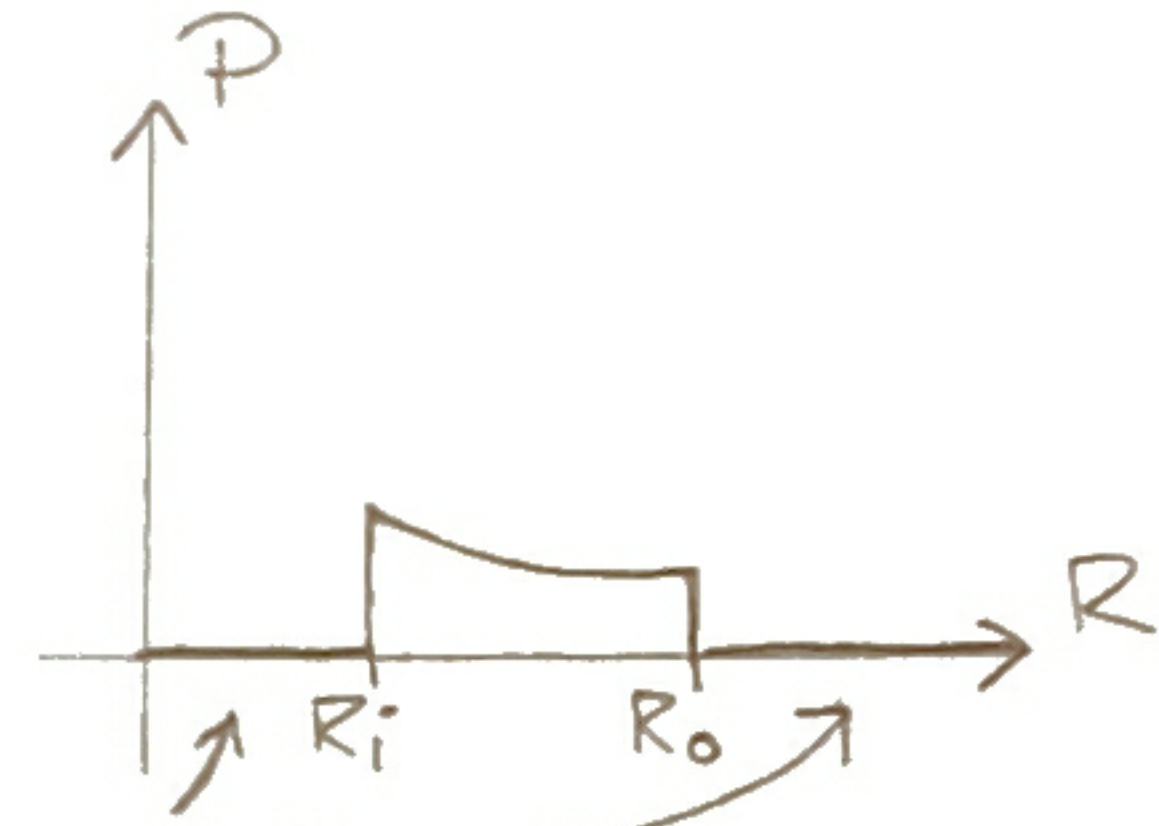
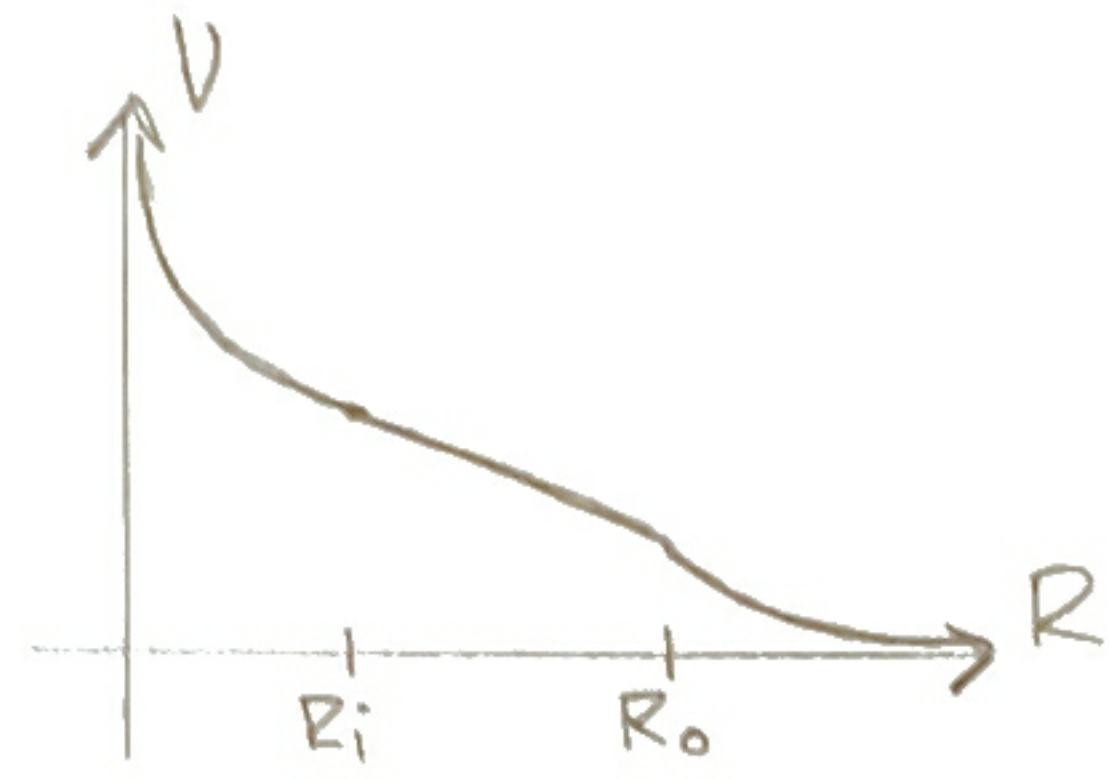
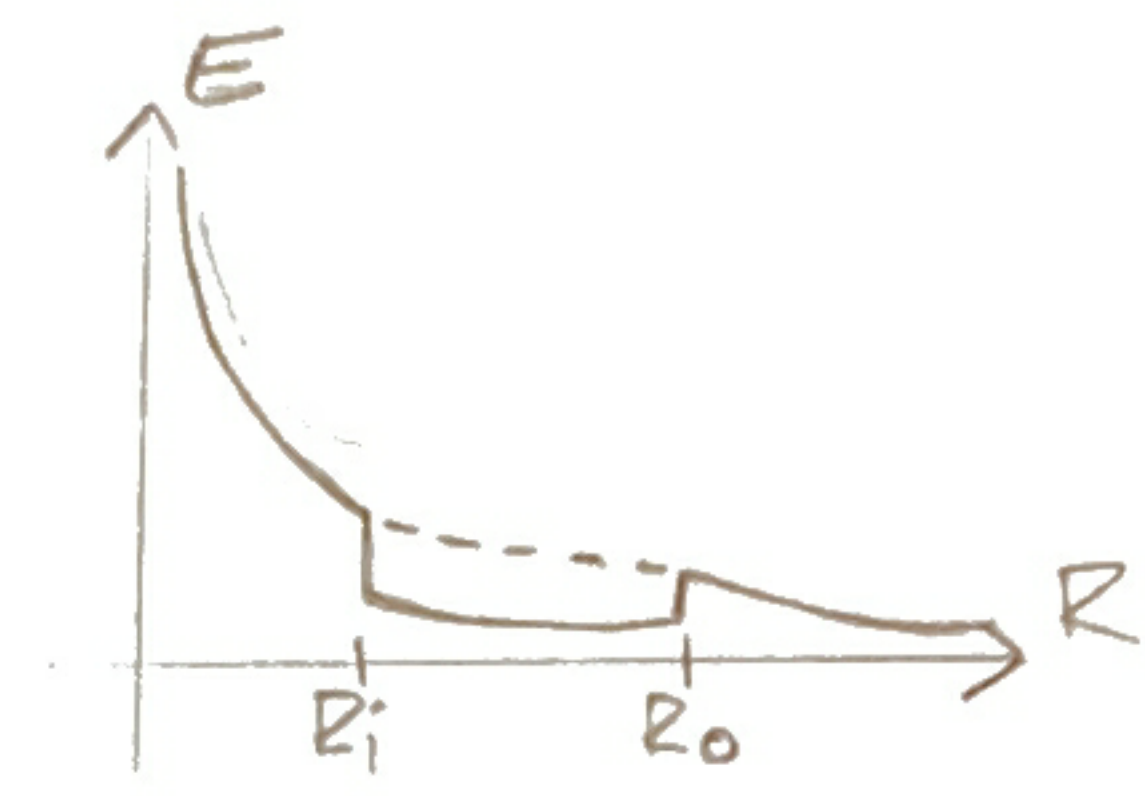
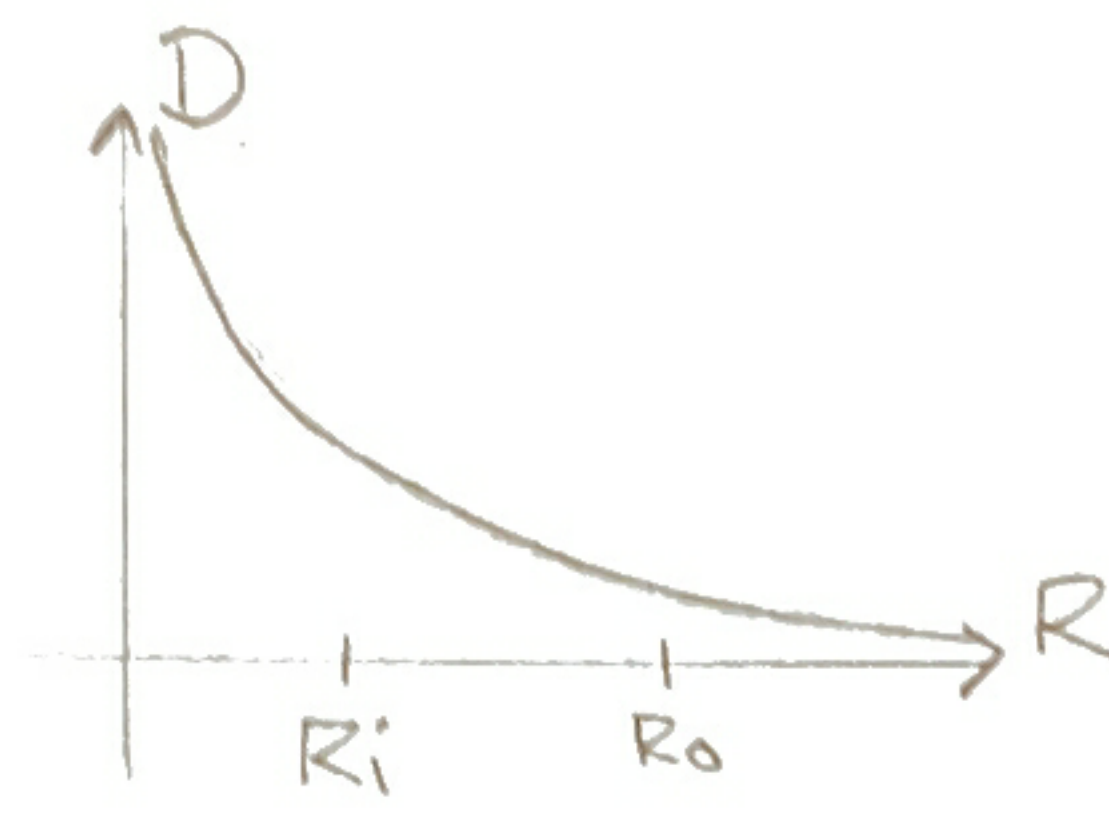
Ex 3.12

$$\epsilon_3 = \epsilon_0$$



$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \hat{\mathbf{R}}, \quad \epsilon_r = 1$$

$$\mathbf{D} = \frac{Q}{4\pi R^2} \hat{\mathbf{R}}$$



0 ty vakuum

Storgruppsövning 1/11

Övningsledare Tomas Rydholm

rum 7336 Edit, tomas.rydholm@chalmers.se

Finns även Måns.

Notation

Vektorer: tjocka \mathbf{E}

Komplexa storheter: $\overline{\mathbf{E}}$

Basvektorer: $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ Cartesiska

$\mathbf{a}_r, \mathbf{a}_\varphi, \mathbf{a}_z$ cylindriska

$\mathbf{a}_r, \mathbf{a}_\theta, \mathbf{a}_\varphi$ sfäriska $0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$

Fältpunkter: \mathbf{r}

Källpunkter: \mathbf{r}'

Gauß sats: $\int_V \nabla \cdot \mathbf{E} dV = \oint_{\partial V} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$

Stokes sats: $\int_S (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{S} = \oint_{\partial S} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}$

Grundläggande elektrostatik

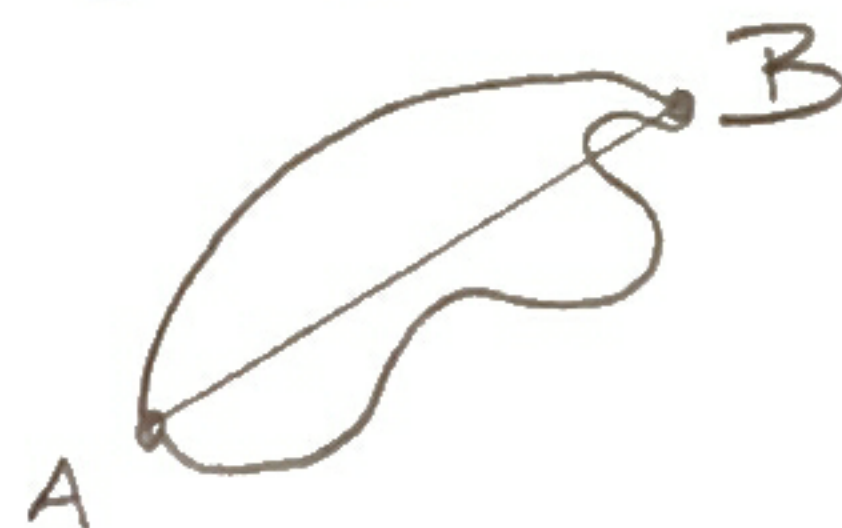
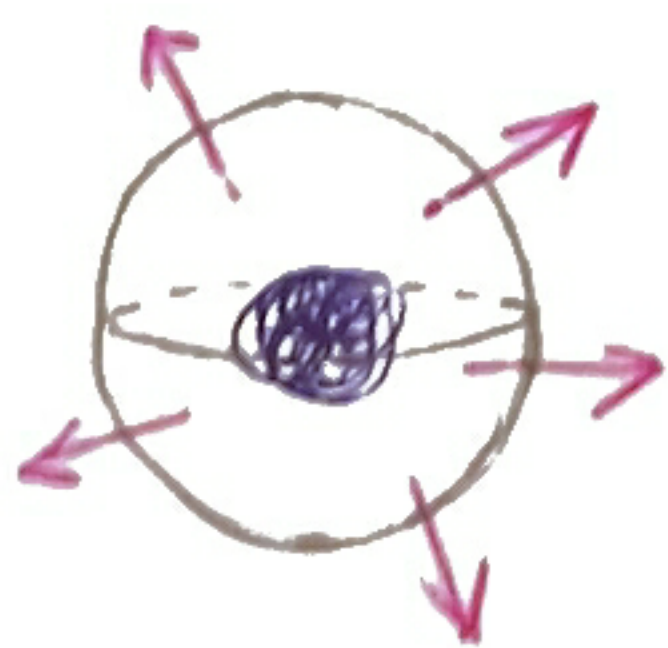
$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho_v / \epsilon_0, \quad \epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ As/Vm}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0$$

All elektrostatik utgår ifrån dessa lagar!

$$\Rightarrow \oint_{\partial V} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q_{\text{inne}}}{\epsilon_0}, \quad Q_{\text{inne}} = \text{total innesluten laddning i volymen.}$$

$$\text{Gauß lag } \int \nabla \times \mathbf{E} = 0$$



Fält från punktladdning

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \hat{a}_R$$

Beräkna E-fältet

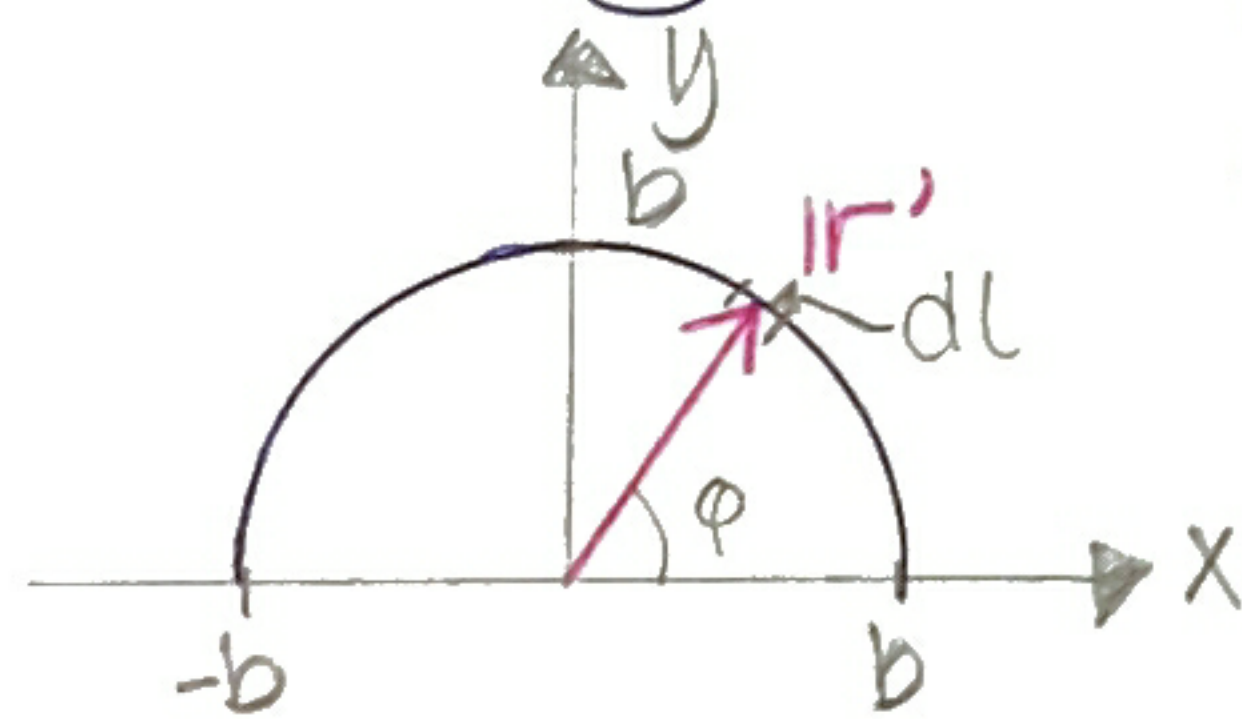
Superposition: fungerar alltid men kan vara svårt.

Gauß lag: kräver symmetrier samt konstant fält på integrationsytan.

¶ 3.8 En linjeladdning med uniform densitet ρ_L i xy -rymden, bildar en halvcirkel med radie b .

Beräkna magnitud & riktning för E-fältet i mitten av ledaren.

Lösning



Undersöker i origo, $r = \vec{0}$, $|r'| = b$

Fält från punktladdning q : $E = \frac{q(r-r')}{4\pi\epsilon_0 |r-r'|^3}$

Laddning för enhetselement dl :
 $dq = \rho_L dl$

E-fält från enhetselement:

$$dE = \frac{dq (r-r')}{4\pi\epsilon_0 |r-r'|^3} = \frac{\rho_L dl (-b) \hat{a}_r}{4\pi\epsilon_0 b^3} = -\frac{\rho_L dl}{4\pi\epsilon_0 b^2} \hat{a}_r$$

Byter koordinater

$$\hat{a}_r = \hat{x} \cos \varphi + \hat{y} \sin \varphi$$

$$\hat{a}_\varphi = -\hat{x} \sin \varphi + \hat{y} \cos \varphi$$

$$\hat{a}_z = \hat{z}$$

$$d\mathbf{E} = \frac{\rho_L dL}{4\pi\epsilon_0 b^2} (\cos\varphi (-\hat{x}) + \sin\varphi (-\hat{y})), \quad dL = b d\varphi$$

Integrera alla bidrag längs kurvan $0 \leq \varphi \leq \pi$

$$\begin{aligned} \mathbf{E} = \int d\mathbf{E} &= \int_0^\pi d\varphi \frac{\rho_L}{4\pi\epsilon_0 b} (-\hat{x}\cos\varphi - \hat{y}\sin\varphi) = \frac{\rho_L}{4\pi\epsilon_0 b} [-\hat{x}\sin\varphi + \hat{y}\cos\varphi]_0^\pi = \\ &= -\frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0 b} \hat{y} \end{aligned}$$

P 3.11 En sfärisk fördelning av laddningar

$$\rho = \rho_0 \left(1 - \frac{R^2}{b^2}\right)$$

existerar i regionen $0 \leq R \leq b$. Koncentriskt omges fördelningen av ett ledande skal med inre radie R_i & yttre R_o , där $R_i > b$.

Bestäm \mathbf{E} överallt

Lösning

2D-bild



Sfäriskt symmetriskt \Rightarrow Gauss bra!

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\int \nabla \cdot \mathbf{E} dV = \frac{Q_{innet}}{\epsilon_0} = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$$

\mathbf{E} -fältet är mer eller mindre riktat $\Rightarrow \nabla \times \mathbf{E} = 0$

$$\rightarrow \begin{cases} dS = R^2 \sin\theta \\ \mathbf{E} = E(R) \hat{r} \end{cases} \rightarrow \int_0^\pi \int_0^{2\pi} d\theta d\varphi E(R) R^2 \sin\theta = \frac{Q_{innet}}{\epsilon_0}$$

$$V.L. = E(R) R^2 [\varphi]_0^{2\pi} [\cos\theta]_0^\pi = E(R) 4\pi R^2$$

I: Integrera ρ_0 från $0 \leq R' \leq R$.

$$\frac{Q_{innet}}{\epsilon_0} = \int_V dV \frac{\rho_0(R)}{\epsilon_0} = \int_0^R dR' \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi R'^2 \sin\theta \frac{\rho_0}{\epsilon_0} \left(1 - \frac{R'^2}{b^2}\right)$$

$$\frac{Q_{\text{inne}}}{\epsilon_0} = 4\pi \frac{\rho_0}{\epsilon_0} \left(\frac{R^3}{3} - \frac{R^5}{5b^2} \right)$$

$$V.L. = H.L. \Rightarrow E(R) = \frac{\rho_0}{\epsilon_0} \left(\frac{R}{3} - \frac{R^3}{5b^2} \right)$$

II: All laddning mellan $0 \leq R' \leq b$

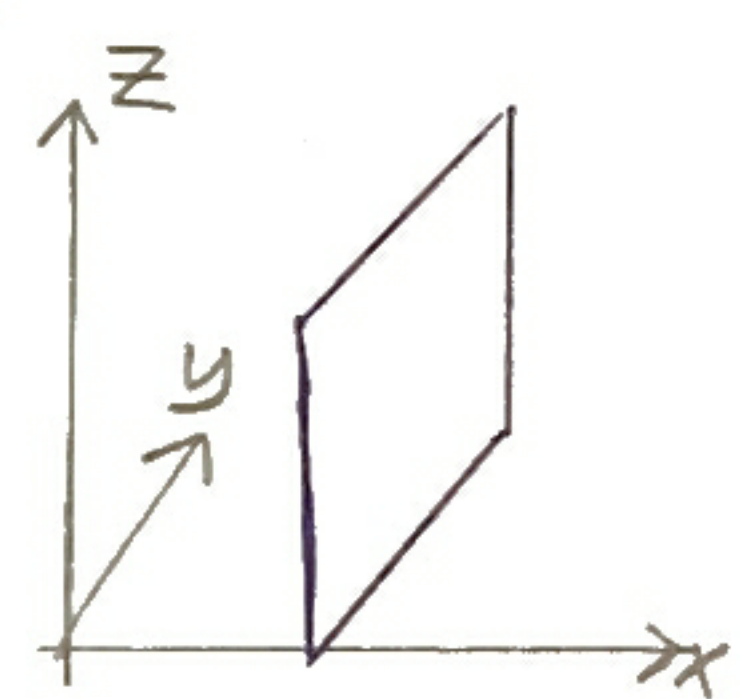
$$\frac{Q_{\text{inne}}}{\epsilon_0} = 4\pi \frac{\rho_0}{\epsilon_0} \frac{2b^3}{15} \Rightarrow E(R) = \frac{\rho_0}{\epsilon_0} \frac{2b^3}{15R^2}$$

III: Ledande skal $E(R) = 0$

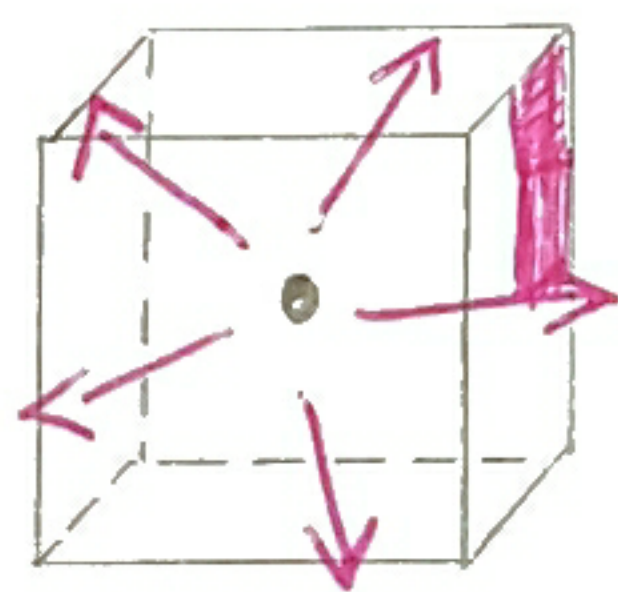
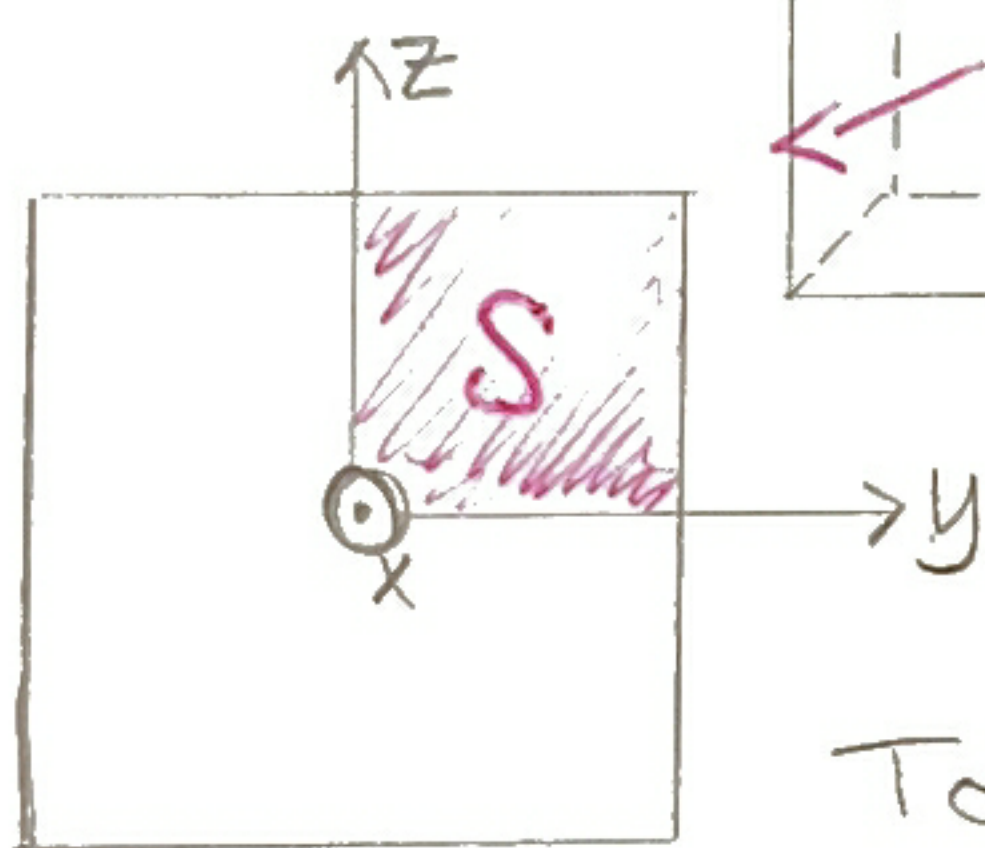
IV: Samma som i II, $E(R) = \frac{\rho_0}{\epsilon_0} \frac{2b^3}{15R^2}$

2.6 En punktladdning q i origo.

Beräkna elektriska fluxen (flödet) $\Psi = \int_S \epsilon_0 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$ genom ytan S som är en kvadrat med hörn $\vec{r} = (a, 0, 0), (a, a, 0), (a, a, a)$ & $(a, 0, a)$



Lösning



Teckna en kub med sidan $2a$ och laddningen q i mitten.

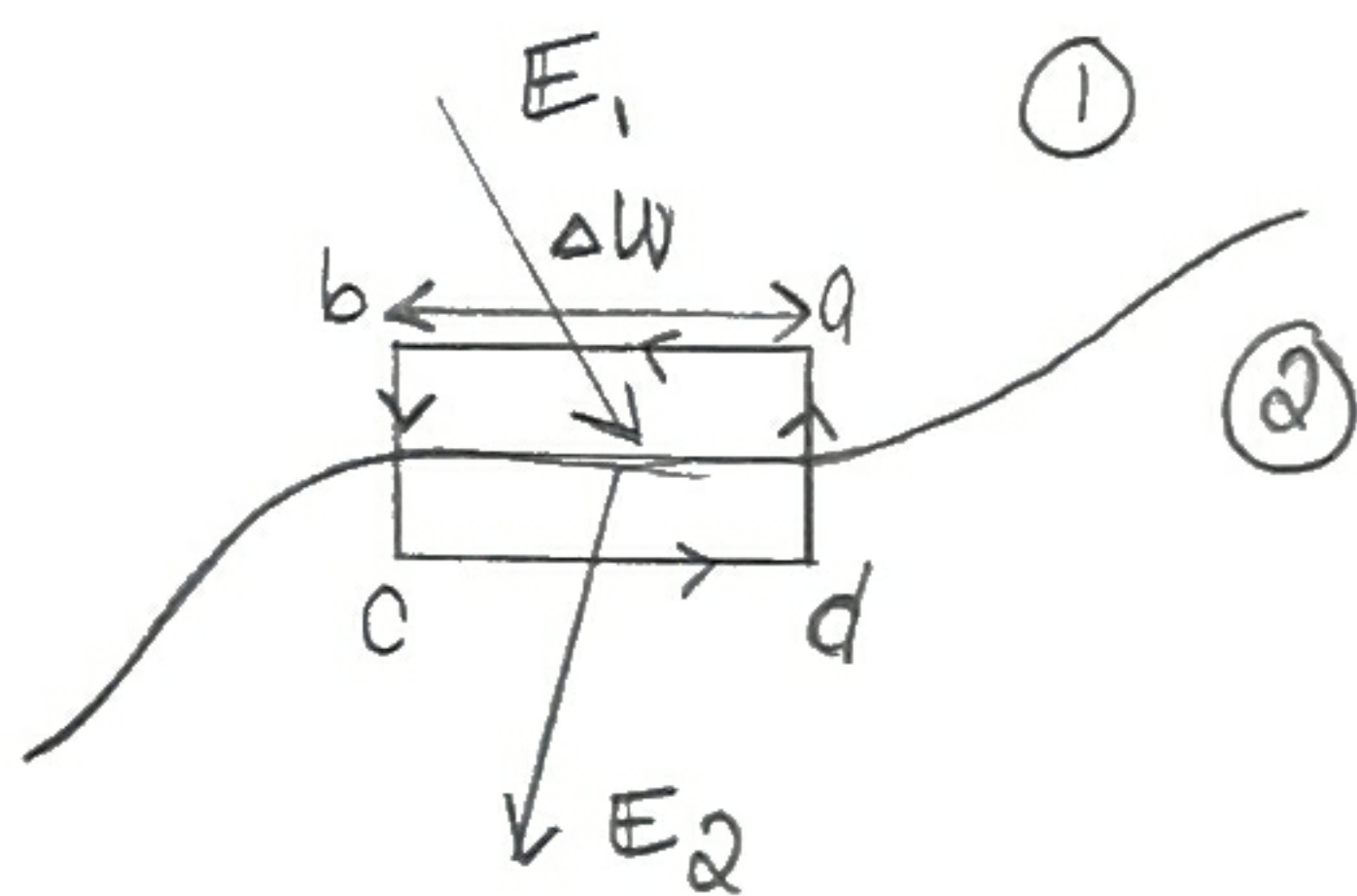
Fluxet genom varje yta måste vara lika stort.

Totala fluxet genom varje kvadrant måste vara lika.

$$\Psi = \frac{\Psi_{\text{tot}}}{24}, \quad \Psi_{\text{tot}} = \oint_{\partial V} \epsilon_0 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = q$$

$$\Rightarrow \Psi = \frac{q}{24}$$

7/11 Randvillkor, kap 3-9

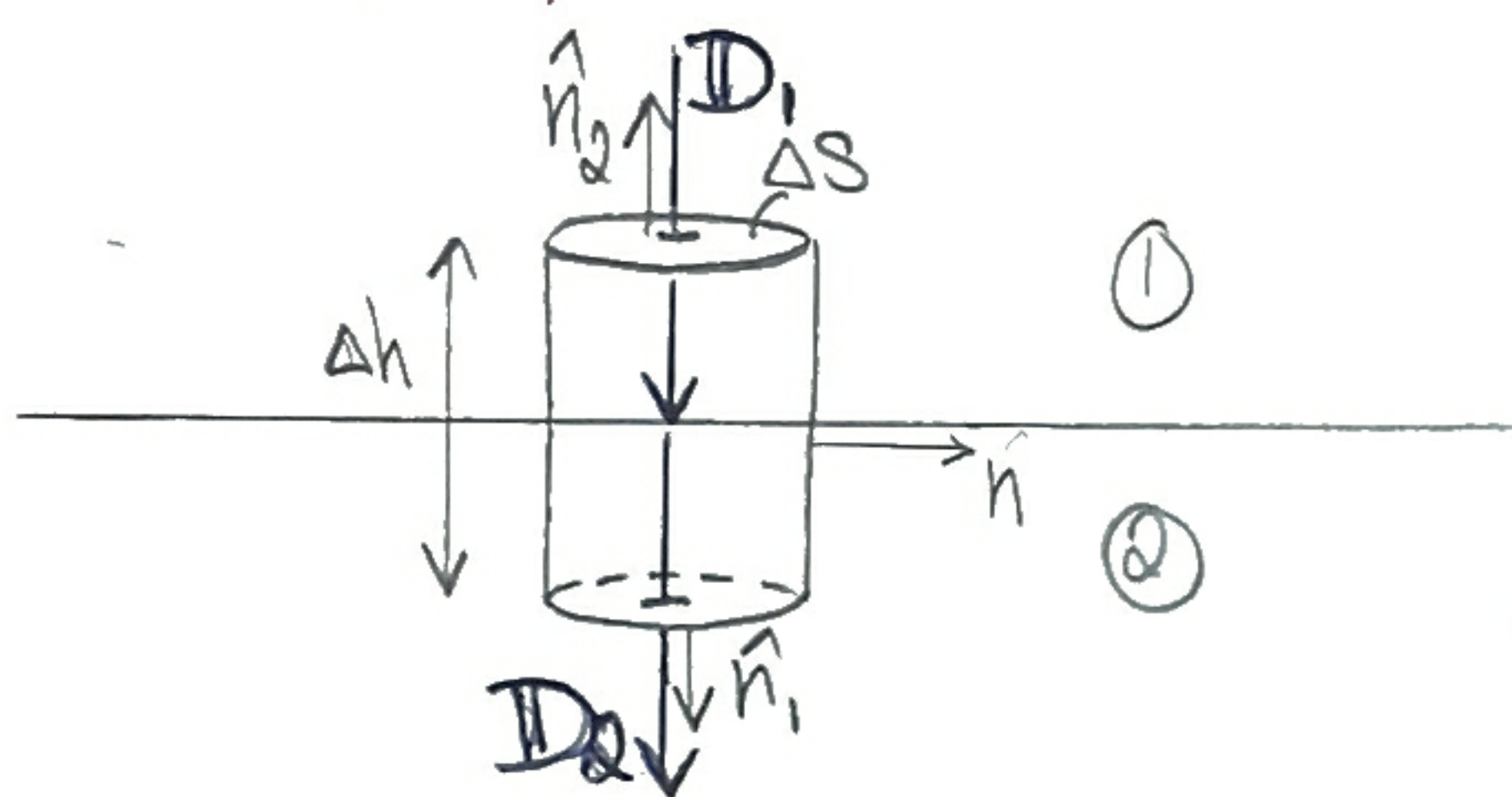


$$0 = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = E_{1t} \Delta w - E_{2t} \Delta w$$

abceda

$$\Rightarrow E_{1t} = E_{2t} \text{ tangentiella fält}$$

Normalkomponenten



$$\oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = (\mathbf{D}_1 \cdot \hat{n}_2 + \mathbf{D}_2 \cdot \hat{n}_1) \Delta S =$$

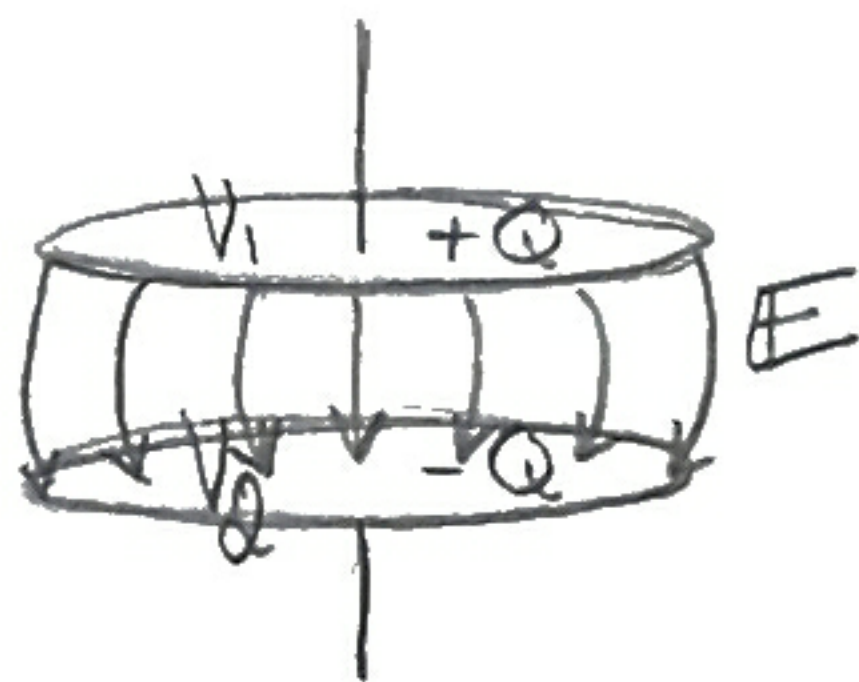
$$= \hat{n}_2 \cdot (\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2) \Delta S = \rho_s \Delta S$$

$$\Rightarrow (\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2) \cdot \hat{n}_2 = D_{1n} - D_{2n} = \rho_s$$

Kapacitans 3-10 (ef 3-10.2, 3-10.3)

Def: $C = \frac{Q}{V}$. Kapacitans är ett mått på ett systems förmåga att lagra laddning.

Kan även def. för system med enskilda ledare, $V_\infty = 0$



$$C = \frac{Q}{V_1 - V_2}$$

Beräkningsgång

Alt 1: 1) Placera $\pm Q$ på ledarna

2) Beräkna \mathbf{E} från Q

3) Beräkna $V_2 = V_1 - V_2 = \int_1^2 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$

4) Bilda $C = \frac{Q}{V_1 - V_2}$

- Alt 2:
- 1) Antag V_1 & V_2
 - 2) Finn $V(R)$ mellan plattorna
 - 3) Beräkna $E = -\nabla V$
 - 4) Beräkna $Q_1 = \oint_{S_1} \epsilon E \cdot dS$
 - 5) Bilda $C = \frac{Q_1}{V_{12}}$

~~Elektrostatisk energi~~

Elektrostatisk energi, 3-11

Elektrostatisk energi = arbete som går åt för att bygga upp ett system. (laddningsfördelning)

Elektrostatisk energi alternativ härledning.

$$W_1 = Q \cdot 0, \quad \text{inget fält}$$

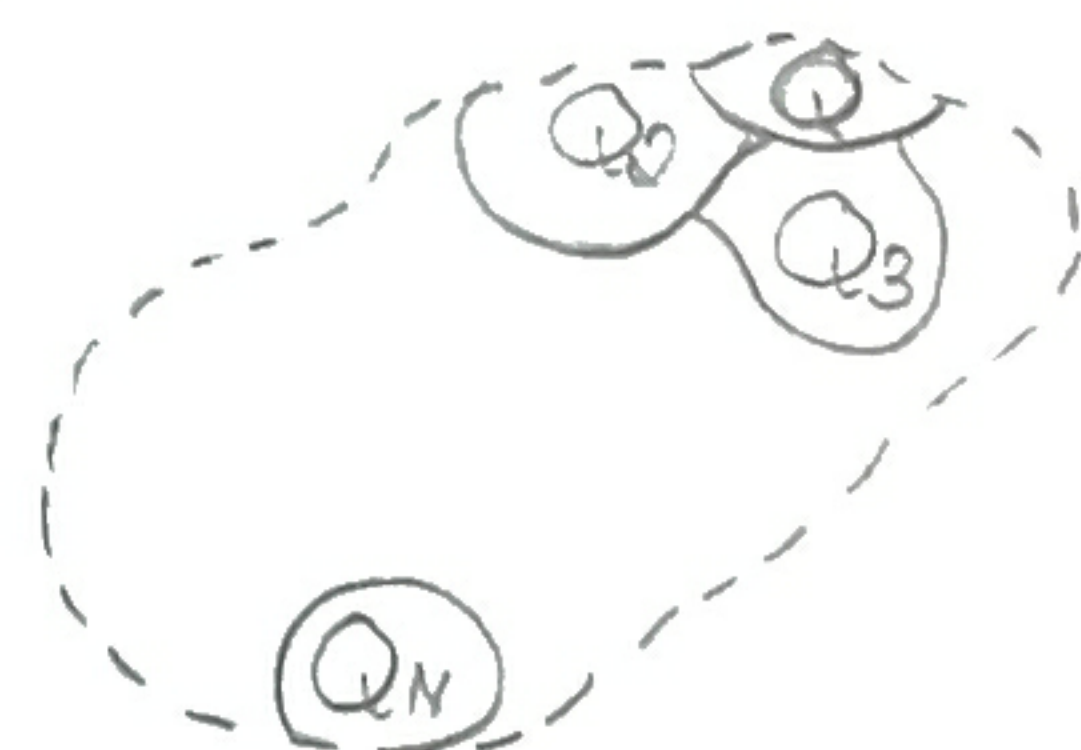
$$W_2 = Q_2 \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 R_{21}}, \quad \text{fält från } Q_1$$

$$W_3 = Q_3 \left(\frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 R_{31}} + \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 R_{32}} \right)$$

⋮

$$W_N = \frac{Q_N}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q_1}{R_{N1}} + \frac{Q_2}{R_{N2}} + \dots + \frac{Q_{N-1}}{R_{N(N-1)}} \right)$$

$$\text{Totalt arbete: } W_e = \sum_{k=1}^N W_k$$



Börja med Q_N

$$W'_N = Q_N \cdot 0$$

$$W'_{N-1} = Q_{N-1} \left(\frac{Q_N}{4\pi\epsilon_0 R_{N-1,N}} \right)$$

$$W'_1 = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q_N}{R_{1N}} + \dots + \frac{Q_2}{R_{12}} \right)$$

$$W_e = \sum_{k=1}^N W'_k$$

$$\text{Summera: } 2 W_e = \sum_{k=1}^N (W_k + W'_k) = Q_1 V_1 + Q_2 V_2 + \dots + Q_N V_N$$

$$\Rightarrow W_e = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N Q_k V_k,$$

V_k = potentialen, från alla andra laddningar, i punkten k .

Kallas egentligen ömsesidig energi, då det går åt energi till att bygga upp pkt laddn.

Generaliserar

$$V_k \rightarrow V(\mathbf{R}), \quad Q_k \rightarrow \rho(\mathbf{R}) dV, \quad \sum_{k=1}^N \rightarrow \int_V$$

$$W_e = \frac{1}{2} \int_{V'} V(\mathbf{R}) \rho(\mathbf{R}) dV' \quad \text{totalenergi}$$

Exempel hemma: 3-24 (energi i kondensator)

Alternativ form på energi

$$W_e = \frac{1}{2} \int_{V'} V(\mathbf{R}) \rho(\mathbf{R}) dV' = \frac{1}{2} \int_{V'} V(\nabla \cdot \mathbb{D}) dV' =$$

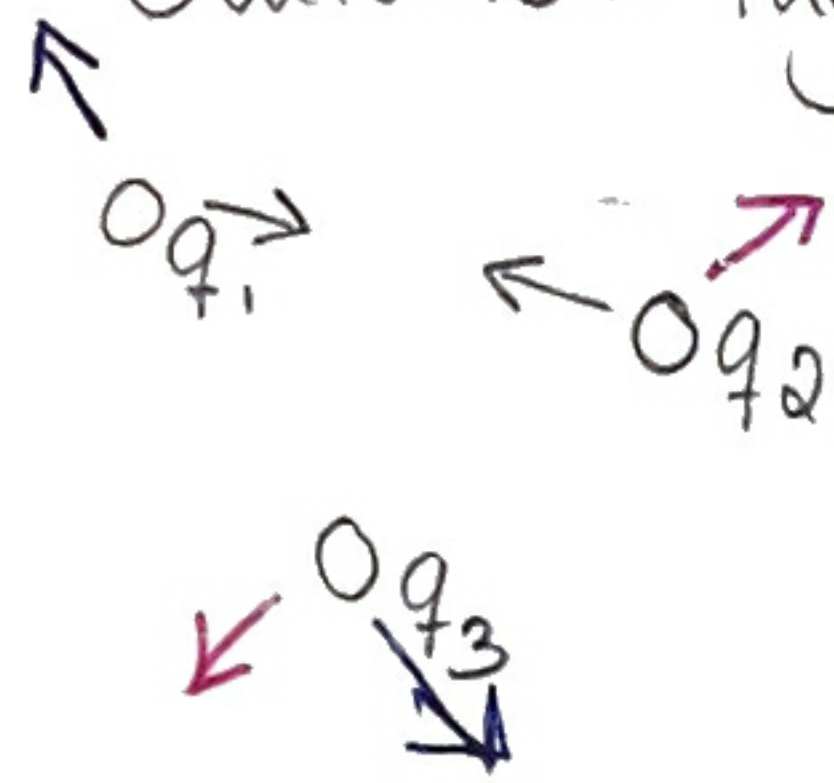
$$\{\nabla \cdot (V\mathbb{D}) = V(\nabla \cdot \mathbb{D}) + \mathbb{D} \cdot \nabla V\} = \frac{1}{2} \int_{V'} (\nabla \cdot (V\mathbb{D}) - \mathbb{D} \cdot \nabla V) dV' =$$

$$= \frac{1}{2} \oint_{S'} V\mathbb{D} \cdot dS' + \frac{1}{2} \int_{V'} \mathbb{D} \cdot \mathbb{E} dV' \quad \text{lika}$$

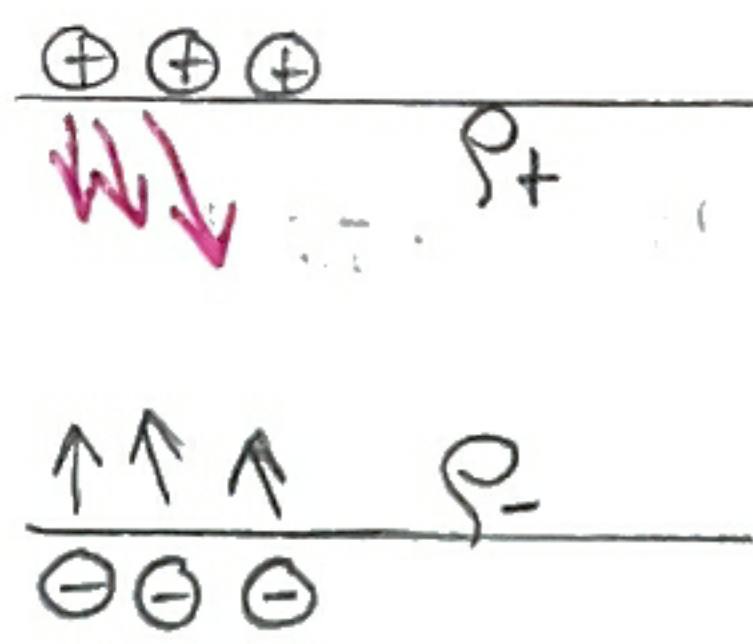
$\begin{array}{ccc} S' \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \underbrace{R} & \underbrace{R^0} & \underbrace{R^0} \\ \Rightarrow 0, R \rightarrow \infty \end{array}$

10/11 Energimetoden för kraftberäkning 3-11.2

Coulombs lag



Kondensator



också Coulomb

Istället för Coulombs lag, relatera energiändringen till kraft.

- ① System av kroppar med fix laddning.
- ② System av kroppar med fix potential.

Ser först på ① i mer detalj.

Isolerat system där kropparna har viss laddning som är konstant. Om systemet förändras så utförs mekaniskt arbete,

$$dW = \vec{F}_Q \cdot d\vec{l} \quad (\text{systemet utför}).$$

Mekaniskt arbete sker på bekostnad av elektrostatisk energi

$$dW = -dW_e = \vec{F} \cdot d\vec{l}.$$

Energi i systemet före: $W_e = \frac{1}{2} \sum Q_k V_k$

efter förflyttning: $W_e' = \frac{1}{2} \sum Q_k (V_k + dV_k)$

Kap. 2, ekv. 2.88: $dW_e = \nabla W_e \cdot d\vec{l} \Rightarrow -\nabla W_e \cdot d\vec{l} = \vec{F}_Q \cdot d\vec{l} \Rightarrow \underline{-\nabla W_e = \vec{F}_Q}$

Som exempel: $-\frac{\partial W_e}{\partial x} = F_{Qx}$, $dW_e = W_e' - W_e$.

Betraktar nu ②.

$$\vec{F}_V = \nabla W_e$$

Lös ex 3-27 hemma!

Poissons ekvation & Laplace, 4-2

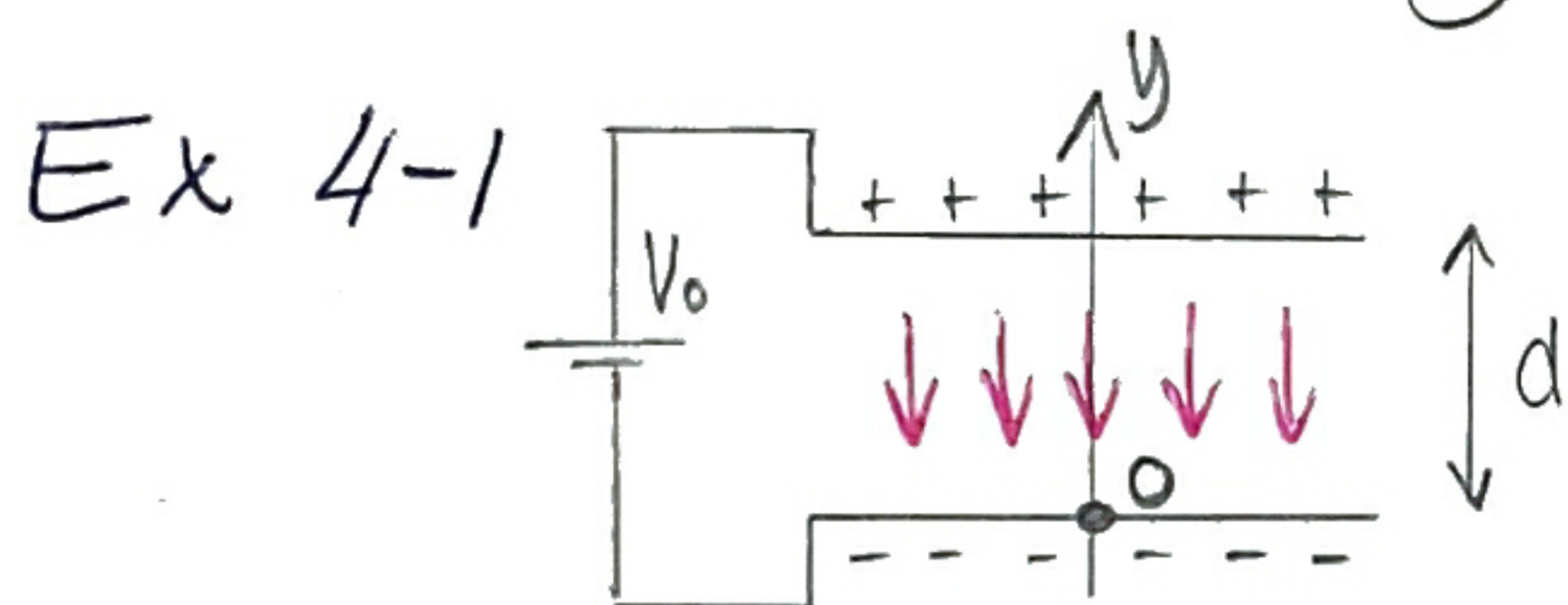
Utgå från postulaten: $\nabla \cdot \mathbb{D} = \rho \Rightarrow \nabla \cdot (\epsilon \mathbf{E}) = \rho$

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \Rightarrow \mathbf{E} = -\nabla V$$

$$\Rightarrow \nabla \cdot (\epsilon \nabla V) = -\rho$$

Om ϵ konstant i rummet, $\epsilon(r) = k$, så är materialet homogent, $\Rightarrow \nabla^2 V = -\rho/\epsilon$ Poisson

I områden utan laddning $\Rightarrow \nabla^2 V = 0$ Laplace



• mellan plattorna $\frac{d^2 V}{dy^2} = 0$, Laplace

$$\text{Lös } V = C_1 y + C_2, \quad y=0 \Rightarrow V=0$$

$$y=d \Rightarrow V=V_0$$

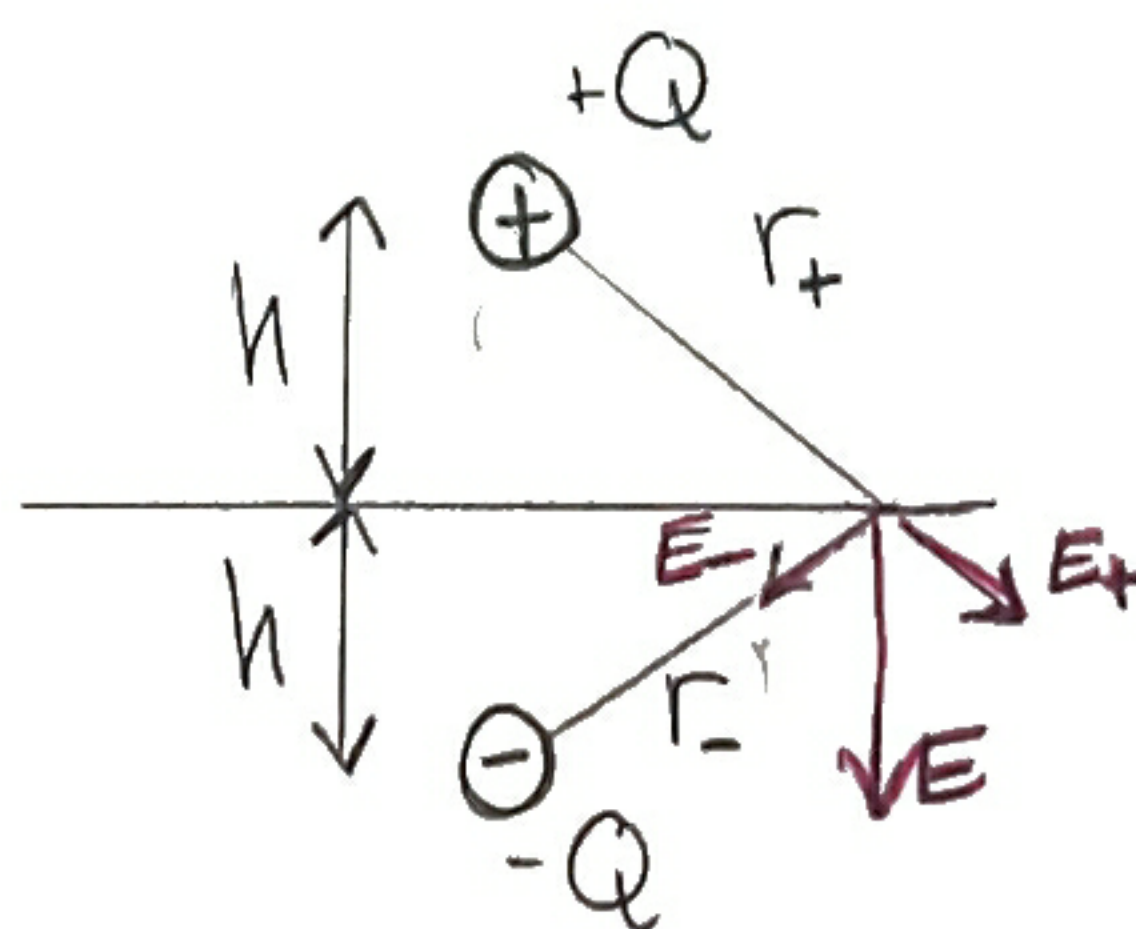
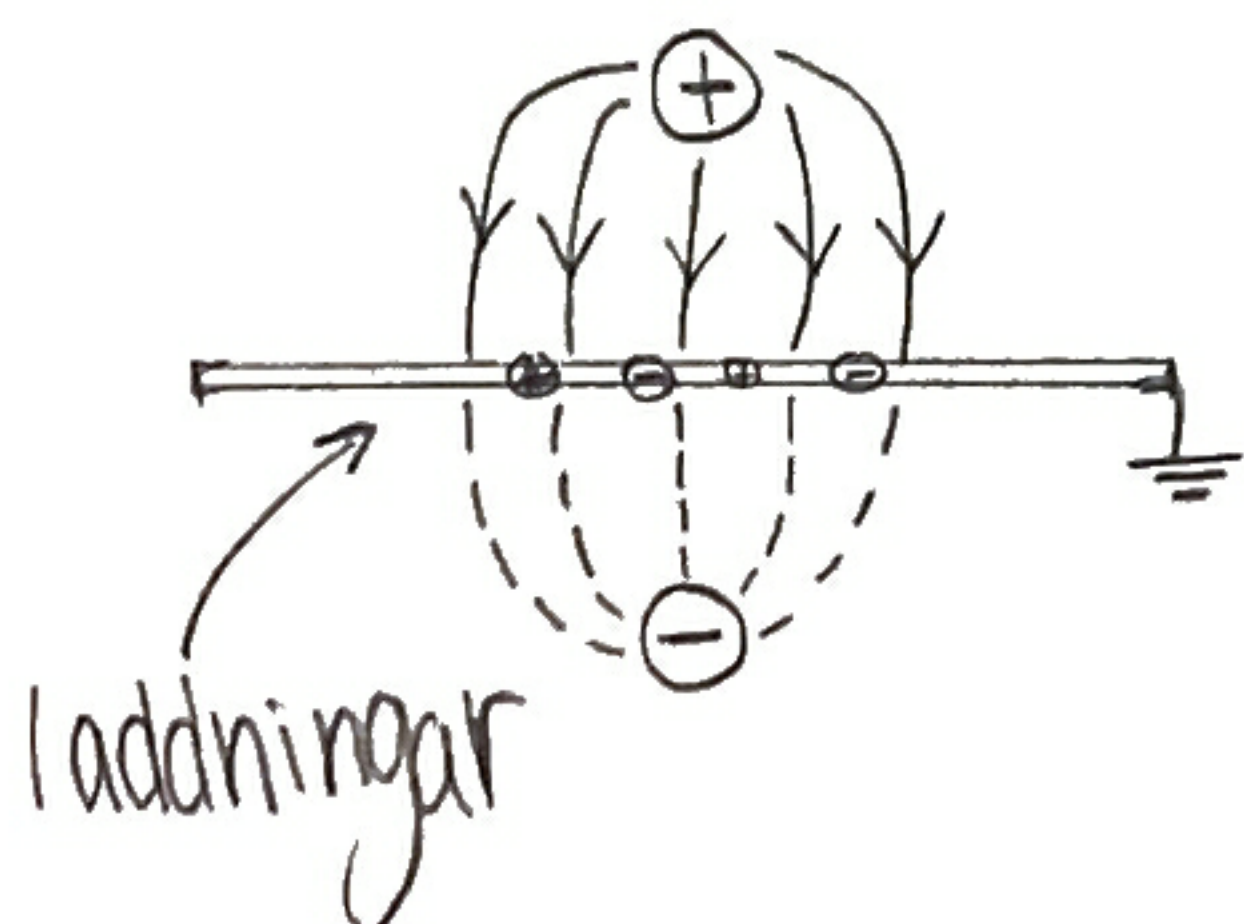
$$\Rightarrow V = \frac{V_0 y}{d} \quad \text{randvillkor}$$

$$\Rightarrow \mathbf{E} = -\nabla V = -\frac{\partial V}{\partial y} \hat{y} = -\frac{V_0}{d} \hat{y}$$

Entydighetssatsen, 4-3

Med givna randvillkor är lösningen till Poissons ekv. entydig.

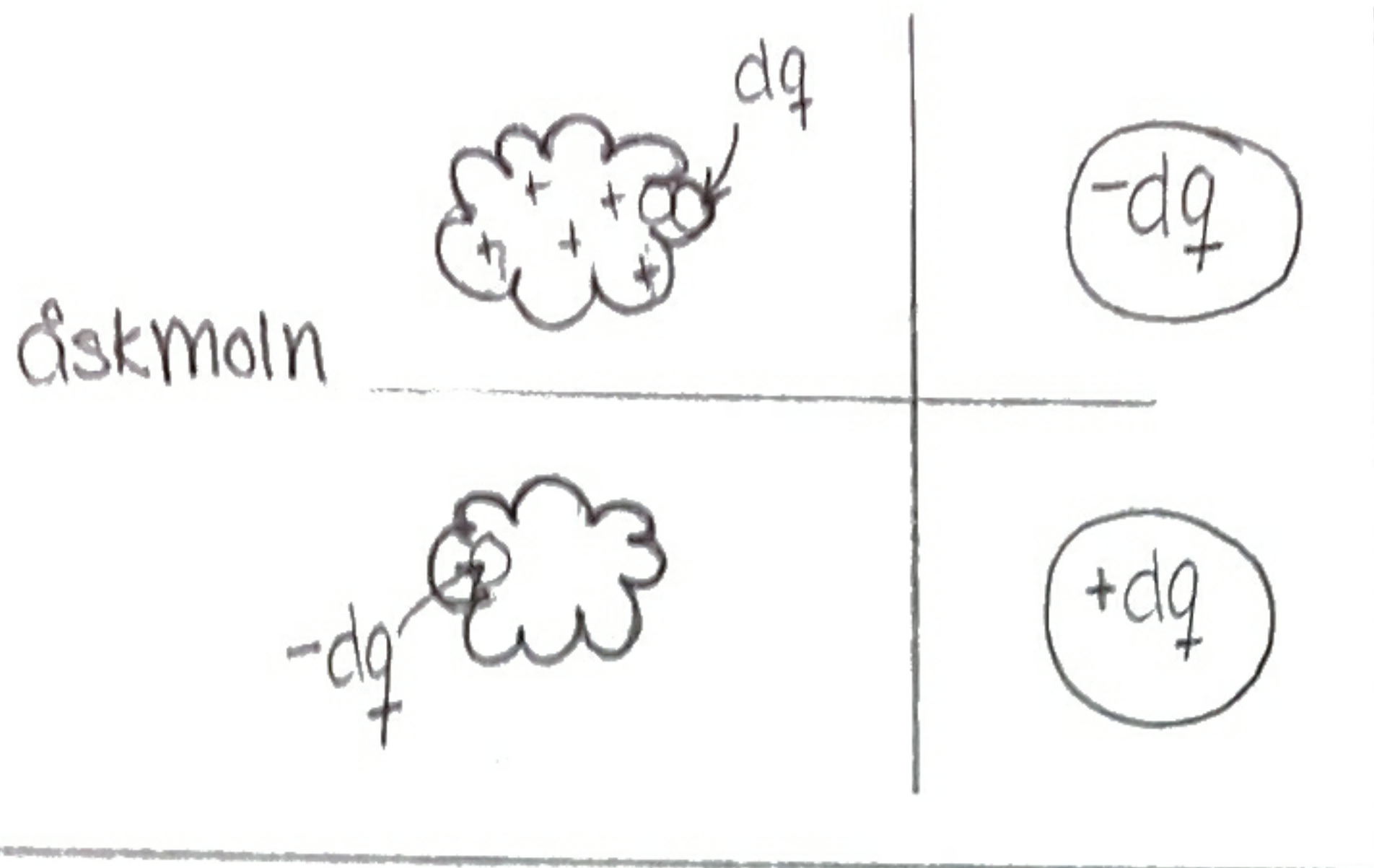
Speglingsmetoden, 4-4



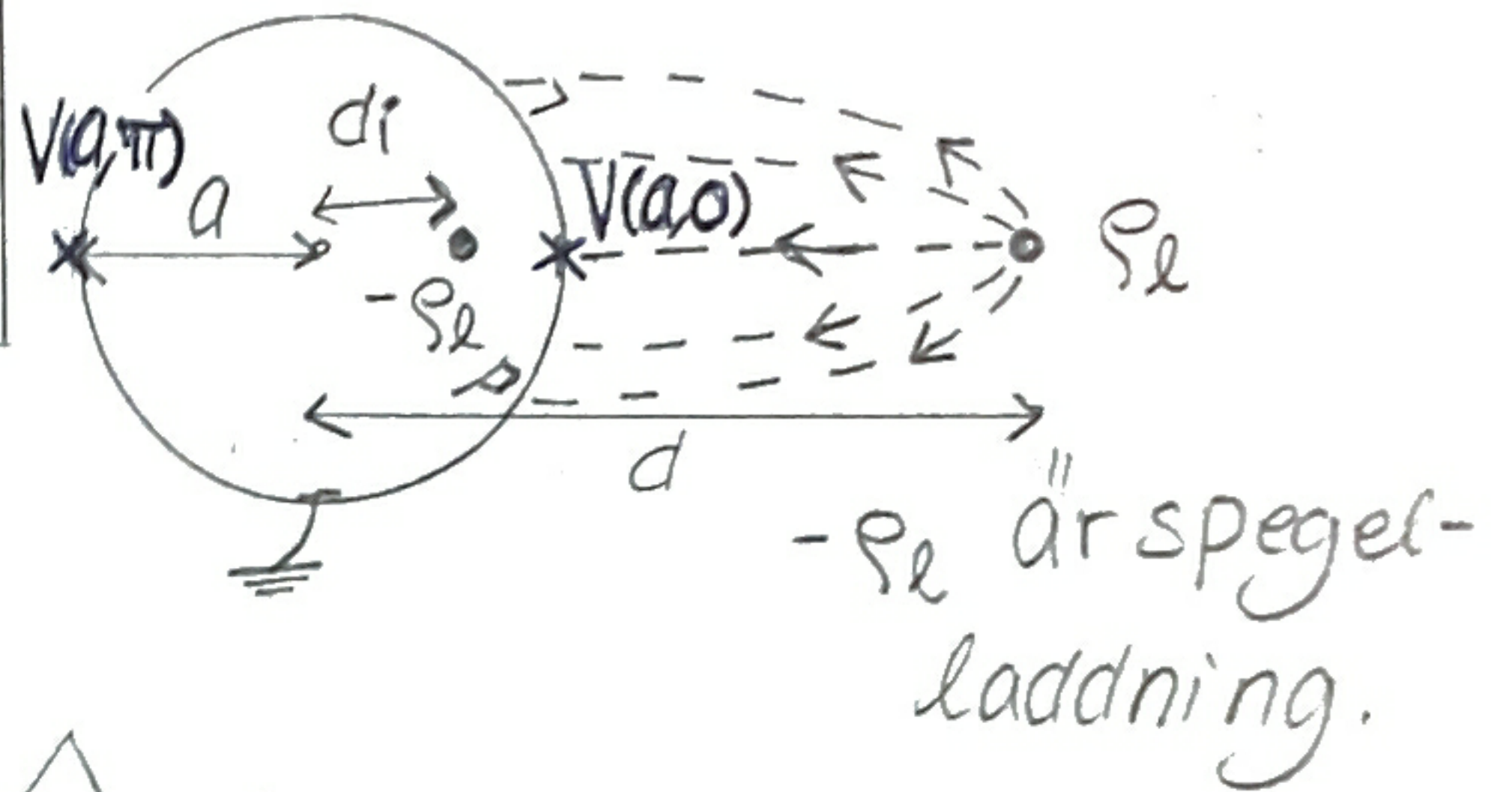
i planet

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_+} + \frac{-Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_-} = 0$$

pga $r_+ = r_-$



Parallella linjeladdningar
utanför ledande cylinder



Vi har sedan tidigare

$$V(r, \phi) = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r^-}{r^+}$$

$$V_{cyl} = V(a, 0) = V(a, \pi) = k \cdot \begin{array}{c} r^- \\ \diagup \quad \diagdown \\ -\rho_l \quad +\rho_l \\ \diagdown \quad \diagup \\ r^+ \end{array}$$

$$V_{cyl} = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{a-d_i}{d-a} = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{a+d_i}{d+a} \Rightarrow \frac{a-d_i}{d-a} = \frac{a+d_i}{d+a}$$

$$\Rightarrow d_i = \frac{a^2}{d}$$

Storgruppsövning 7/11

Måns Larsson, mans.larsson@chalmers.se

Potential

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0$$

$$\nabla \times (\nabla V) = 0$$

$$\mathbf{E} = -\nabla V$$

V = elektrisk potential

$$V_2 - V_1 = -\int_{P_1}^{P_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$



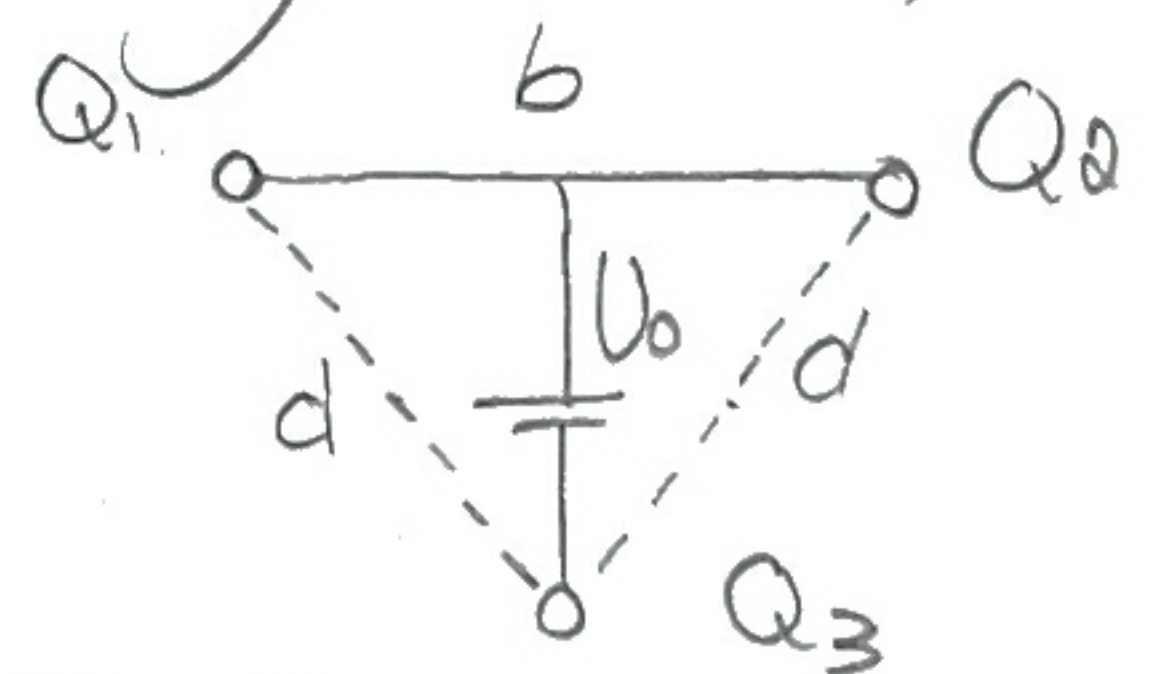
Potential från en **punktladdning**

$$V_R - V_\infty = V_R = -\int_{\infty}^R \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2} dR = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R}$$

Potentialen från en **linje-yt- eller volym-laddning** kan fås genom att integrera över punktbidrag

$$dV = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 R}, \quad V = \int dV$$

2.16 Tre tunna, långa, raka, parallella ledare (längd L , radii a) ligger placerade på avstånd b & d ifrån varandra. 1 & 2 kopplas till pluspolen av en spänningskälla U_0 , 3 kopplas till minuspolen.



Beräkna laddningen på ledarna.

Lösning Symmetri $\Rightarrow Q_1 = Q_2 = Q \Rightarrow P_1 = P_2 = Q/L$
 $Q_3 = -(Q_1 + Q_2) = -2Q \Rightarrow P_3 = -2Q/L$

Antag ledarna oändligt långa.

Gauss lag $\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q_{in}}{\epsilon_0}$

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \int_{z=0}^L \int_{\theta=0}^{2\pi} E_r \cdot \mathbf{a}_r \cdot \mathbf{a}_r \cdot r \, d\theta \, dz = E_r \cdot 2\pi L r$$

$$Q_{\text{inne}} = \rho_l L \Rightarrow E_r = \frac{\rho_l}{2\pi \epsilon_0 r}$$

Potential från en linjeladdning på avstånd r

$$V_r - V_{r_0} = - \int_{r_0}^r \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \int_{r_0}^r \frac{\rho_l}{2\pi \epsilon_0 r} \, dr = \left[- \frac{\rho_l}{2\pi \epsilon_0} \ln(r) \right]_{r_0}^r = - \frac{\rho_l}{2\pi \epsilon_0} \ln \frac{r}{r_0}$$

Vill sätta $V_{r_0} = 0$, notera dock $r_0 \neq \infty$ ty $\ln \frac{r}{r_0}$.

$U_0 = V_1 - V_3$. Beräkna V_1 & V_3 .

$V_1 = V_{1a} + V_{1b} + V_{1c}$ där V_{1a} är pot. vid 1 pga linjeladdning Q o.s.v.

$$\begin{aligned} V_1 &= \frac{-\rho_l a}{2\pi \epsilon_0} \ln \frac{r_1}{r_0} + \frac{-\rho_l b}{2\pi \epsilon_0} \ln \frac{r_1}{r_0} + \frac{-\rho_l c}{2\pi \epsilon_0} \ln \frac{r_1}{r_0} = \\ &= \frac{1}{2\pi \epsilon_0} \left(-\frac{Q}{L} \ln \frac{b}{r_0} + \frac{2Q}{L} \ln \frac{d}{r_0} - \frac{Q}{L} \ln \frac{a}{r_0} \right) = \\ &= \frac{Q}{2\pi \epsilon_0 L} \left(-\ln \frac{b}{r_0} + \ln \left(\frac{d}{r_0} \right)^2 - \ln \frac{a}{r_0} \right) = \frac{Q}{2\pi \epsilon_0 L} \ln \frac{d^2}{ab} \end{aligned}$$

$$V_3 = V_{31} + V_{32} + V_{33}$$

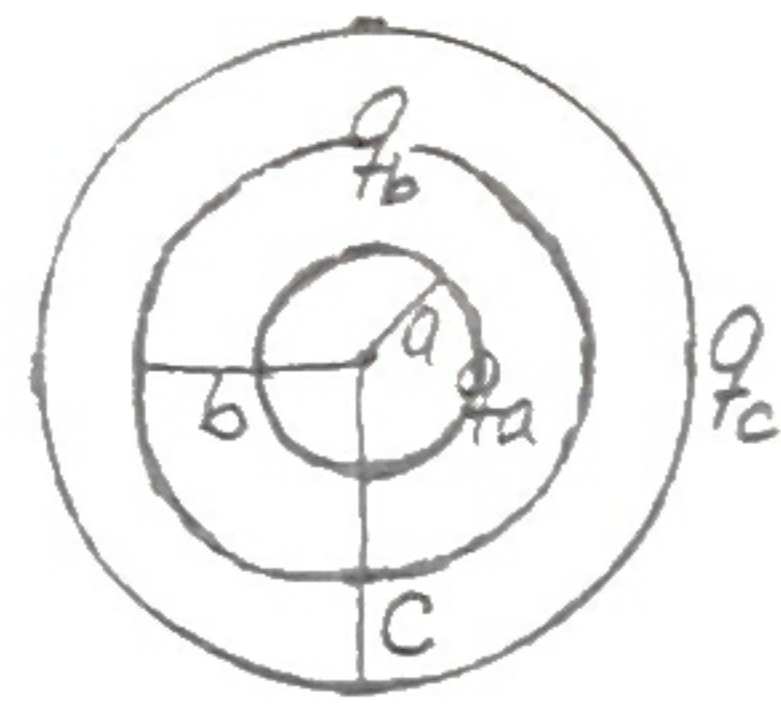
$$\begin{aligned} V_3 &= \frac{1}{2\pi \epsilon_0} \left(-\rho_1 \ln \frac{d}{r_0} - \rho_2 \ln \frac{d}{r_0} - \rho_3 \ln \frac{a}{r_0} \right) = \\ &= \frac{Q}{2\pi \epsilon_0 L} \left(-\ln \frac{d}{r_0} - \ln \frac{d}{r_0} + \ln \left(\frac{a}{r_0} \right)^2 \right) = \frac{Q}{2\pi \epsilon_0 L} \ln \frac{a^2}{d^2} \end{aligned}$$

$$U_0 = V_1 - V_3 = \frac{Q}{2\pi \epsilon_0 L} \left(\ln \frac{d^2}{ab} - \ln \frac{a^2}{d^2} \right) = \frac{Q}{2\pi \epsilon_0 L} \ln \frac{d^4}{a^3 b}$$

$$\Rightarrow Q = \frac{2\pi \epsilon_0 L U_0}{\ln \frac{d^4}{a^3 b}}$$

(I detta fall dividerades r_0 bort, nice, slipper bry oss om den.)

3.1 Tre koncentriska, sfäriska metallskal har laddningarna q_a , q_b resp. q_c .



a) Bestäm potentialen i mittpunkten V_0
 $V_\infty = 0$.

b) Beräkna V_0 om skal b & c förenas med en ledare.

Lösning Beräkna V_0 via E-fält.

$$\text{Gausz sfärisk symmetri } \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q_i}{\epsilon_0} \Rightarrow \mathbf{E} = E_R \mathbf{a}_R, E_R = \frac{Q_i}{4\pi\epsilon_0 R^2}$$

$$\text{Om } R < a: Q_i = 0 \Rightarrow E_R = 0$$

$$\text{Om } a < R < b: Q_i = q_a \Rightarrow E_R = \frac{q_a}{4\pi\epsilon_0 R^2}$$

$$\text{Om } b < R < c: Q_i = q_a + q_b \Rightarrow E_R = \frac{q_a + q_b}{4\pi\epsilon_0 R^2}$$

$$\text{Om } R > c: Q_i = q_a + q_b + q_c \Rightarrow E_R = \frac{q_a + q_b + q_c}{4\pi\epsilon_0 R^2}$$

$$V_0 - V_{\text{ref}} = - \int_{\infty}^0 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \int_{\infty}^c \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} - \int_c^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} - \int_b^a \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} - \int_a^0 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} =$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(- \int_{\infty}^c \frac{q_a + q_b + q_c}{R^2} dR - \int_c^b \frac{q_a + q_b}{R^2} dR - \int_b^a \frac{q_a}{R^2} dR - 0 \right) =$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left((q_a + q_b + q_c) \left[\frac{1}{R} \right]_{\infty}^c + (q_a + q_b) \left[\frac{1}{R} \right]_c^b + q_a \left[\frac{1}{R} \right]_b^a \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_c}{c} + \frac{q_b}{b} + \frac{q_a}{a} \right)$$

b) skal b & c förenas med en ledare

\Rightarrow laddningarna fördelas jämnt över skalen, $b < R < c \Rightarrow E_R = 0$.

$$V_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left((q_a + q_b + q_c) \left(\frac{1}{c} - 0 \right) + 0 + q_a \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_b + q_c}{c} + q_a \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \right)$$

2.14 En homogen linjeladdning ρ_l befinner sig på z -axeln mellan $z=-a$ & $z=a$.

Beräkna $E_r(r,z)$ & $E_z(r,z)$ i punkten P .

Lösning Bidrag från laddningselement dq , $dE = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 R_{12}^2} \mathbf{R}_{12}$
 där \mathbf{R}_{12} är vektor från laddningspkt till fältpkt,

$$|\mathbf{R}_{12}| = R_{12}$$

$$\mathbf{E} = \int_{\text{källan}} d\mathbf{E} = \int_{\text{källan}} \frac{\rho_l}{4\pi\epsilon_0 R_{12}^2} \mathbf{R}_{12} dz'$$

Källpunkter: $\mathbf{R}_1 = z' \mathbf{e}_z$, $-a < z' < a$
 Fältpunkt: $\mathbf{R}_2 = r \mathbf{e}_r + z \mathbf{e}_z$

$$\mathbf{R}_{12} = \frac{\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1}{|\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1|} = \frac{r \mathbf{e}_r + (z - z') \mathbf{e}_z}{R_{12}}, \quad R_{12} = \sqrt{r^2 + (z - z')^2}$$

$$\mathbf{E} = \int_{-a}^a \frac{\rho_l}{4\pi\epsilon_0} \frac{r \mathbf{e}_r + (z - z') \mathbf{e}_z}{(r^2 + (z - z')^2)^{3/2}} dz'$$

$$E_r = \int_{-a}^a \frac{\rho_l}{4\pi\epsilon_0} \frac{r}{(r^2 + (z - z')^2)^{3/2}} dz' = \left. \begin{array}{l} z'' = z - z' \\ z' = a \Rightarrow z'' = z - a \\ z' = -a \Rightarrow z'' = z + a \\ dz'' = -dz' \end{array} \right\} = -\frac{\rho_l r}{4\pi\epsilon_0} \int_{z+a}^{z-a} \frac{1}{(r^2 + z''^2)^{3/2}} dz''$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{Beta s. 160 nr. III} \\ \int \frac{1}{(ax^2 \pm c^2)^{3/2}} = \pm \frac{x}{c^2 \sqrt{ax^2 \pm c^2}} \quad \begin{array}{l} x \rightarrow z'' \\ a \rightarrow 1 \\ c \rightarrow r \end{array} \end{array} \right\} = \frac{-\rho_l r}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{z''}{r \sqrt{r^2 + z''^2}} \right]_{z+a}^{z-a} =$$

$$= -\frac{\rho_l}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{z-a}{\sqrt{r^2 + (z-a)^2}} - \frac{z+a}{\sqrt{r^2 + (z+a)^2}} \right)$$

$$E_z = -\frac{\rho_l}{4\pi\epsilon_0} \int_{-a}^a \frac{z - z'}{(r^2 + (z - z')^2)^{3/2}} dz' \stackrel{z'' = z - z'}{=} -\frac{\rho_l}{4\pi\epsilon_0} \int_{z+a}^{z-a} \frac{z''}{(r^2 + z''^2)^{3/2}} dz'' =$$

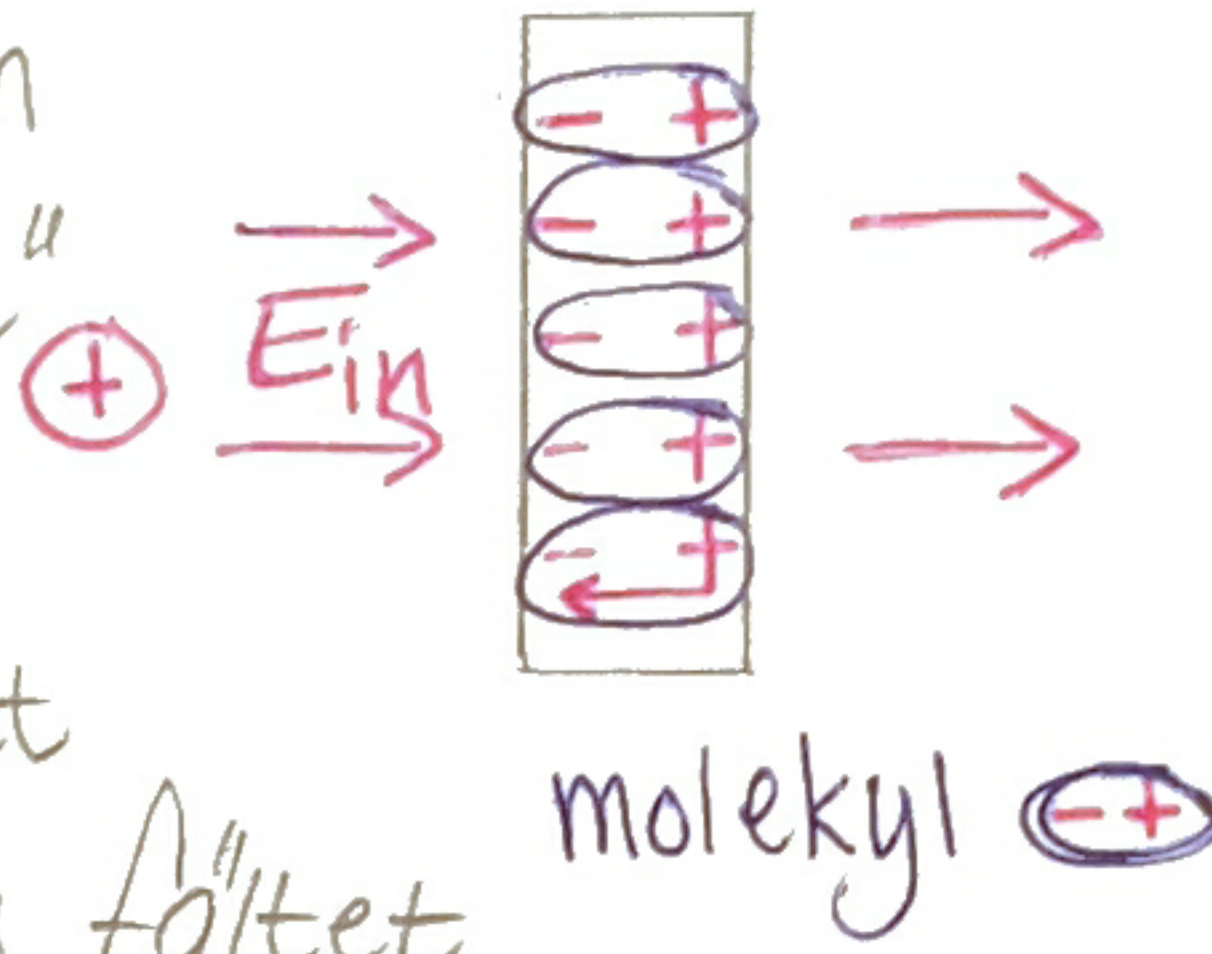
$$\left. \begin{aligned}
 z'' &= \xi \\
 \frac{d\xi}{dz''} &= 2z'' \\
 \Rightarrow d\xi &= 2z'' dz''
 \end{aligned} \right\} = -\frac{\rho_l}{4\pi\epsilon_0} \int_{(z+a)^2}^{(z-a)^2} \frac{1}{2} \frac{1}{(r^2+\xi)^{3/2}} d\xi =$$

$$= -\frac{\rho_l}{8\pi\epsilon_0} \left[\frac{-2}{\sqrt{r^2+\xi}} \right]_{(z+a)^2}^{(z-a)^2} = \frac{\rho_l}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{\sqrt{r^2+(z-a)^2}} - \frac{1}{\sqrt{r^2+(z+a)^2}} \right)$$

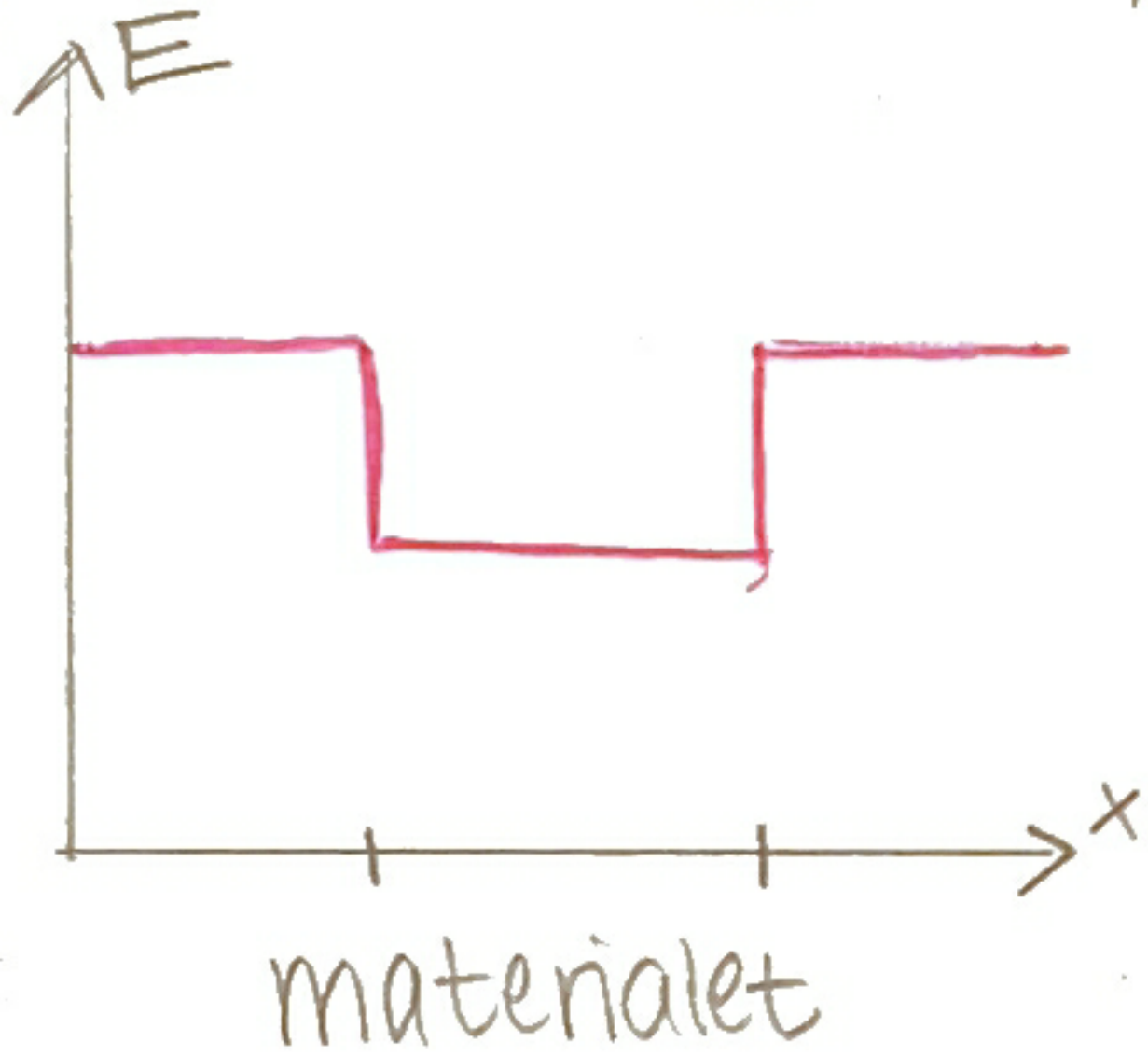
Storgruppsövning 8/11

ϵ_0 - permittiviteten i vakuum

$\epsilon(r)$ "dielektriska material"



Polarisationen skapar ett nytt fält, styrkan av det totala fältet sjunker.



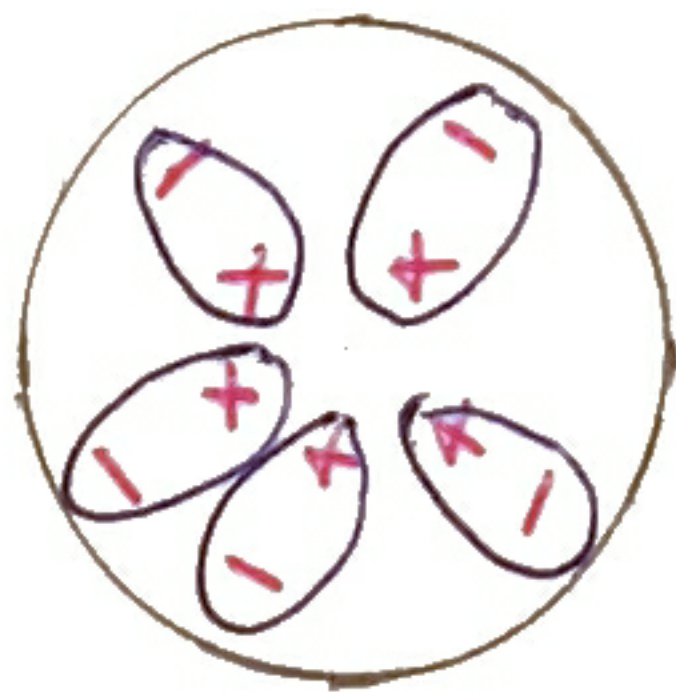
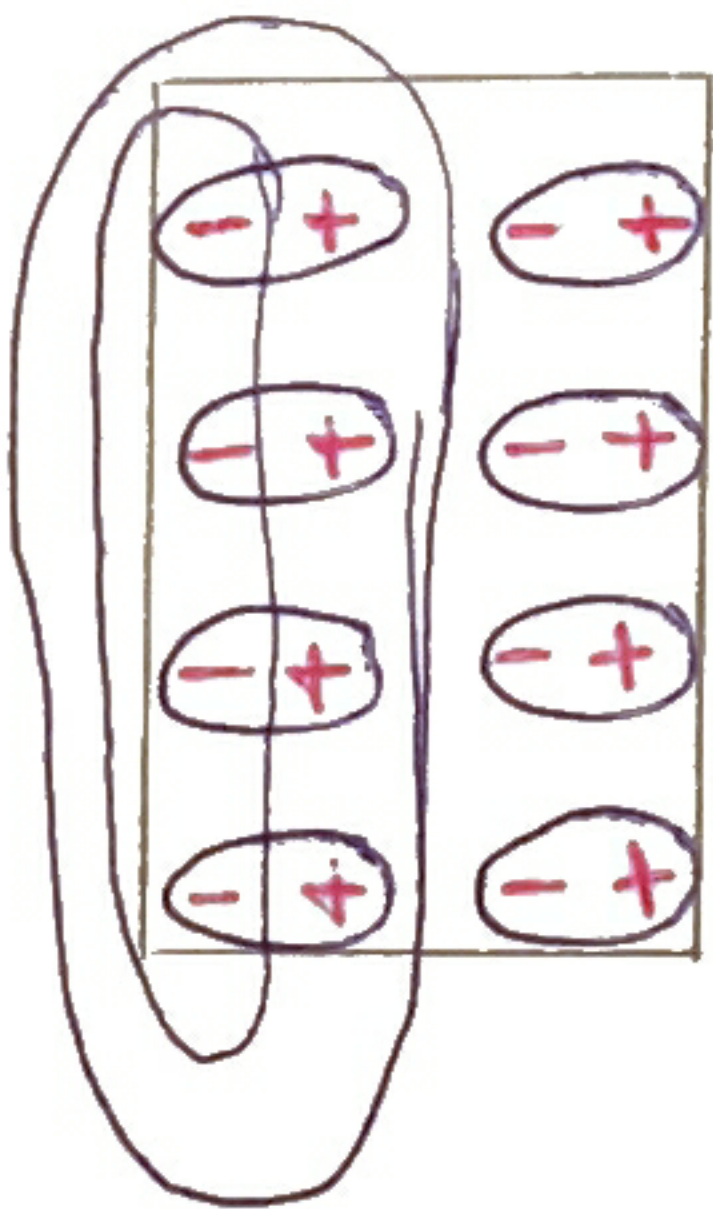
Introducerar polarisationsfältet P

Normalt är förhållandet till E linjärt

$$P = \epsilon_0 \chi_e E$$

Det finns 2 typer av laddningar

- * fria, som tillförts eller fritt förflyttats
- * bundna, som förskjutits - "polarisations laddningar"



$$\rho_P = -\nabla \cdot P$$

$$\rho_{PB} = \nabla \cdot P$$

E -fältet beror på både fria & bundna laddningar.

Def! ett nytt fält D som bara beror på de fria.

$$D = \epsilon_0 E + P$$

$$= \epsilon_0 E + \epsilon_0 \chi_e E = \epsilon_0 (1 + \chi_e) E$$

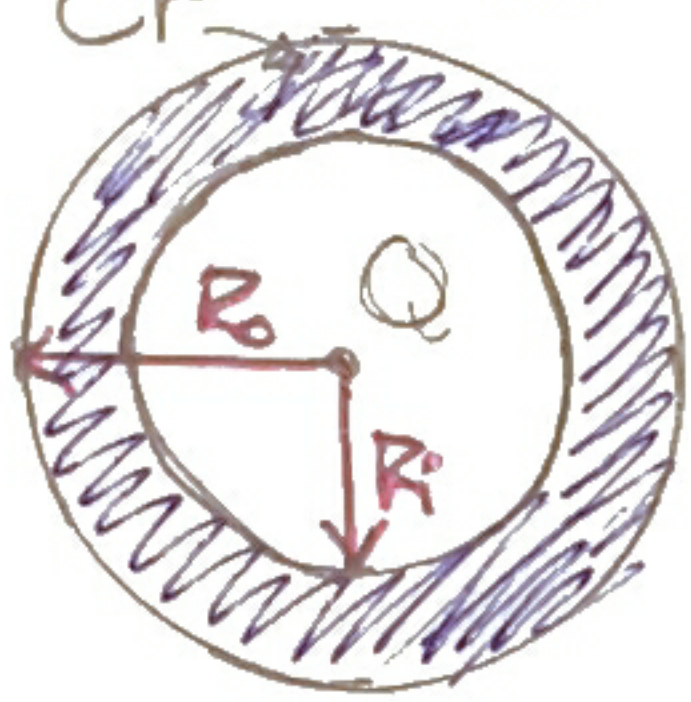
$$= \epsilon_0 \epsilon_r E$$

ϵ_r = relativ permittivitet
 $\epsilon_0 \epsilon_r$ = absolut

Ex 3-12 En positiv punktladdning Q , befinner sig i centrum av ett sfäriskt elektriskt skal med inre resp. yttre radie R_i resp. R_o . Skalets relativa permittivitet är ϵ_r .

Bestäm, som en funk. av radien R , E , V , \mathbb{D} & \mathbb{P}

Lösning



Gauß generaliserade lag

$$\int_V \nabla \cdot \mathbb{D} dV = Q_{\text{inne}} = \oint_S \mathbb{D} \cdot d\mathbf{S} =$$

$$\int_{\theta=0}^{\pi} d\theta \int_{\varphi=0}^{2\pi} \mathbb{D}(R) R^2 \sin\theta = Q$$

$$\Rightarrow \mathbb{D}(R) = \mathbb{1}_R \frac{Q}{4\pi R^2} \quad \text{överallt!}$$

$$\mathbb{E}(R) = \frac{1}{\epsilon_r} \mathbb{D}(R)$$

$$\mathbb{E} = \begin{cases} \mathbb{1}_R \frac{Q}{4\pi \epsilon_r R^2} & R_i \leq R \leq R_o \\ \mathbb{1}_R \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 R^2} & R < R_i, R > R_o \end{cases}$$

$$\mathbb{P} = \mathbb{D} - \epsilon_0 \mathbb{E}$$

$$\mathbb{P} = \begin{cases} \mathbb{1}_R \frac{Q}{4\pi R^2} \left(1 - \frac{1}{\epsilon_r}\right) & R_i \leq R \leq R_o \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

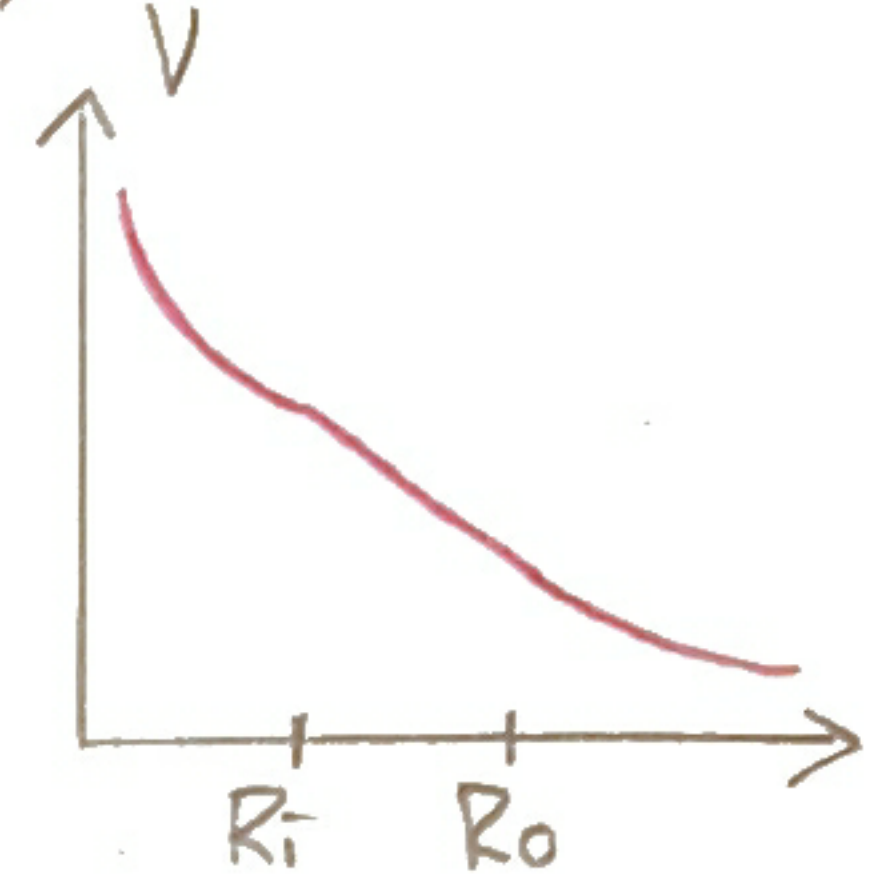
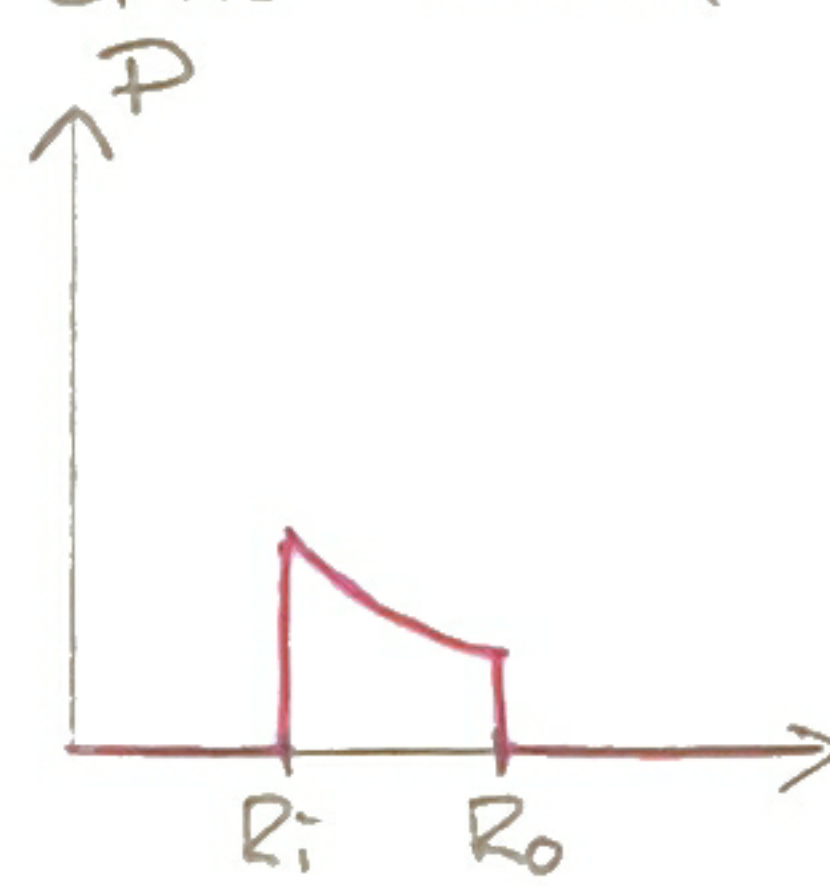
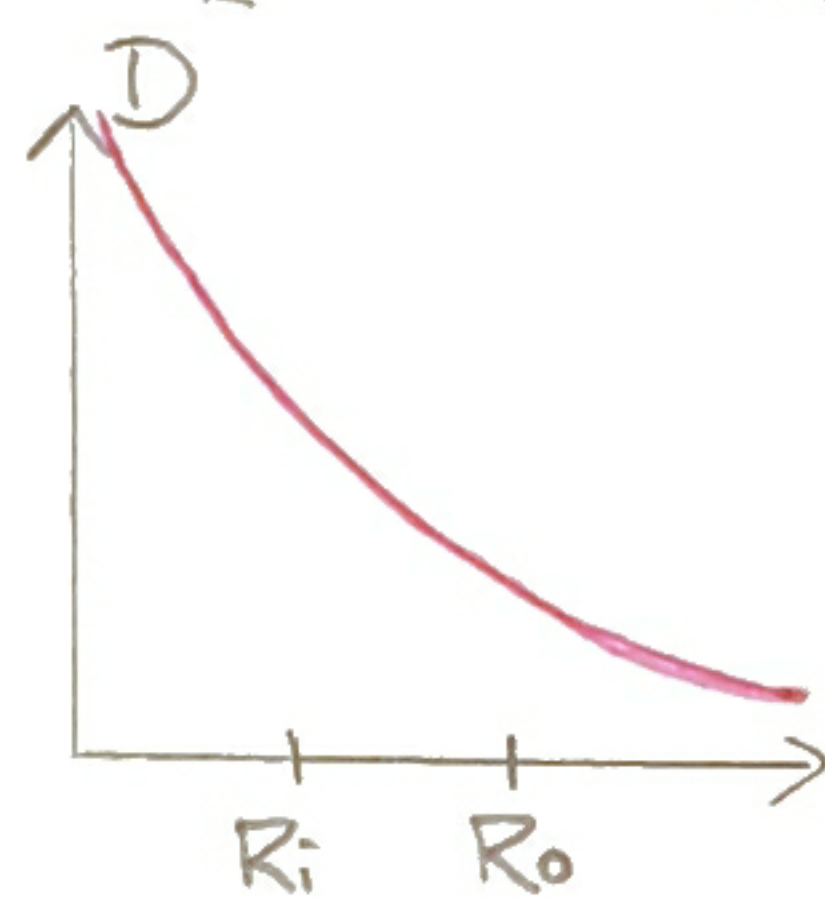
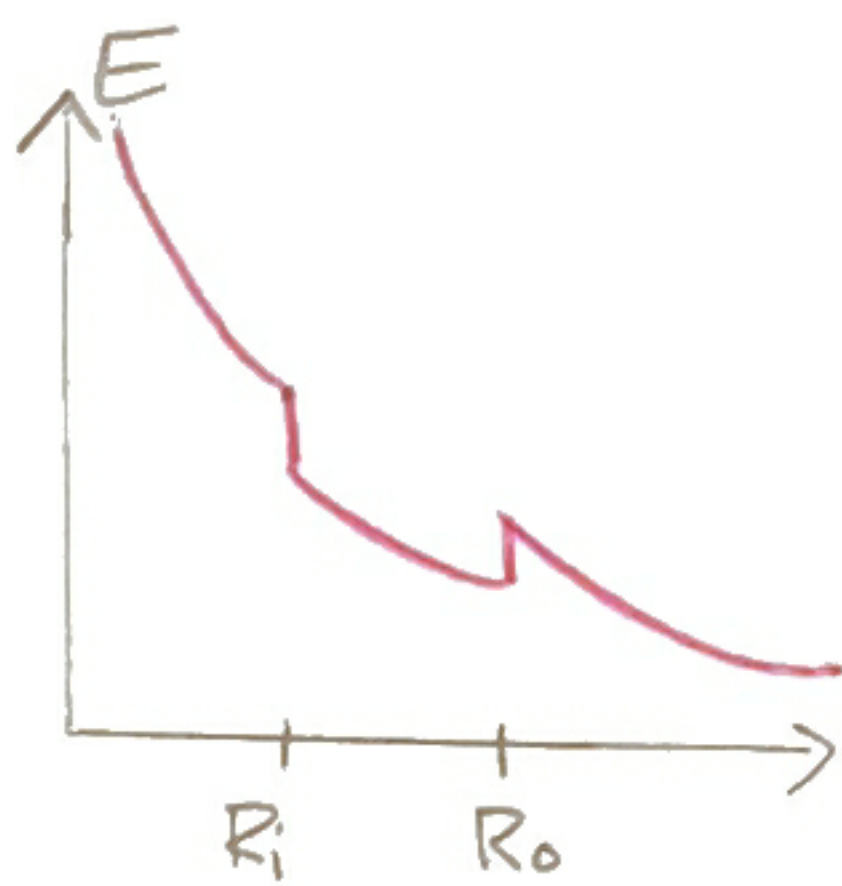
Potentialen fås från $V(R) - V(\text{ref}) = \int_R^{\text{ref}} \mathbb{E} \cdot d\mathbf{l}$
Med $\text{ref} = \infty$ & $V(\text{ref}) = 0$ fås

$$V(R) = \int_R^{\infty} dR' \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 R'^2} = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 R} \quad R > R_o$$

$$V(R) = V(R_0) + \int_R^{R_0} E \cdot dl = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_0} + \left[-\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 \epsilon_r R} \right]_R^{R_0} =$$

$$= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_0} - \frac{1}{\epsilon_r R_0} + \frac{1}{\epsilon_r R} \right) \quad R_i < R < R_0$$

$$V(R) = V(R_i) + \int_R^{R_i} E \cdot dl = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r R_0} - \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r R_i} + \frac{1}{R} \right) \quad R < R_i$$



3.2 En dielektrisk sfär med radie, a , har en konstant polarisation (elektret) \vec{P} radiens riktning
 $\vec{P} = P \hat{a}_R$.

Söker medelpunktens potential.

Lösning Från Gauss generaliserade lag $\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{s} = Q_{in}$

Men \vec{D} -fältet beror bara på de fria laddningarna. Oavsett vilken radie vi kollar på blir $\vec{D} = 0$, ty \vec{P} bundna.

$$\text{Eftersom } \vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \Rightarrow \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} (\vec{D} - \vec{P})$$

$$\Rightarrow \vec{E} = \begin{cases} 0, & R > a \\ -\frac{\vec{P}}{\epsilon_0} = -\frac{P}{\epsilon_0} \hat{a}_R, & R < a \end{cases}$$

Nu integrerar vi upp potentialen i centrum

$$V(0) = \int_0^\infty \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_a^\infty a R^0 + \int_0^a a R \left(-\frac{P}{\epsilon_0} \right) = -\frac{Pa}{\epsilon_0}$$

Alternativt

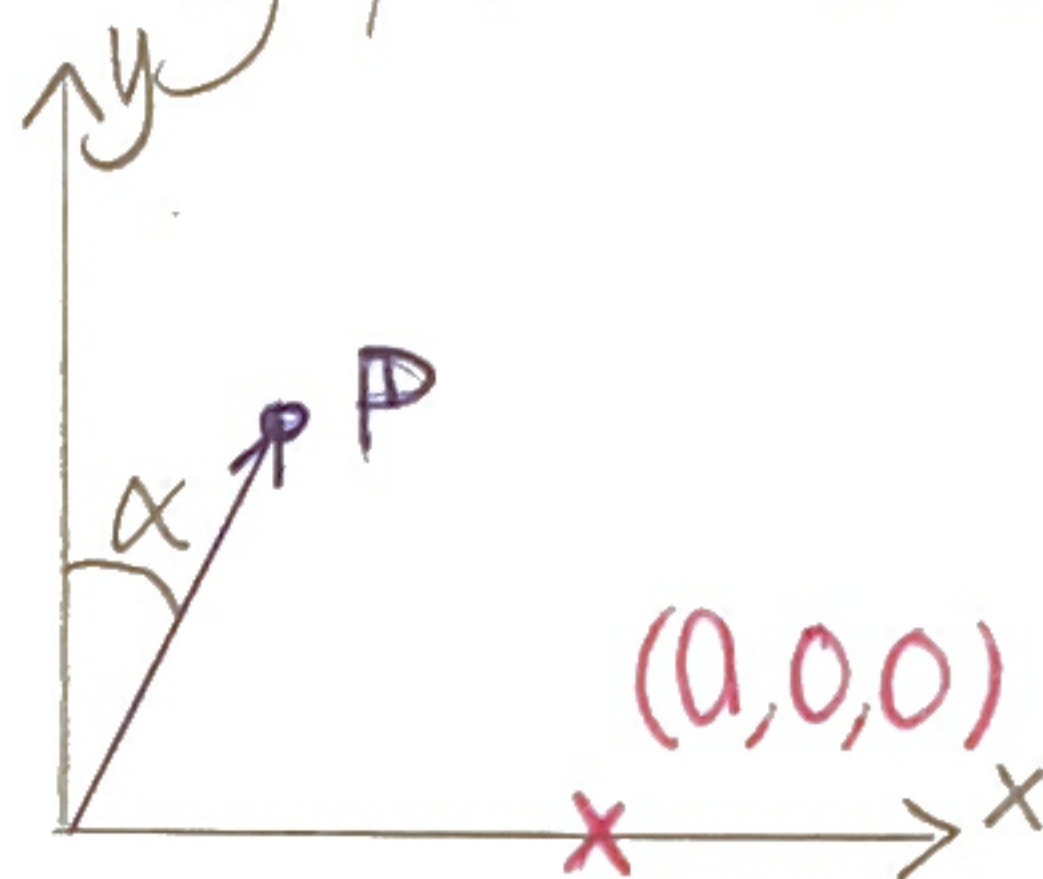
$$\rho_v = -\nabla \cdot \mathbf{P}, \quad \rho_{ps} = \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{P} \quad \text{se lösning bland} \\ \text{exemplen på nätet!}$$

Varningsfaktor $\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} = \frac{\rho_{tot}}{\epsilon_0}$ alla laddningar

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0 \epsilon_r} \quad \text{fria laddningar}$$

2-12 En pkt dipol finns i origo i ett rektangulärt ^{cart.} koord. syst.
Dipolmomentet \mathbf{p} ligger i xy -planet & bildar vinkeln α med y -axeln.

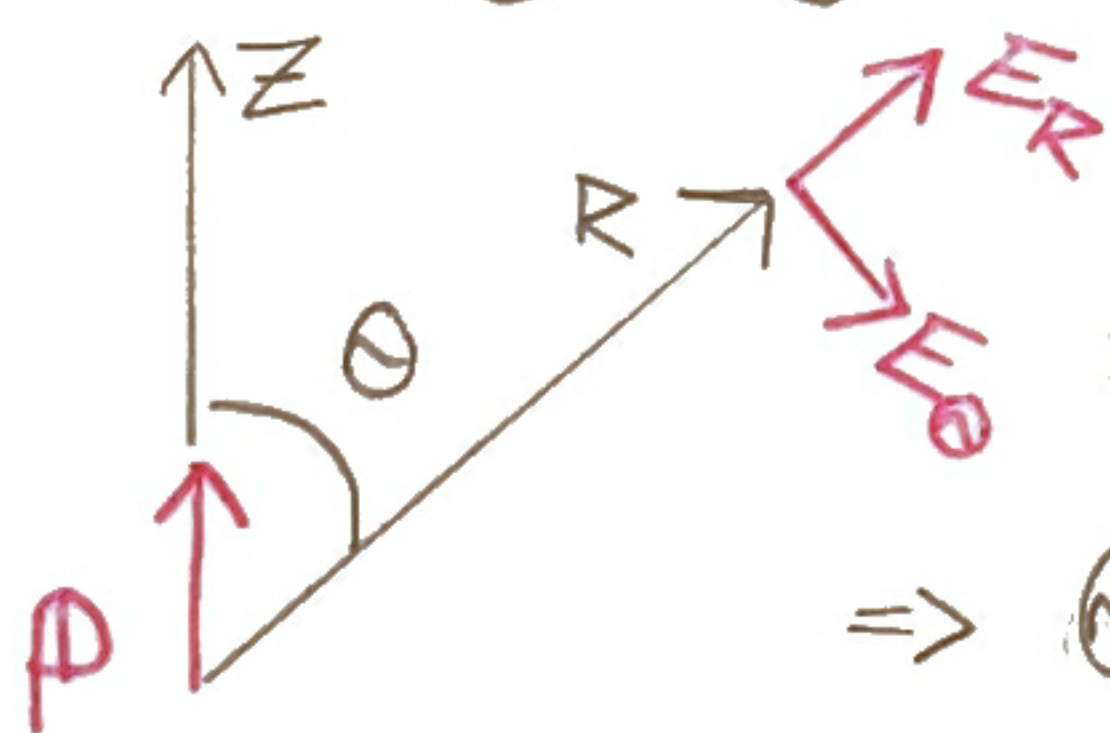
Bestäm $\mathbf{E}(a, 0, 0)$



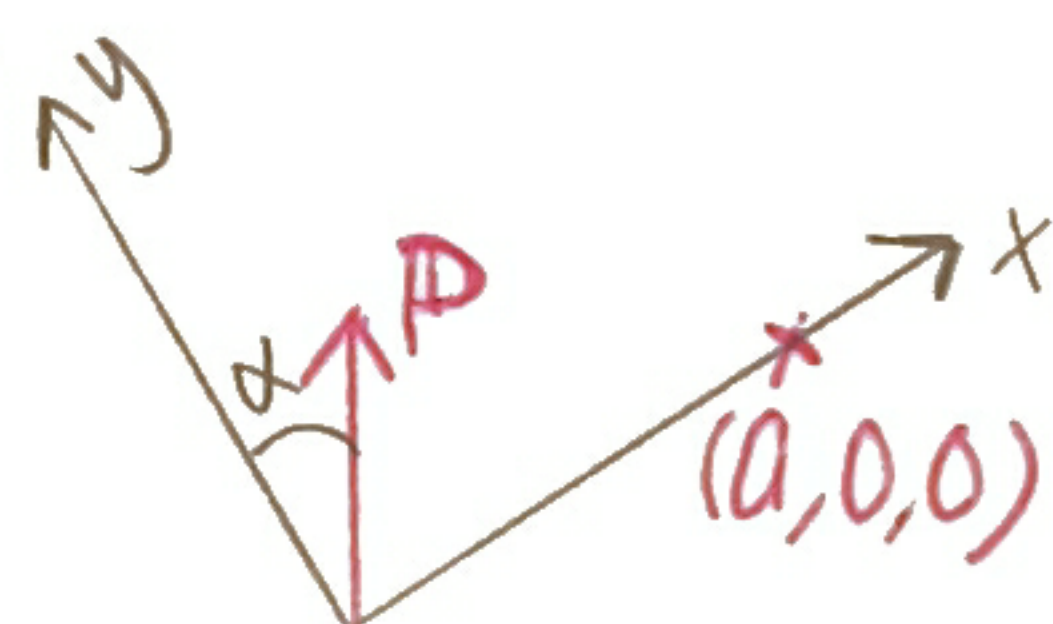
Lösning

$$\mathbf{E}(R, \theta) = \frac{P}{4\pi\epsilon_0 R^3} (a_R \hat{\mathbf{r}} \cos\theta + a_\theta \hat{\boldsymbol{\theta}})$$

Uttryck givet i formelsamlingen, notera orientering!



Om vi vänder systemet



$$\Rightarrow \theta = 90^\circ - \alpha$$

$$a_R \sim \hat{\mathbf{x}}$$

$$a_\theta \sim -\hat{\mathbf{y}}$$

$$R = a$$

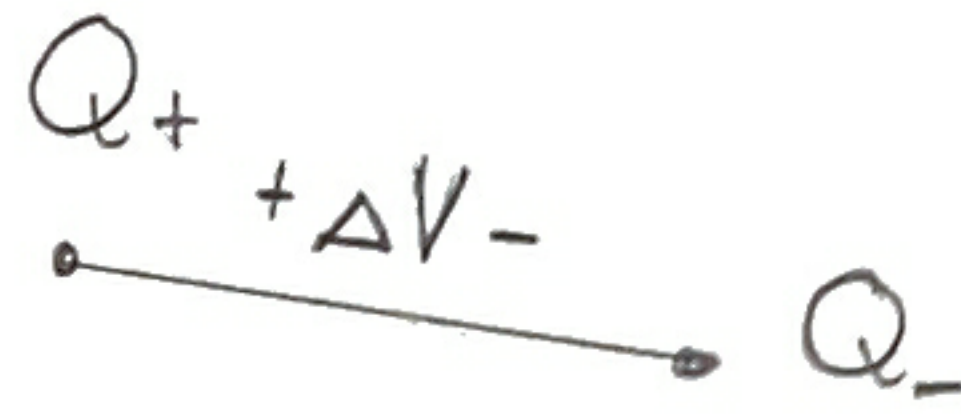
$$\Rightarrow \mathbf{E}(a, 0, 0) = \frac{P}{4\pi\epsilon_0 a^3} (\hat{\mathbf{x}} \cos(90^\circ - \alpha) - \hat{\mathbf{y}} \sin(90^\circ - \alpha)) =$$

$$= \frac{P}{4\pi\epsilon_0 a^3} (\hat{\mathbf{x}} \sin\alpha - \hat{\mathbf{y}} \cos\alpha)$$

Storgruppsövning 10/11

Kapacitans

$$C = \frac{Q}{\Delta V}, \quad [C] = F = \text{Farad}$$



Tillvägagångssätt

Beräkning av kapacitans

1) Ansätt laddningar $+Q, -Q$

2) Beräkna E

$$3) \Delta V = -\int_2^1 E dl$$

$$4) C = \frac{Q}{\Delta V}$$

Elektrostatik, energi och kraft

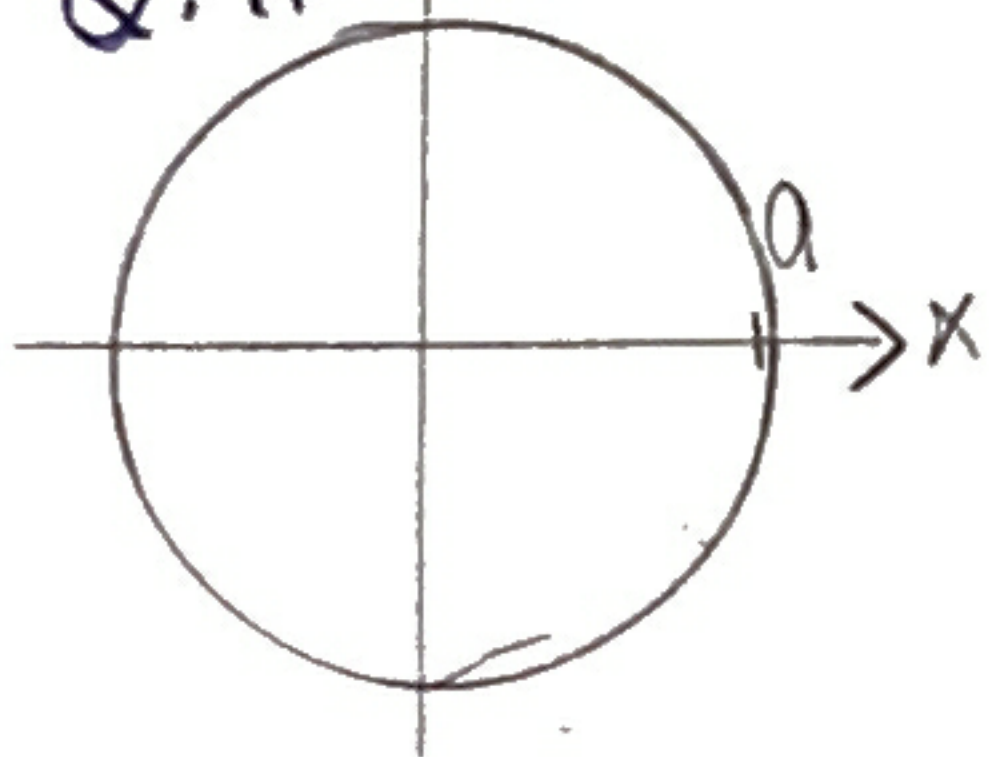
För punktladdningar $W_e = \frac{1}{2} \sum Q_i V_i$ ← potentialen vid Q_i
pga alla Q_j $j \neq i$

$$\text{Laddningsfördelning } W_e = \frac{1}{2} \int_V \rho(r) V(r) dV$$

$$\text{Energi hos kondensatorer } W_e = \frac{1}{2} C (\Delta V)^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$$

Kraft • system med konstant laddning $F_x = - \frac{\partial W_e}{\partial x} \Big|_{Q \text{ konst.}}$
 • —//— potential $F_x = \frac{\partial W_e}{\partial x} \Big|_{V \text{ konst.}}$

2.11



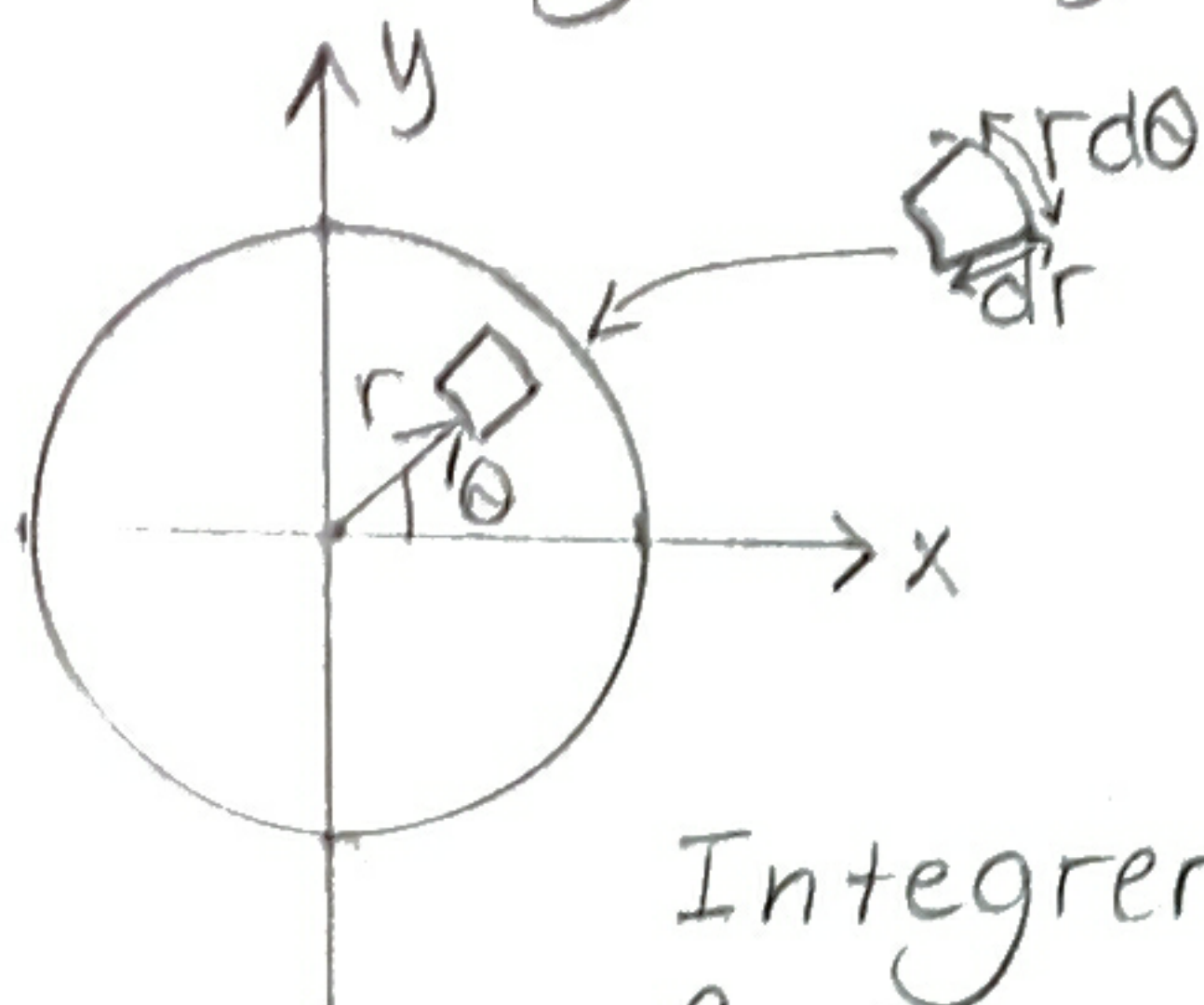
En tunn cirkulär metallskiva med radie a & laddning Q .

$$\rho_s(r) = \frac{Q}{4\pi a \sqrt{a^2 - r^2}} \quad \text{på båda sidorna.}$$

Vilken potential har skivan? ($V_\infty = 0$)

Lösning • V är samma över hela skivan, beräknar V i origo.

Laddning från ytelement $dq = 2 \rho_s r d\theta dr$



↑ pga laddning på båda sidor

$$dV = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{2\rho_s r d\theta dr}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{\rho_s}{2\pi\epsilon_0} dr d\theta$$

Integrera bidrag från hela skivan

$$V = \int dV = \int_{r=0}^a dr \int_{\theta=0}^{2\pi} d\theta \frac{\rho_s}{2\pi\epsilon_0} = \int_0^a dr \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi\epsilon_0} \frac{Q}{4\pi a \sqrt{a^2 - r^2}} = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 4\pi a} \int_0^a dr \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{a^2 - r^2}} =$$

$$= \frac{Q}{4\epsilon_0 \pi a} \int_0^a \frac{dr}{\sqrt{a^2 - r^2}} = \left[\text{Beta s. 162 nr 139} \quad \begin{matrix} c \rightarrow a \\ x \rightarrow r \\ a \rightarrow 1 \end{matrix} \right] = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a} \left[\arcsin \frac{r}{a} \right]_0^a =$$

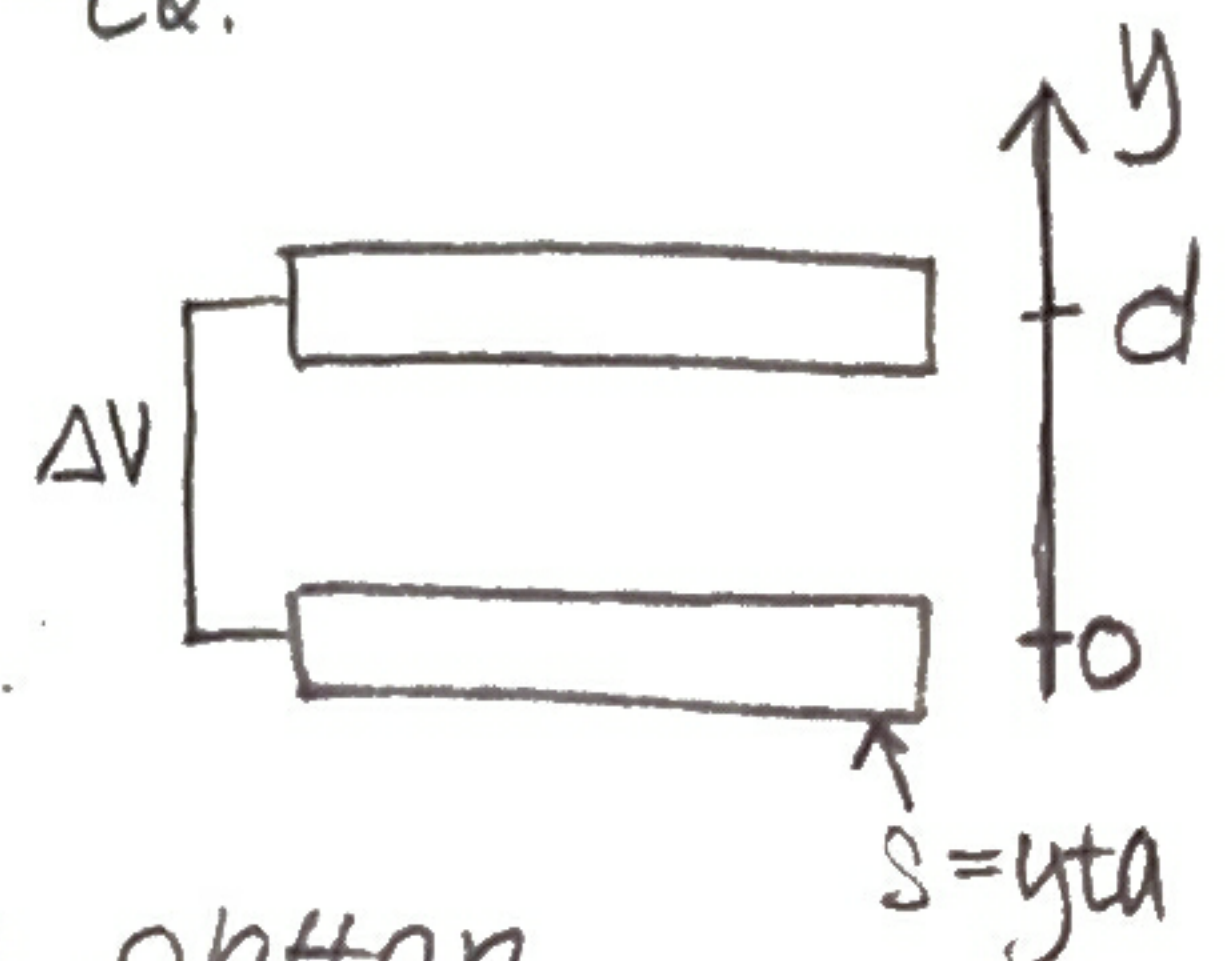
$$= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a} (\arcsin 1 - \arcsin 0) = \frac{Q}{8\epsilon_0 a}$$

P3-30 Kondensator bestående av två plattor.

Dielektrikumet mellan har en permittivitet som varierar linjärt, $\epsilon(y)$ med $\epsilon(0) = \epsilon_1$ & $\epsilon(d) = \epsilon_2$.

Beräkna kapacitansen. $C = \epsilon \frac{S}{d}$

Lösning $\epsilon(y) = \frac{\epsilon_1(d-y) + \epsilon_2 \cdot y}{d}$



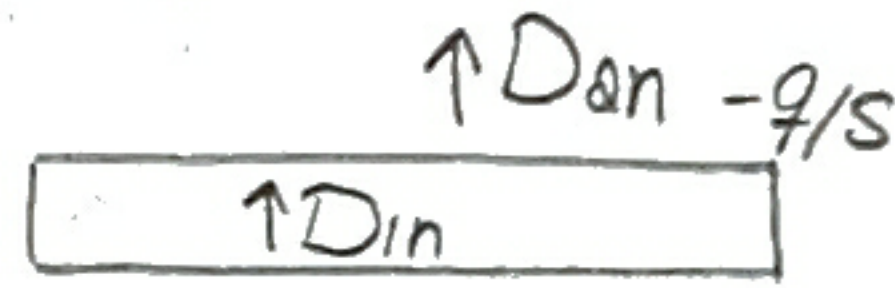
Antag laddning $+q, -q$ vid övre, undre plattan.

Mellan plattorna $\mathbb{D} = D_y \hat{y}$, $E = \frac{D_y}{\epsilon(y)} \hat{y}$

$$\nabla \cdot \mathbb{D} = \rho_{\text{fri}} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbb{D} = \frac{\partial D_y}{\partial y} = 0 \Rightarrow D_y = C, \text{ konstant}$$

C , ges av randvillkor.

Vid undre plattan



$$D_{\text{in}} = 0$$

$$D_{\text{out}} = D_y$$

$$\rho_s = -\frac{q}{s}$$

$$\Rightarrow D_y = -\frac{q}{s} \Rightarrow E_y = \frac{D_y}{\epsilon} = -\frac{q}{s\epsilon}$$

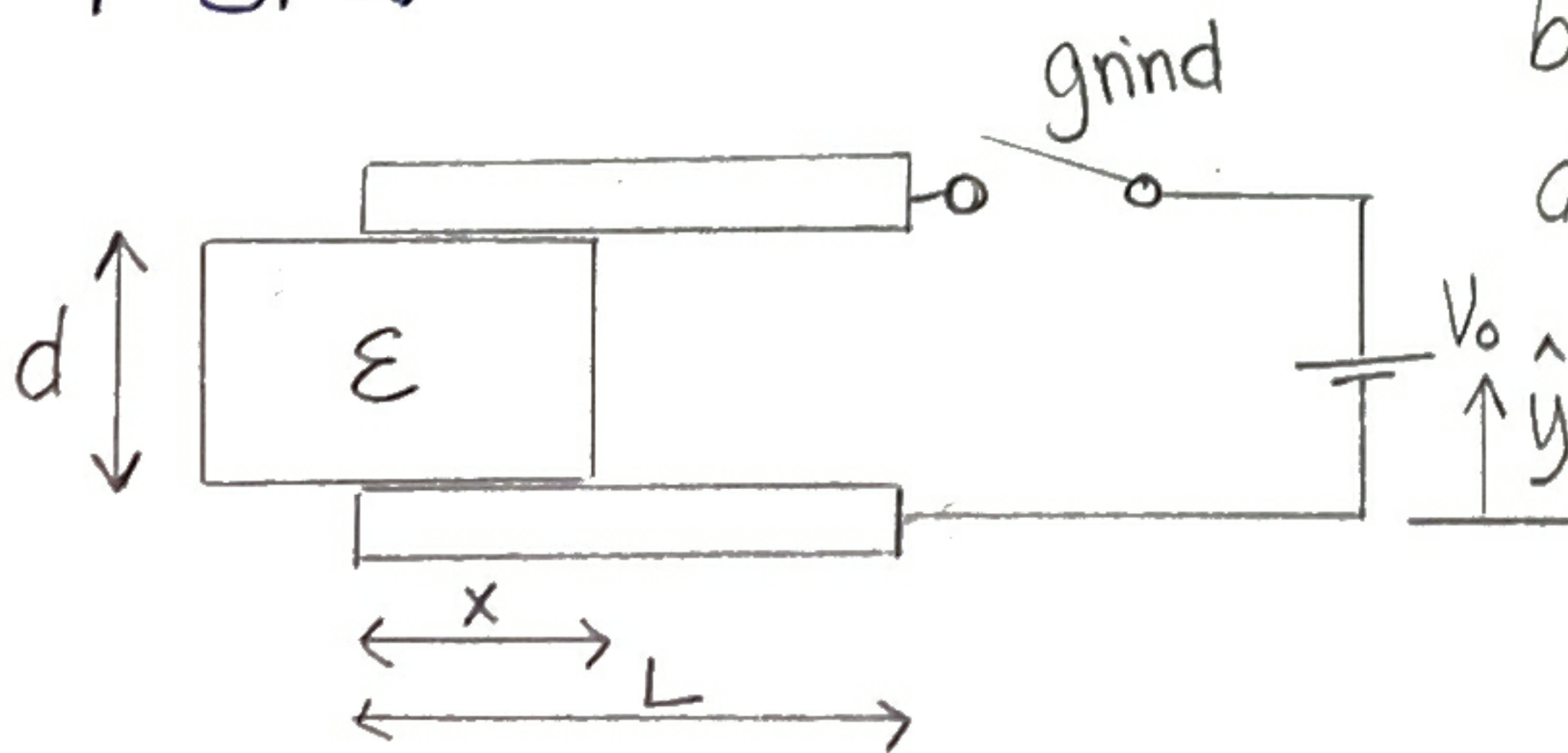
$$\Delta V = -\int_0^d E_y dy = -\int_0^d -\frac{q}{s} \cdot \frac{d}{\epsilon_2 y + \epsilon_1 (d-y)} dy = \frac{q d}{s} \int_0^d \frac{dy}{\epsilon_1 y + \epsilon_2 (d-y)}$$

$$= \frac{q d}{s} \left[\frac{1}{\epsilon_2 - \epsilon_1} \ln(\epsilon_1 d + (\epsilon_2 - \epsilon_1)y) \right]_0^d = \frac{q d}{s(\epsilon_2 - \epsilon_1)} (\ln \epsilon_2 d - \ln \epsilon_1 d) =$$

$$= \frac{q d}{s(\epsilon_2 - \epsilon_1)} \ln \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}$$

$$\Rightarrow C = \frac{q}{\frac{q d}{s(\epsilon_2 - \epsilon_1)} \ln \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}} = \frac{s(\epsilon_2 - \epsilon_1)}{d \ln \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}}$$

P 3-48



Kondensator, 2 parallella plattor, bredd w , längd L , delvis fylld av dielektriskt material, permittivitet ϵ

Bestäm kraften som det dielektriska materialet påverkas av då

- Grinden stängd
- Grinden öppen

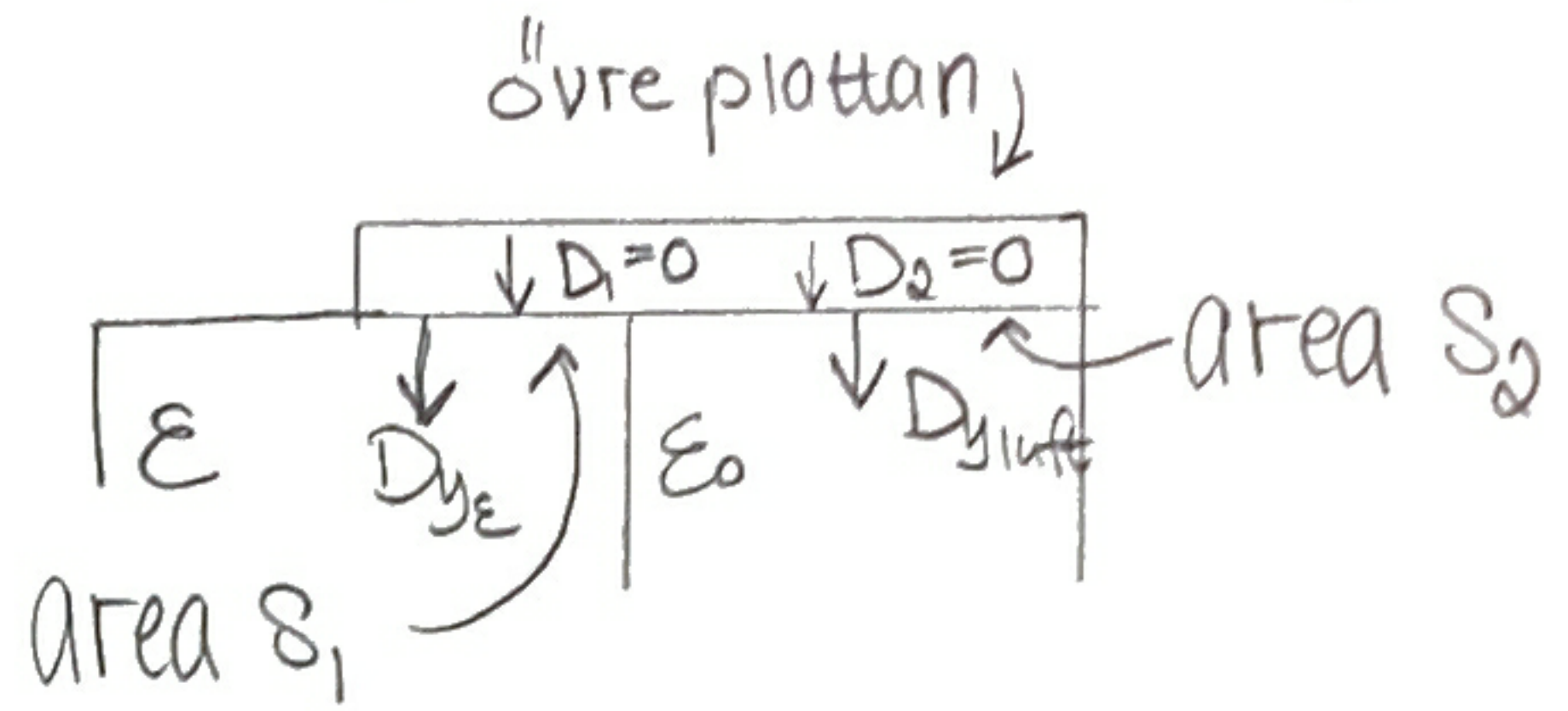
$$F_x = -\frac{\partial W_e}{\partial x} \Big|_{Q \text{ konst.}}$$

$$F_x = \frac{\partial W_e}{\partial x} \Big|_{V \text{ konst.}}$$

$$W_e = \frac{1}{2} C (\Delta V)^2 = \frac{q^2}{2C}$$

Lösning Spänning V_0 mellan plattorna, beräkna q

från integration $E_y = -\frac{V_0}{d} \Rightarrow \begin{cases} D_{y\text{luft}} = -\frac{\epsilon_0 V_0}{d} \\ D_{y\epsilon} = -\frac{\epsilon V_0}{d} \end{cases}$



$$D_{\text{out}} - D_{\text{in}} = \rho_{fs}$$

$$q = \rho_{S1} S_1 + \rho_{S2} S_2 = -D_{y\epsilon} S_1 - D_{y\epsilon_0} S_2 =$$

$$-D_{y\epsilon} = \rho_{S1}$$

$$-D_{y\epsilon_0} = \rho_{S2}$$

$$= -D_{y\epsilon} x W - D_{y\epsilon_0} (L-x) W =$$

$$= \frac{\epsilon V_0 x W}{d} + \frac{\epsilon_0 V_0 (L-x) W}{d} = \frac{\epsilon_0 V_0 W}{d} (\epsilon_r x + (L-x)) \quad (\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0)$$

$$C = \frac{q}{V_0} = \frac{\epsilon_0 W}{d} (\epsilon_r x + (L-x))$$

a) grinden stängd \Rightarrow spänning konstant

$$F_x = + \frac{\partial W_e}{\partial x} \Big|_{V \text{ konst.}} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2} C (\Delta V)^2 \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2} V_0^2 \frac{\epsilon_0 W}{d} (\epsilon_r x + (L-x)) \right) =$$

$$= \frac{1}{2} V_0^2 \frac{\epsilon_0 W}{d} (\epsilon_r - 1)$$

b) grinden öppen \Rightarrow laddning konstant

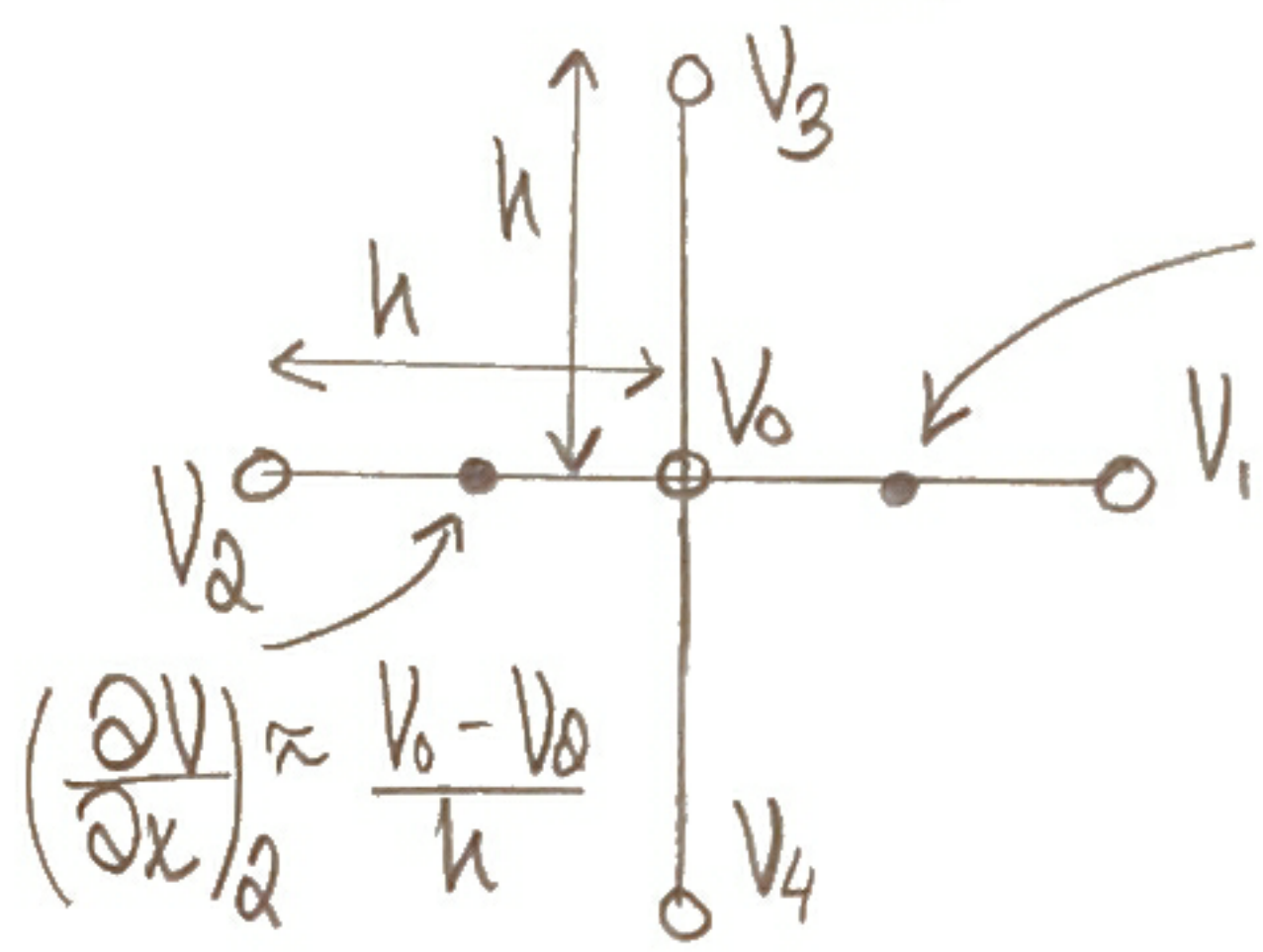
$$F_x = - \frac{\partial W_e}{\partial x} \Big|_{Q \text{ konst.}} = - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q^2}{2C} \right) = - \frac{\partial}{\partial x} \frac{Q^2}{2} \cdot \frac{d}{\epsilon_0 W (L + (\epsilon_r - 1)x)} =$$

$$= \frac{Q^2 d}{2 \epsilon_0 W} \frac{\epsilon_r - 1}{(L + (\epsilon_r - 1)x)^2}$$

$$F_x^V = \frac{V_0^2 \epsilon_0 W (\epsilon_r - 1)}{2d} = \frac{\epsilon_0 W (\epsilon_r - 1)}{2d} \frac{Q^2}{C^2} = \frac{\epsilon_0 W Q^2 (\epsilon_r - 1)}{2d} \cdot \frac{d^2}{\epsilon_0^2 W^2 (L + (\epsilon_r - 1)x)^2} =$$

$$= \frac{Q^2 d}{2 \epsilon_0 W} \frac{\epsilon_r - 1}{(L + (\epsilon_r - 1)x)^2} = F_x^Q \quad \text{nice!}$$

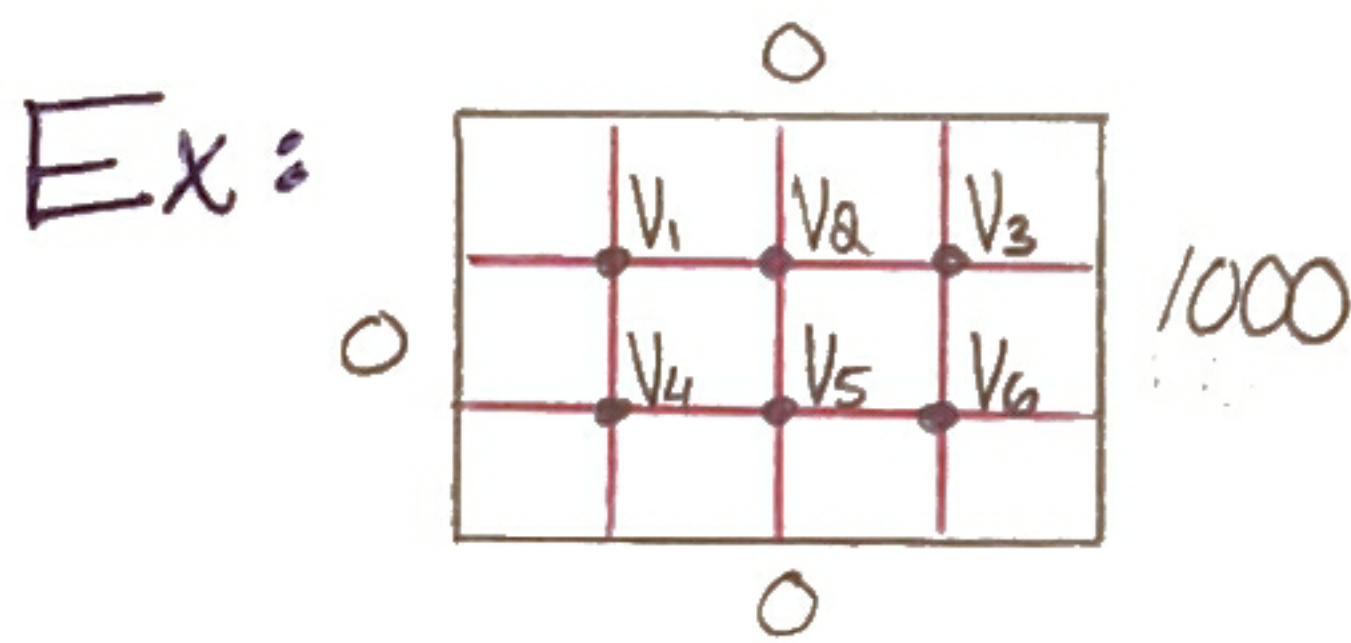
14/11 Diskretisering av ∇^2 i rektangulära koord.



$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_1 = \frac{V_1 - V_0}{h}$$

Andraderivatatan: $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \approx \frac{\frac{\partial V}{\partial x_1} - \frac{\partial V}{\partial x_2}}{h} \approx \frac{V_1 + V_2 - 2V_0}{h^2}$

$$\Delta D: \nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \approx \frac{V_1 + V_2 + V_3 + V_4 - 4V_0}{h^2} = 0$$



Symmetri ger: $V_1 = V_4, V_2 = V_5, V_3 = V_6$

Antag $h=1$. $V_1 = \frac{1}{4}(V_5 + 0 + 0 + V_4) \leftarrow V_4$

$$V_2 = \frac{1}{4}(V_3 + 0 + V_1 + V_5) \leftarrow V_5$$

$$V_3 = \frac{1}{4}(1000 + 0 + V_2 + V_6) \leftarrow V_6$$

Har nu 3 ekv. 3 obekanta.

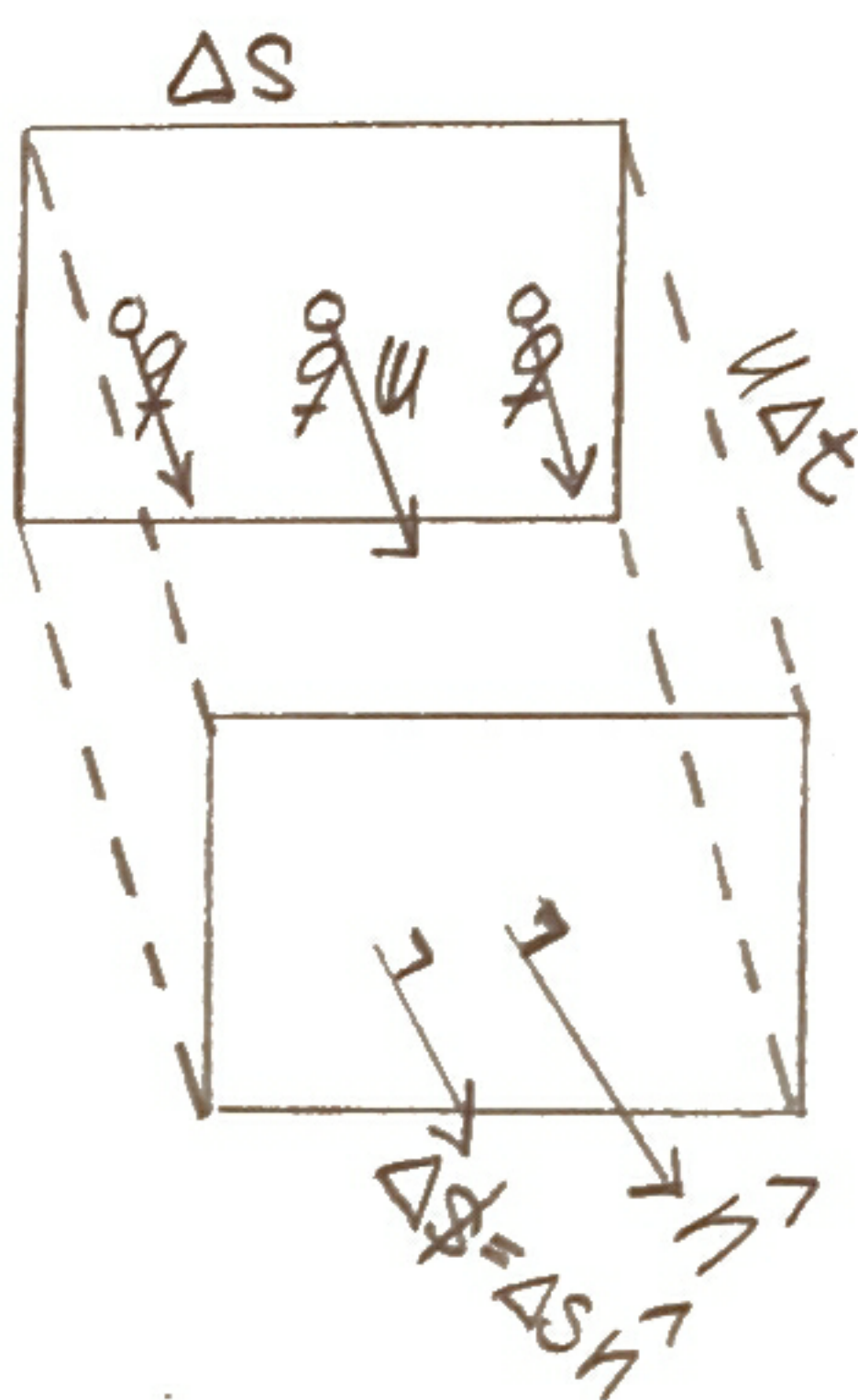
$$\Rightarrow V_1 = V_4 \approx 47,6 V$$

$$V_2 = V_5 \approx 142,9 V$$

$$V_3 = V_6 \approx 381,0 V$$

Elektriska strömmar, 5-1, 5-2

Betrakta makroskopiskt liten yta ΔS .



$$\Delta \Phi = (\mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}}) \Delta t$$

N - laddningstäthet

Räkna laddningar som passerar tvärsnittet

ΔS under tiden Δt .

$$\Delta Q = Nq (\mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}}) \Delta t \Delta S$$

$$\Delta i = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = Nq (\mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}}) \Delta S = Nq (\mathbf{u} \cdot \Delta \mathbf{S})$$

Flera laddningsbärare/laddningar

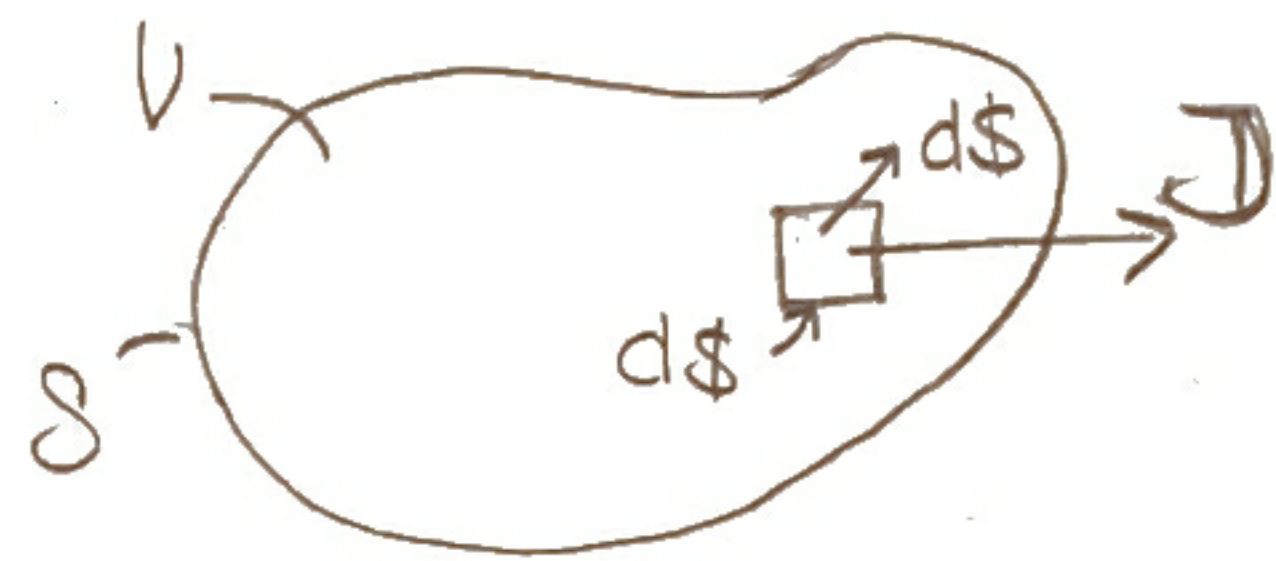
$$\Delta i = \left(\sum_j N_j q_j v_j \right) \cdot \Delta \mathcal{S}$$

Definiera strömtäthet $\mathbf{J} = \sum_j N_j q_j \mathbf{v}_j$,

då kan vi uttrycka $di = \mathbf{J} \cdot d\mathcal{S}$

Kontinuitetsekvationen, 5-4

Laddningar är oförstörbara



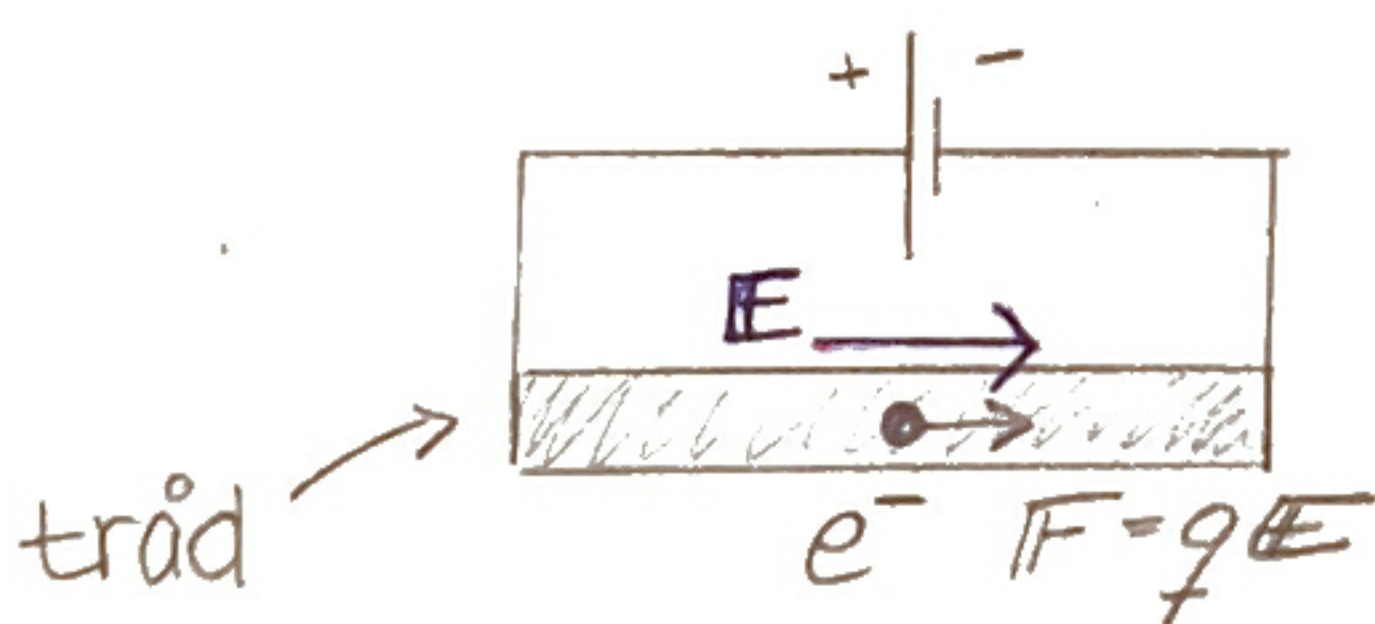
$$\Delta Q = -i \Delta t = -\Delta t \oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathcal{S}$$

$$\Rightarrow \frac{-dQ}{dt} = \oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathcal{S} \quad \text{kontinuitetskv. på integralform}$$

$$= \nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

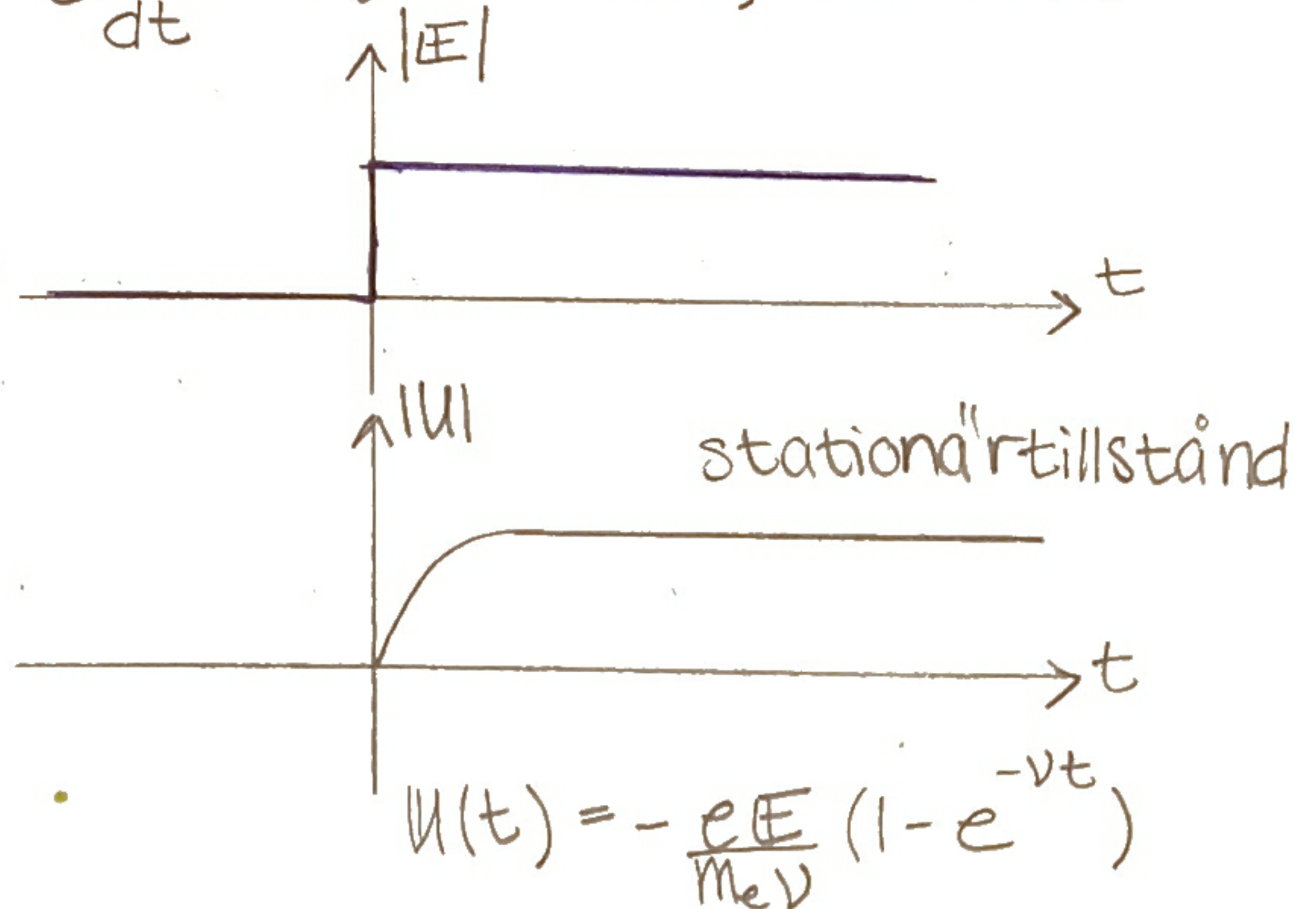
Vid stationär tillstånd $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$, $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$ (likström)

Ohms lag för metaller, 5-2



Elektronens rörelse

$$m_e \frac{dv}{dt} + m_e \nu v = -eE, \text{ kan lösas}$$



Stationärt tillstånd ($t \rightarrow \infty$)

$$u = -\frac{eE}{m_e \nu} = -\mu_e E \quad \nu = \text{kollisionsfrekvens}$$

$\mu_e =$ mobilitet

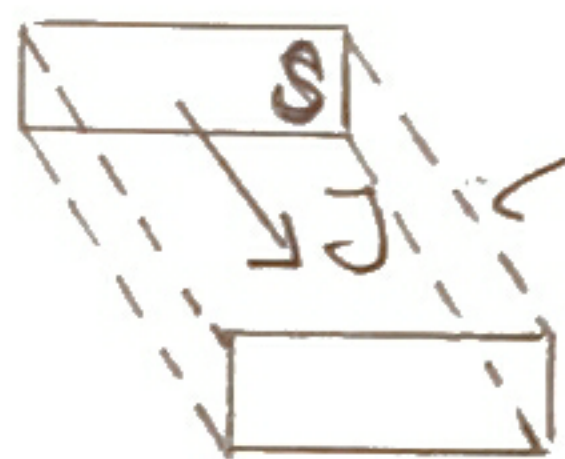
Definiera ström

$\sigma =$ konduktivitet

$$\underline{\underline{J}} = -eNu = -eN\mu_e E = \frac{Ne^2}{m_e \nu} E = \underline{\underline{\sigma E}}$$

$$\text{Ohms lag } J = \sigma E$$

Ohms lag som $U = RI$



$$J = \sigma E$$

$$\int_V J dV = \sigma \int_V E dV$$

$$J s l = \sigma E s l \Rightarrow \underbrace{Js}_I = \underbrace{\frac{\sigma s}{l}}_{1/R} \underbrace{El}_V, \quad \text{Resistans } R = \frac{l}{\sigma s}$$

Joules lag, 5-5

$$\text{Effekt } P = UI$$

Arbete för att flytta en laddning q i ett fält E
en sträcka Δl

$$\Delta W = qE \Delta l$$

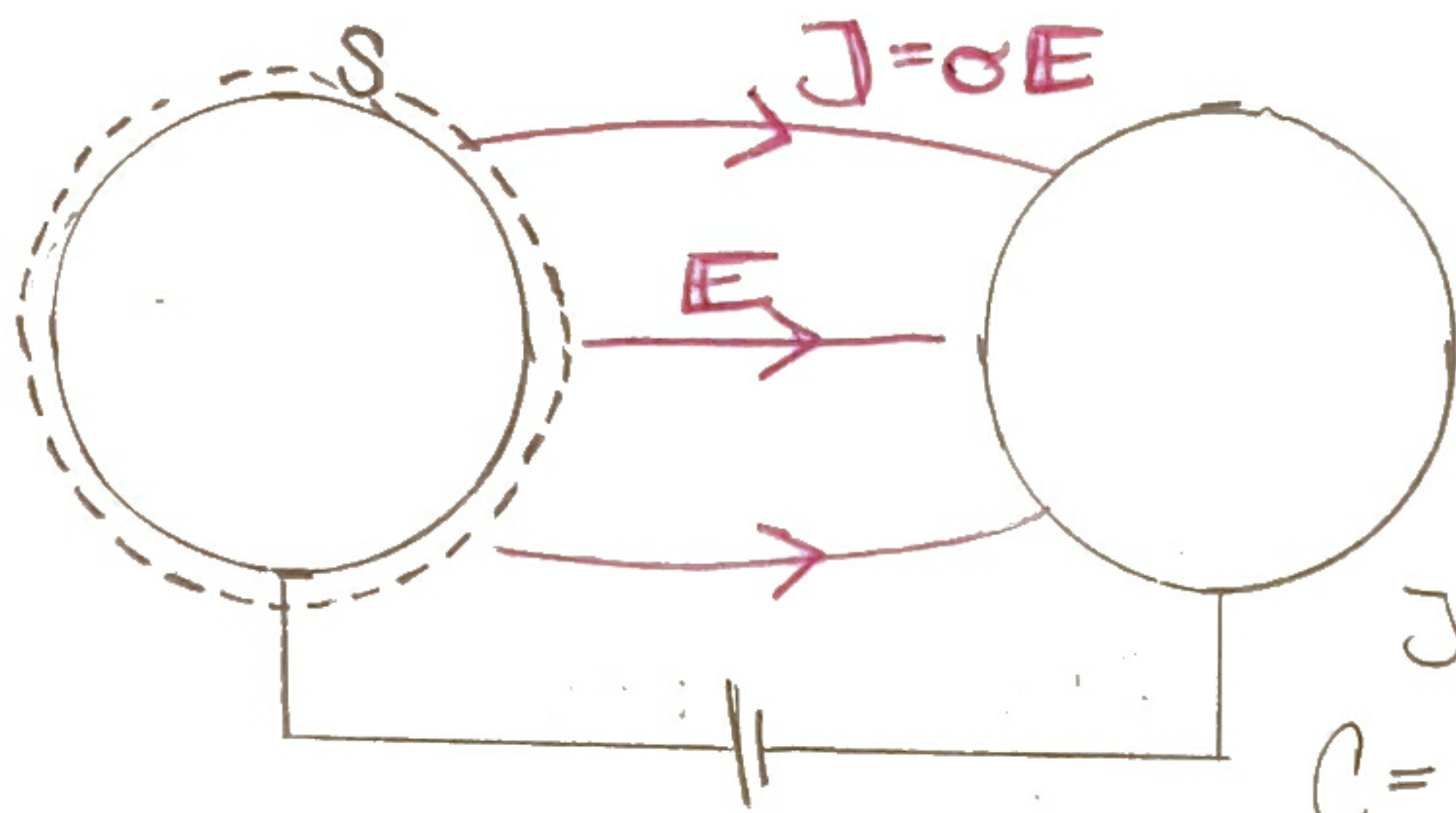
$$\text{Effekt } \frac{\Delta W}{\Delta t} = qE \frac{\Delta l}{\Delta t}, \quad P = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta W}{\Delta t} = qE u$$

$$\text{I en volym } dV: \quad dq = \sum_j P_j = E \cdot \sum_j N_j q_j u_j dV = E \cdot J dV = \frac{J}{\sigma} \cdot J dV$$

$$\text{Effekttäthet } \frac{dP}{dV} = E \cdot J \quad [\text{W/m}^3]$$

$$\text{För en volym } P = \int_V E \cdot J dV \quad [\text{W}]$$

15/11 Resistansberäkning, 5-7



Resistans $R = \frac{\Delta V}{I}$

Konduktans $G = \frac{I}{R}$

Jmf. kapacitansberäkningar

$$C = \frac{Q}{|\Delta V|} = \frac{\oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s}}{\left| \int_1^2 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \right|} = \epsilon \frac{\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}}{\left| \int_1^2 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \right|}$$

$$\frac{1}{R} = G = \frac{I}{|\Delta V|} = \frac{\oint \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s}}{\left| \int_1^2 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \right|} = \sigma \frac{\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}}{\left| \int_1^2 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \right|}$$

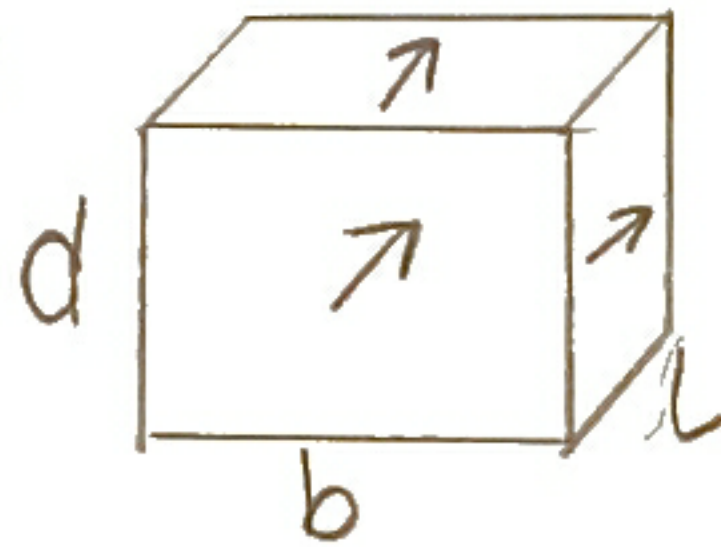
konstant i rummet

Med ϵ och σ konstanta $\frac{G}{C} = \frac{\sigma}{\epsilon}$

Seriekoppling $R = \int dR$

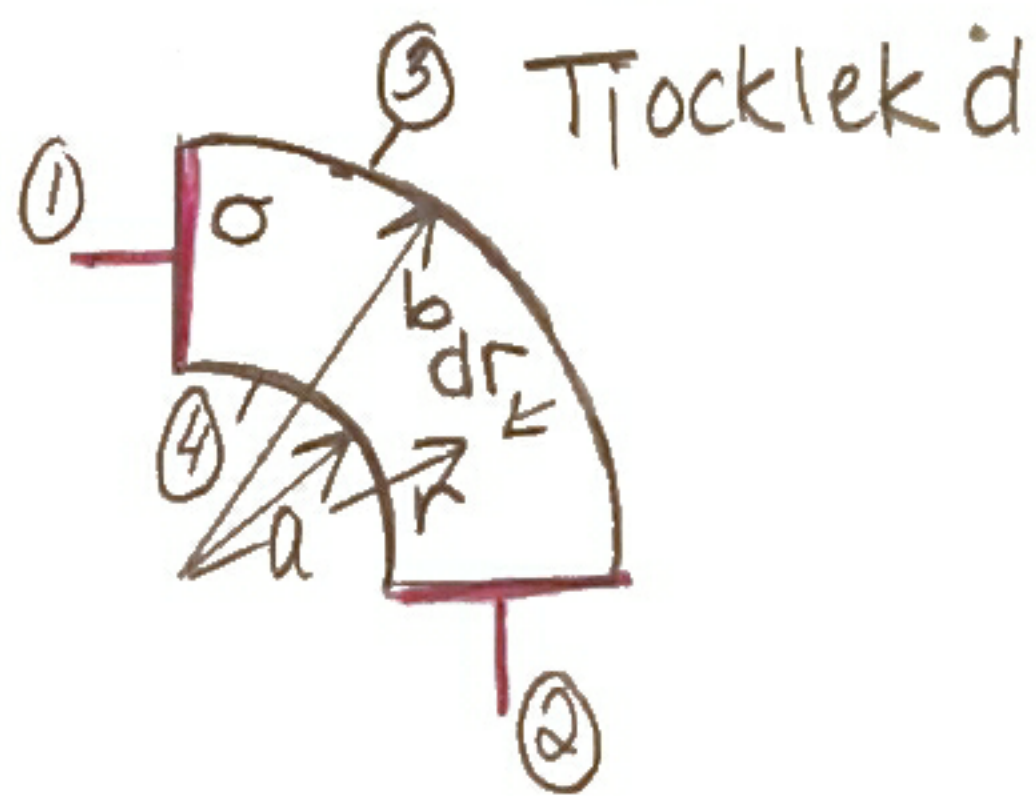
Parallellkoppling $\frac{1}{R} = G = \int dG$

Resistans för rät block



$$R = \frac{L}{\sigma b d}$$

Ex 5-6 (typ)



Kan summera parallella strömrör

$$dR_{12} = \frac{1}{\sigma} \frac{\pi r}{2} \frac{1}{d \cdot dr}$$

$$dG_{12} = \frac{1}{dR_{12}}$$

$$G_{12} = \int_a^b \frac{\sigma d dr}{\frac{\pi r}{2}}$$

Kan summera "strömplattor" i serie

$$dR_{34} = \frac{1}{\sigma} \frac{dr}{\pi r d}$$

$$R_{34} = \int_a^b \frac{dr}{\sigma \pi r d}$$

Allmänt gäller $R_{12} \cdot R_{34} = \left(\frac{l}{\sigma d}\right)^2 = \xi^2$ ytressitivitet

Approximativ resistansberäkning (ej i Cheng)

Sats 1. En given ström som flyter i en isotrop ledare av god. form, fördelar sig s.a. totala värmeutv. blir så liten som möjligt.

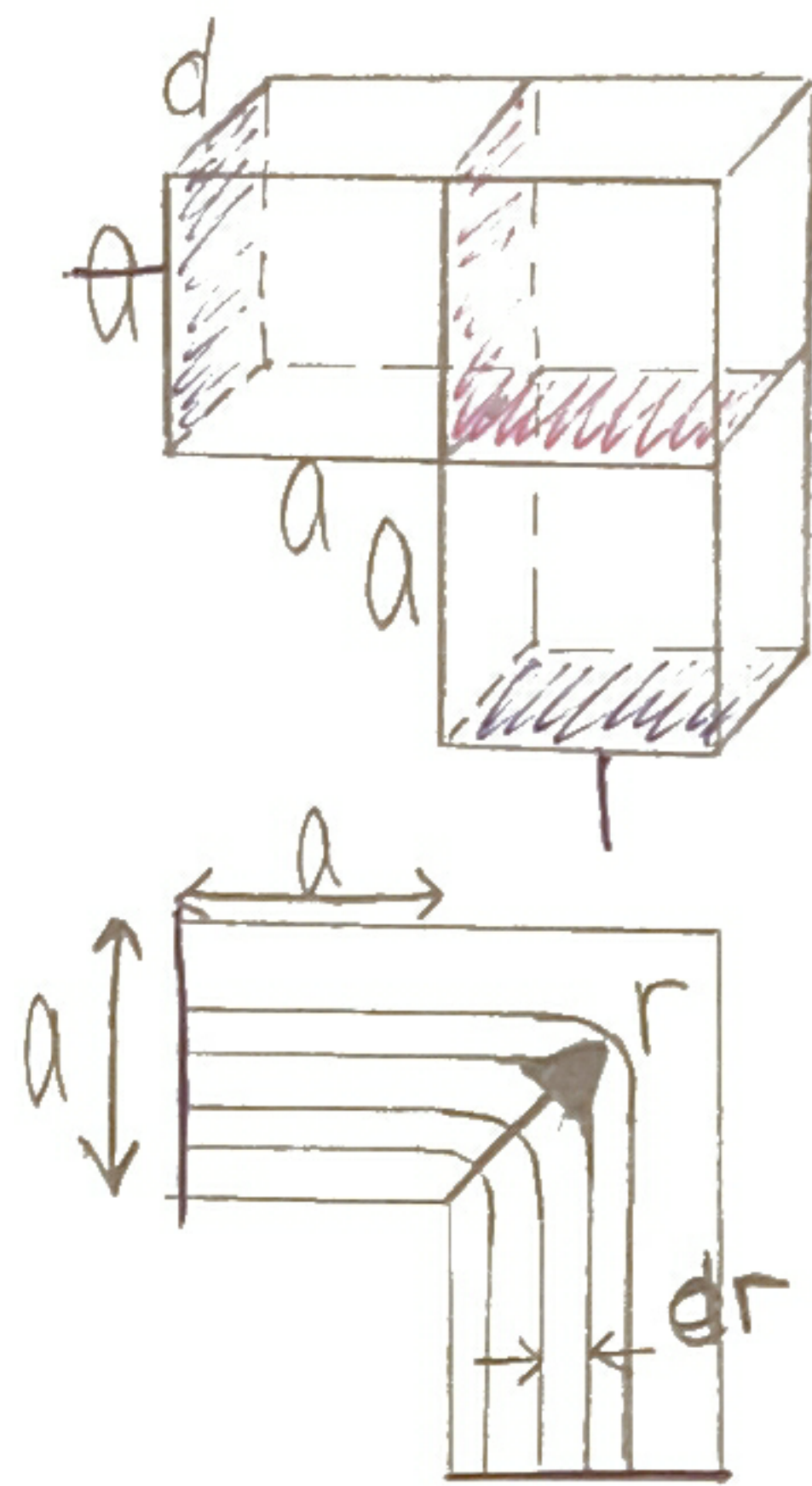
Sats 2. -||- potentialskillnad -||-

Följsats. Varje ökning/minskning av resistiviteten, $1/\sigma$, någonstans i en ledare medför ökning/minskning av total resistans

Sats 3. Varje approx. strömfördelning ger för stort värde på beräknad resistans; varje approx. potentialfördelning ger för litet värde på resistansen, jämfört med den faktiska resistansen.

Räkneregeln • om man lägger tunna, isolerande skikt som bildar strömrör, så ger beräkningen för stor resistans,
• om man lägger tunna, oändligt gott ledande skikt, bildar man ekvipotentialytter, & beräkningen ger för liten resistans.

Ex:



Undre gräns

$$R_{\text{undre}} = 2 \frac{a}{\sigma d} = \frac{2}{\sigma d}$$

Övre gräns

$$dG = \frac{\sigma d dr}{2a + \frac{\pi r}{2}}$$

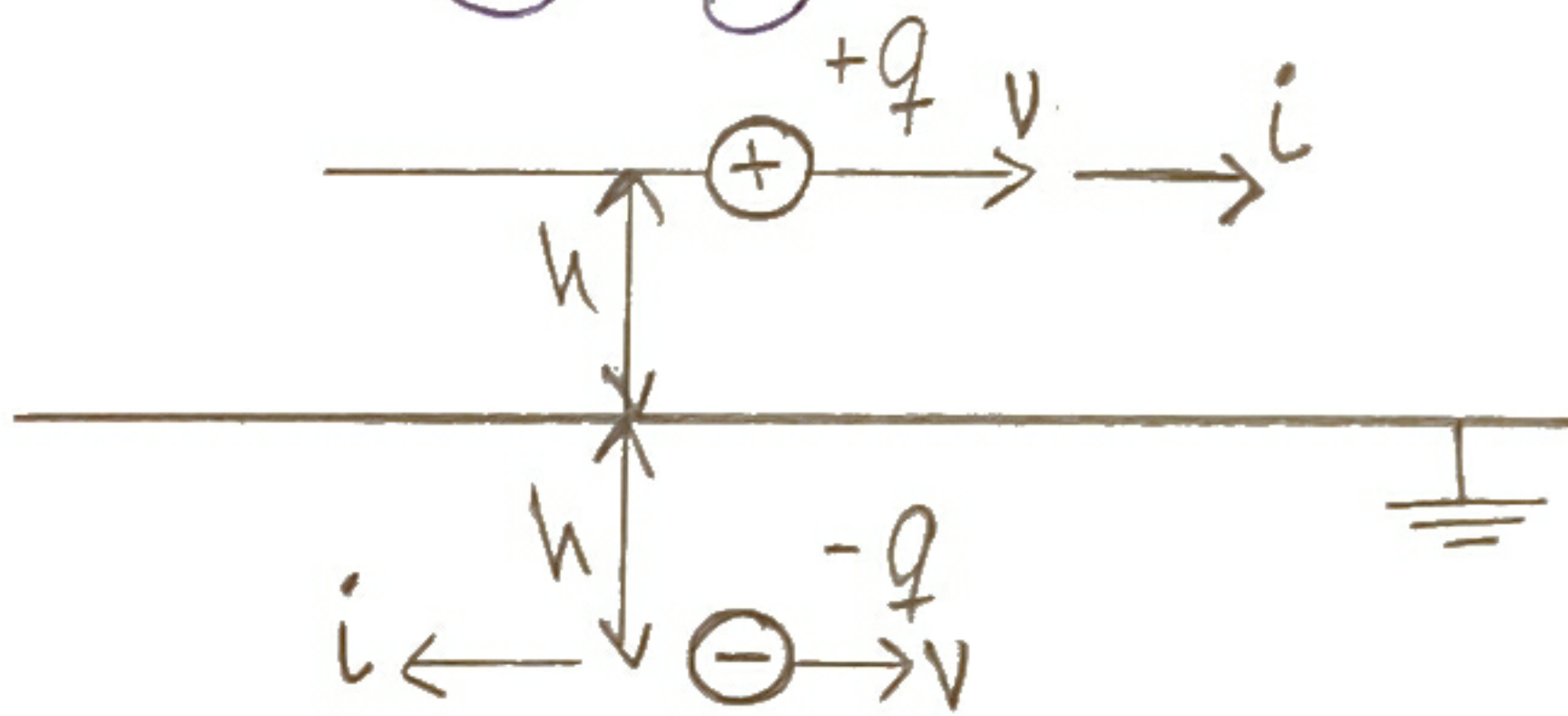
$$G = \sigma d \int_0^a \frac{dr}{2a + \frac{\pi r}{2}} = \frac{2\sigma d}{\pi} \ln\left(1 + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$R_{\text{övre}} = \frac{1}{G} = \frac{\pi}{2\sigma d} \frac{1}{\ln\left(1 + \frac{\pi}{4}\right)}$$

Detta ger

$$\frac{2}{\sigma d} < R < \frac{2,71}{\sigma d}$$

Speglingsmetoden vid strömningsproblem (efter Cheng)



Läs själv kap.

5-3 batteri

5-4 laddning på metall

5-6 randvillkor för \mathcal{J}

17/11 Magnetiska fältet, 6-1, 6-2

Kraft på stillastående laddning $F_e = qE$

Kraft på laddning i rörelse $F = F_e + F_m = q(E + v \times B)$

B = magnetfält, v = laddningens hastighet

Postulaten

$$\nabla \cdot B = 0$$

$$\nabla \times B = \mu_0 J$$

permeabilitet vakuum
 $4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Vs/Am}$

Vi vet att divergensen av rotation $\equiv 0$

$$\Rightarrow 0 \equiv \nabla \cdot (\nabla \times B) = \mu_0 \nabla \cdot J$$

\Rightarrow kontinuitetsekv. för likström

Postulat på integralform

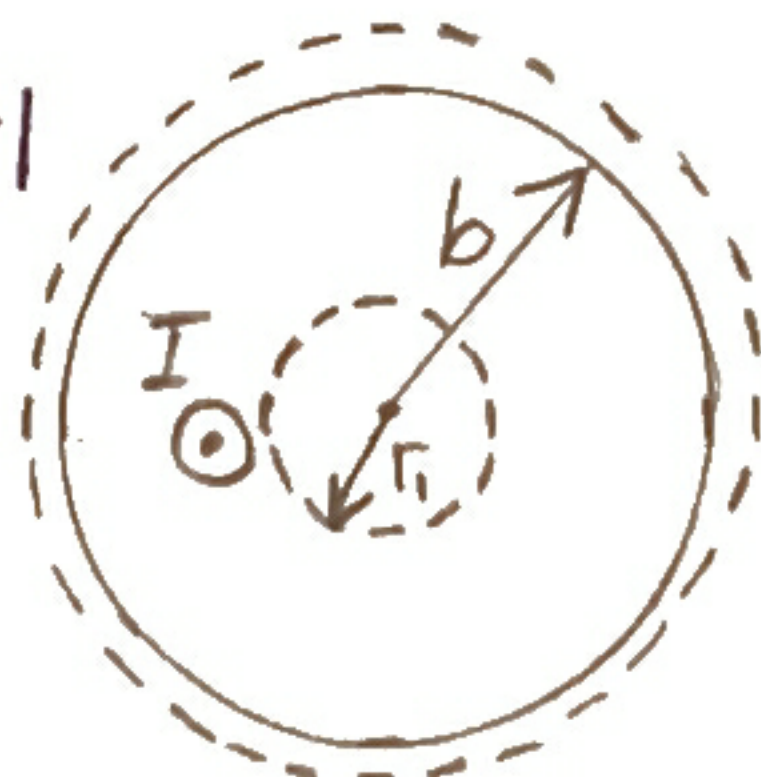
$$\oint_S B \cdot ds = 0 \quad \text{stokes ger}$$



$$\oint_C B \cdot dl = \mu_0 I$$



Ex 6-1

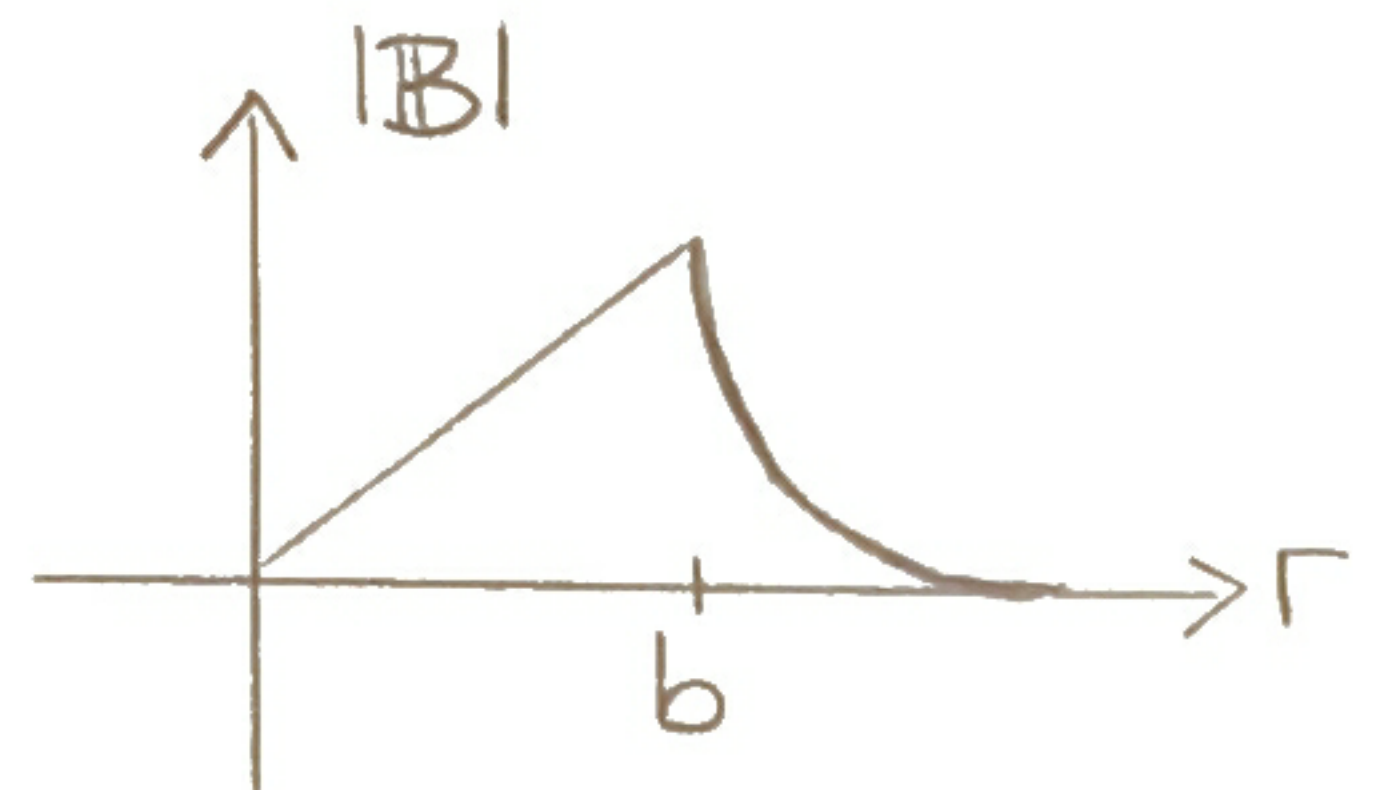


$$B_\phi = \hat{\phi} B_\phi, \quad dl = r d\hat{\phi}$$

$$\oint_C B \cdot dl = \int B_\phi r d\hat{\phi} = B_\phi 2\pi r = \mu_0 I_1$$

$$I_1 = \frac{I}{\pi b^2} \pi r^2 = \frac{r^2}{b^2} I$$

$$\Rightarrow B_\phi = \hat{\phi} B_\phi = \hat{\phi} \frac{\mu_0 r I}{2\pi b^2}$$



Utanför

$$B_{\phi 2} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r_2}$$

Innesluten ström

Ex 6-2 hemma!

Magnetiska vektorpotentialer, 6-3

Vet att $0 \equiv \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A})$.

Eftersom $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$. Låt oss def. $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$, $[\mathbf{A}] = \text{Vs/m}$

Vi måste ändå def. $\nabla \cdot \mathbf{A}$, så $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$

$$\Rightarrow \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{J}$$

Vi väljer $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \Rightarrow -\nabla^2 \mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{J}$ dvs. Poissons ekv.
$$\begin{cases} -\nabla^2 A_x = \mu_0 J_x \\ -\nabla^2 A_y = \mu_0 J_y \\ -\nabla^2 A_z = \mu_0 J_z \end{cases}$$

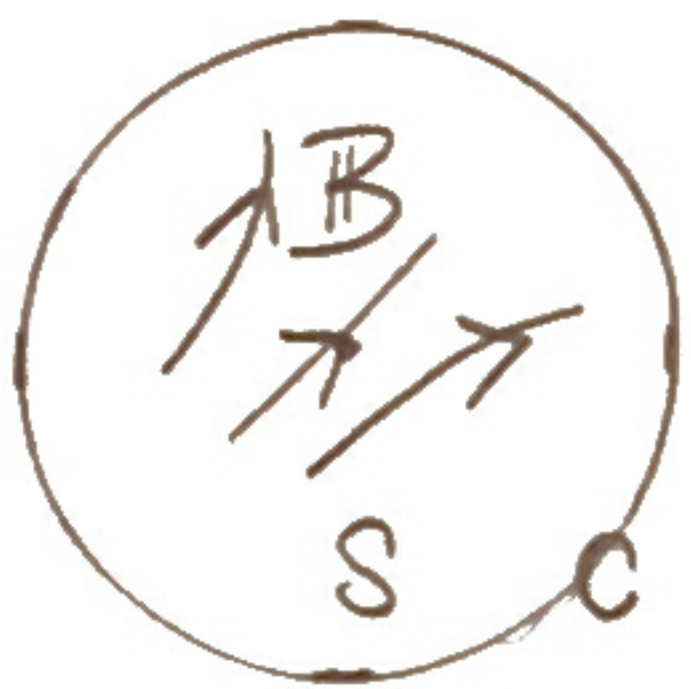
Lösningar av Poissons ekv. kräver

randvillkor, $A(\infty) = 0$

Kom ihåg från E-statik, $V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \frac{\rho}{R} dV'$
P.S.S. för \mathbf{A} .

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{\mathbf{J}}{R} dV'$$

Magnetiska flödet, 6-3



$$\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \int_S \nabla \times \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$$

\mathbf{A} har samma riktning som \mathbf{J}

\mathbf{B} går i cirkel runt \mathbf{J} enl. högerhandsregeln.

Biot-Savatslag, 6-4

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{R}')}{R} dV', \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

prim. koord. = källpkt

icke-prim = fältpkt

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \nabla \times \frac{\mathbf{J}(\mathbf{R}')}{R} dV' =$$

$$R = |\mathbf{R}' - \mathbf{R}|$$

Använd vektoridentiteten

$$\nabla \times f \mathbf{G} = f \nabla \times \mathbf{G} + \nabla f \times \mathbf{G} \quad \text{där } f = \frac{1}{R}, \mathbf{G} = \mathbf{J}$$

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{1}{R} \underbrace{\nabla \times \mathbf{J}(\mathbf{R}')}_{=0} + \nabla \left(\frac{1}{R} \right) \times \mathbf{J}(\mathbf{R}') dV' =$$

(J beror av \mathbf{R}'
 ∇ på \mathbf{R} ej \mathbf{R}')

Använd $\nabla \frac{1}{R} = -\frac{\hat{\mathbf{R}}}{R^2}$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{R}') \times \hat{\mathbf{R}}}{R^2} dV'$$

imf E-statiken $\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \frac{\rho \hat{\mathbf{R}}}{R^2} dV'$

Uttryck Γ strömelement

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{d\mathbf{l}' \times \mathbf{R}}{R^3}$$

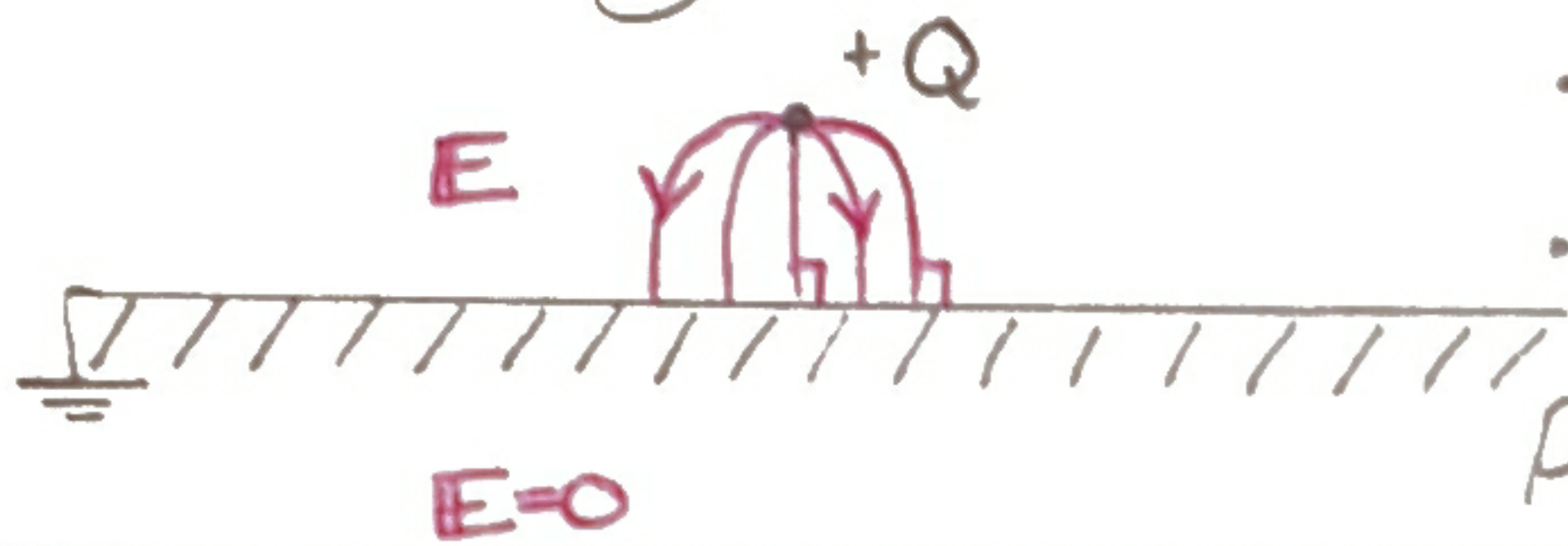
Ex hemma 6-4, 6-5, 6-6!

Storgruppsövning 14/11

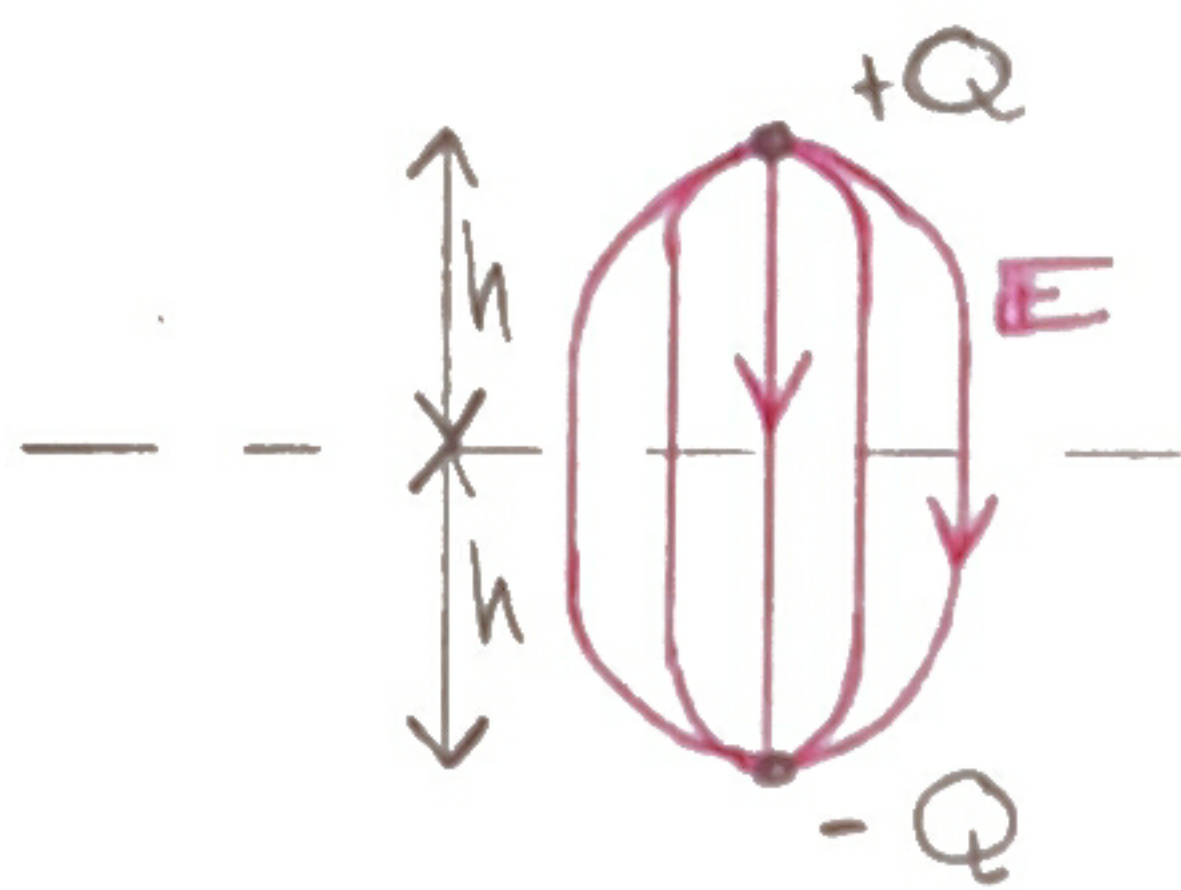
Speglingsmetoden

- Ett sätt att förenkla geometrin
- För ett givet område med givna randvillkor finns bara en lösning till $\Delta V = \rho / \epsilon_0$

T. ex. laddning över ett jordat plan



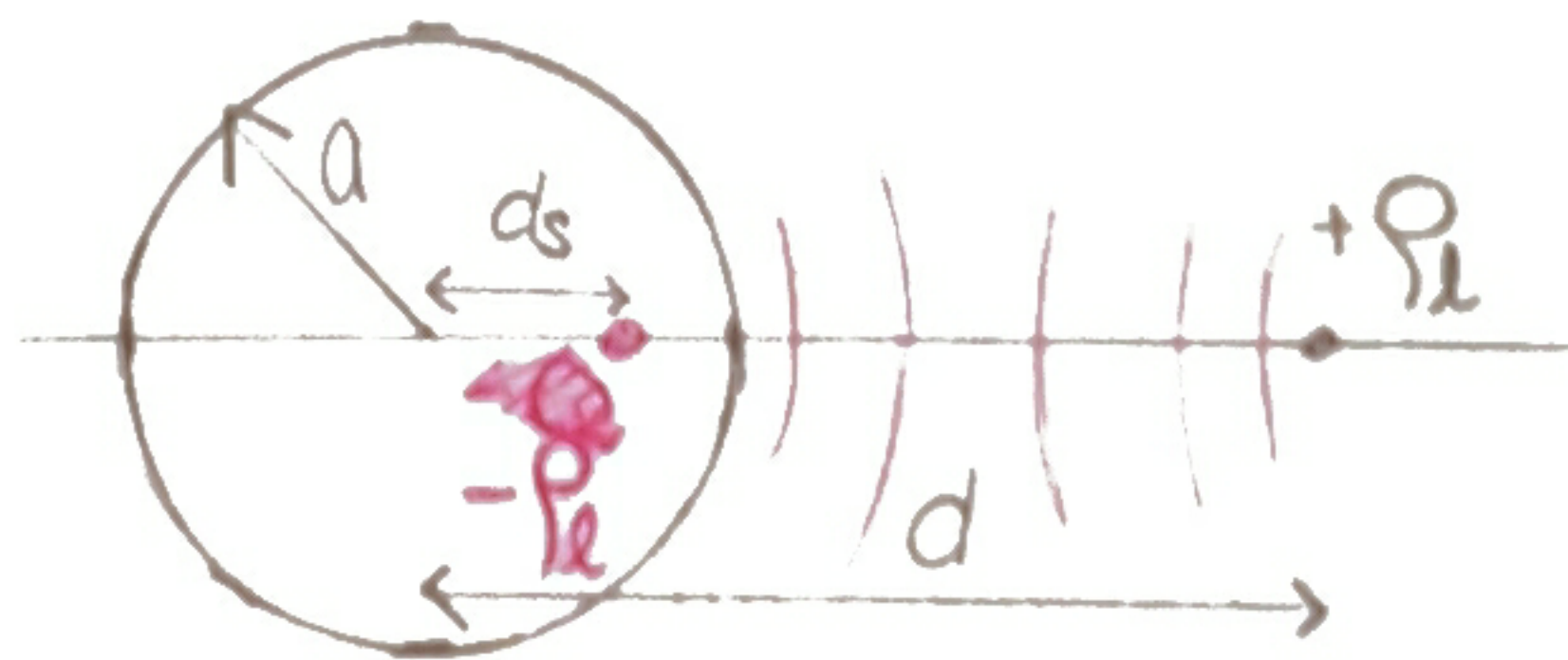
- Nära laddningen: radiellt
 - Nära planet: normalt
- Planet jordat \Rightarrow potentialen = 0.



Vi kan ersätta planet med en motsatt laddning.

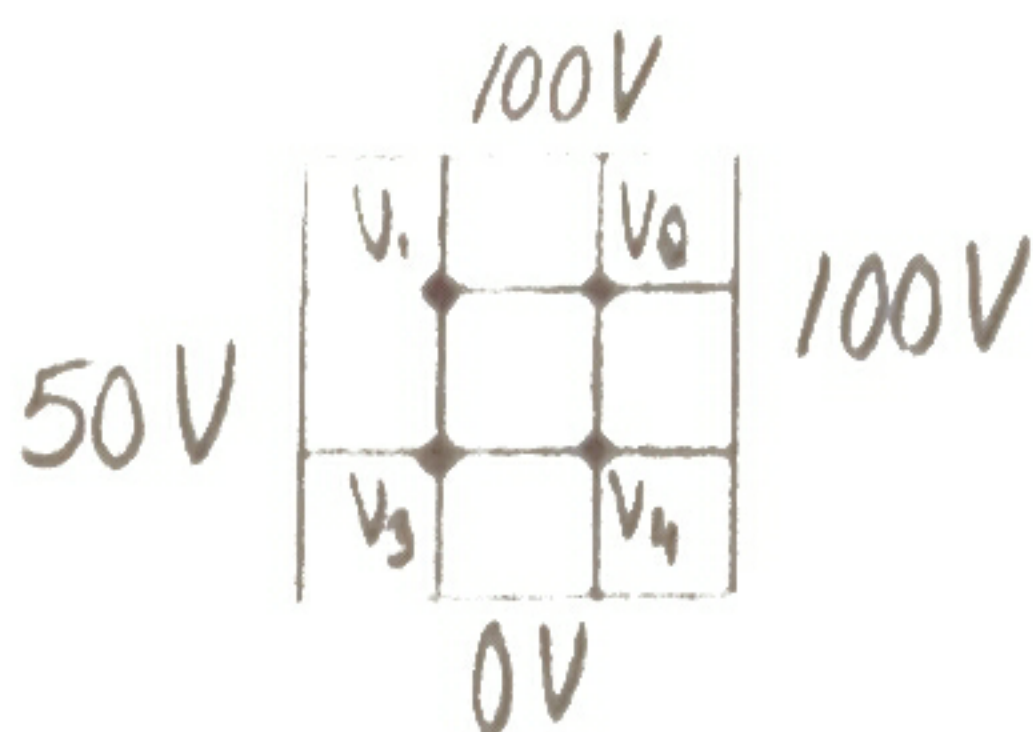
Men lösningen gäller bara i vårt ursprungliga område.

För cylinder



$$ds = \frac{a^2}{d}$$

5.-2 Beräkna potentialfördelningen i det kvadratiska området med potentialer enl. fig.



a) använd matrismetoden

$$V_1 = (50V + 100V + V_2 + V_3) \cdot \frac{1}{4}$$

$$V_2 = (V_1 + 100V + 100V + V_4) \cdot \frac{1}{4}$$

$$V_3 = (50V + V_1 + V_4 + 0V) / 4$$

$$V_4 = (V_3 + V_2 + 100V + 0V) / 4$$

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 150 \\ 200 \\ 50 \\ 100 \end{bmatrix} [V] \Rightarrow \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 68,75 \\ 81,25 \\ 43,75 \\ 56,25 \end{bmatrix} [V]$$

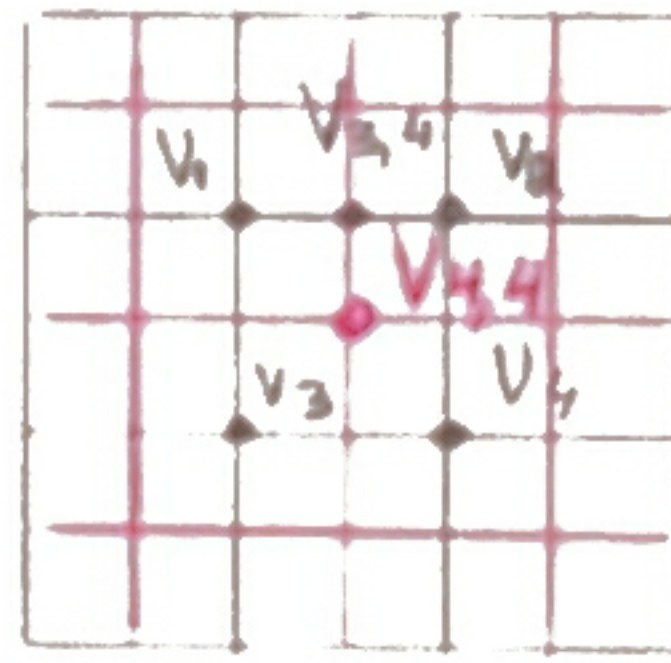
b) utnyttja dessa & beräkna potentialen i 49 punkter.

Börjar med mitt punkterna i de tidigare cellerna

$$\bullet V_1 = V_{3,3} \bullet V_2 = V_{3,5} \quad \text{ex: } V_{4,4} = \frac{1}{4} (V_1 + V_2 + V_3 + V_4) = 60,5 V$$

$$\bullet V_{4,4}$$

$$\bullet V_3 = V_{5,3} \bullet V_4 = V_{5,5}$$



Beräkna nu p.s.s.

$$\bullet V_{0,4}$$

$$V_{3,3} \bullet V_{3,4} \bullet V_{3,5}$$

$$\bullet V_{4,4}$$

c) Iterera fram bättre lösningar

$$\text{Visar ej, men principen är } V_{i,j}^{n+1} = (V_{i,j-1}^n + V_{i,j+1}^n + V_{i-1,j}^n + V_{i+1,j}^n) / 4$$

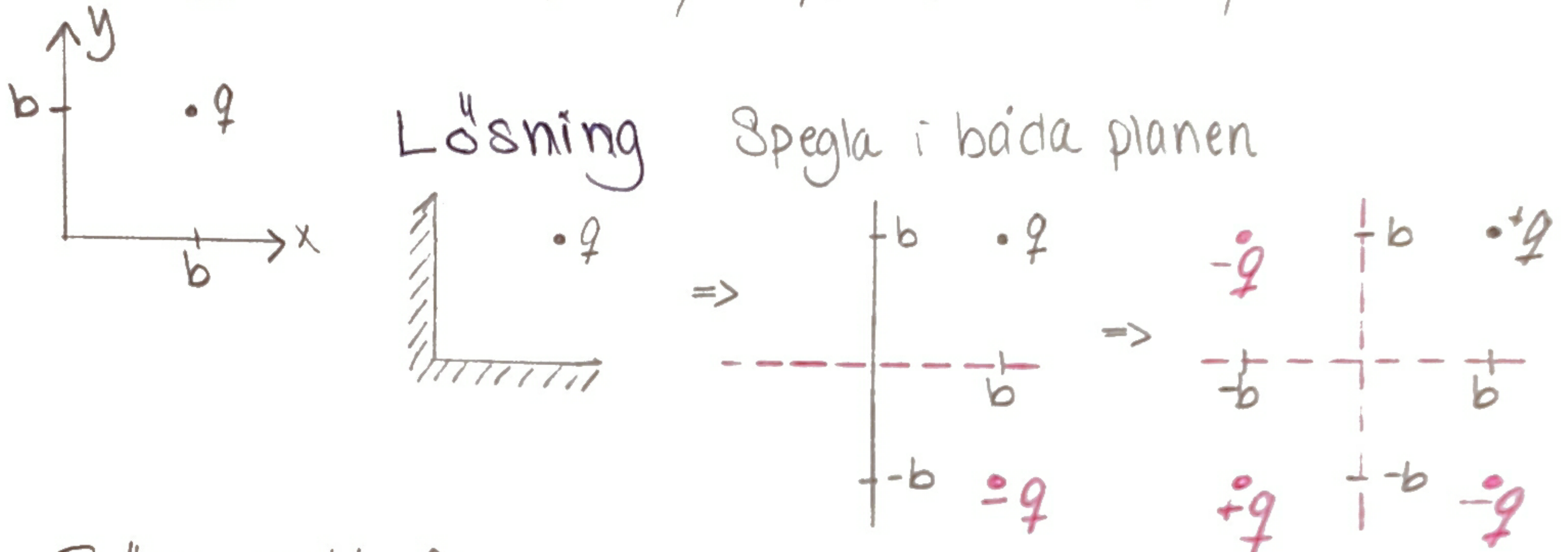
För $V_{i,j}^0$ använder vi våra beräknade värden ovan.

d) Analytiskt: $V_{4,4} = 60,5 V$ samma

Andra punkter får större fel pga asymmetrier

5-17 En liten metallsfär med laddning q och radie a befinner sig på avståndet b ($b \gg a$) från ett jordade metallplan.

Beräkna kraften på sfären samt dess potential.



Börjar med kraften.

Fältet från övriga laddningar är

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{-q}{(2b)^2} \hat{x} - \frac{q}{(2b)^2} \hat{y} + \frac{q}{8b^2} \frac{\hat{x} + \hat{y}}{\sqrt{2}} \right] = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{(1 - 2\sqrt{2})}{8\sqrt{2}b^2} [\hat{x} + \hat{y}]$$

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E}$$

För sfärens potential summerar vi alla pktladd. bidrag till potentialen & evaluerar på sfärens yta.

Potential från en pktladdning ges av $V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}$

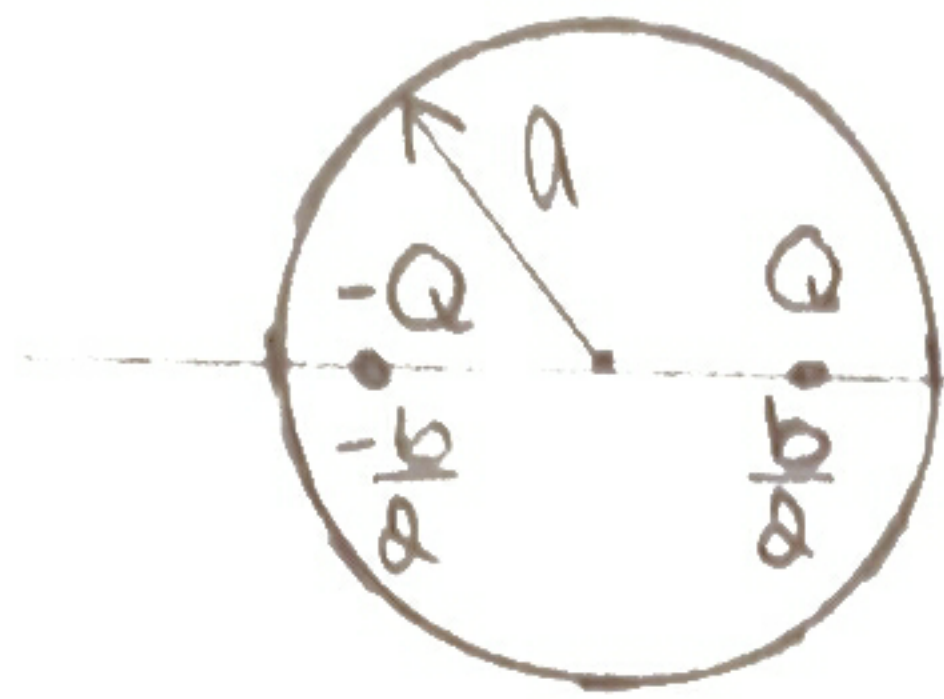
$$\Rightarrow V_{\text{sfer}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{a} - \frac{1}{2b} - \frac{1}{2b} + \frac{1}{2\sqrt{2}b} \right]$$

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{a} + \frac{1 - 2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}b} \right)$$

5-7 Metallrör, radie a .

2 parallella linjeladdningar inuti, enl. fig.

Bestäm b s.a. ingen elektrostatisk kraft verkar på trådarna.

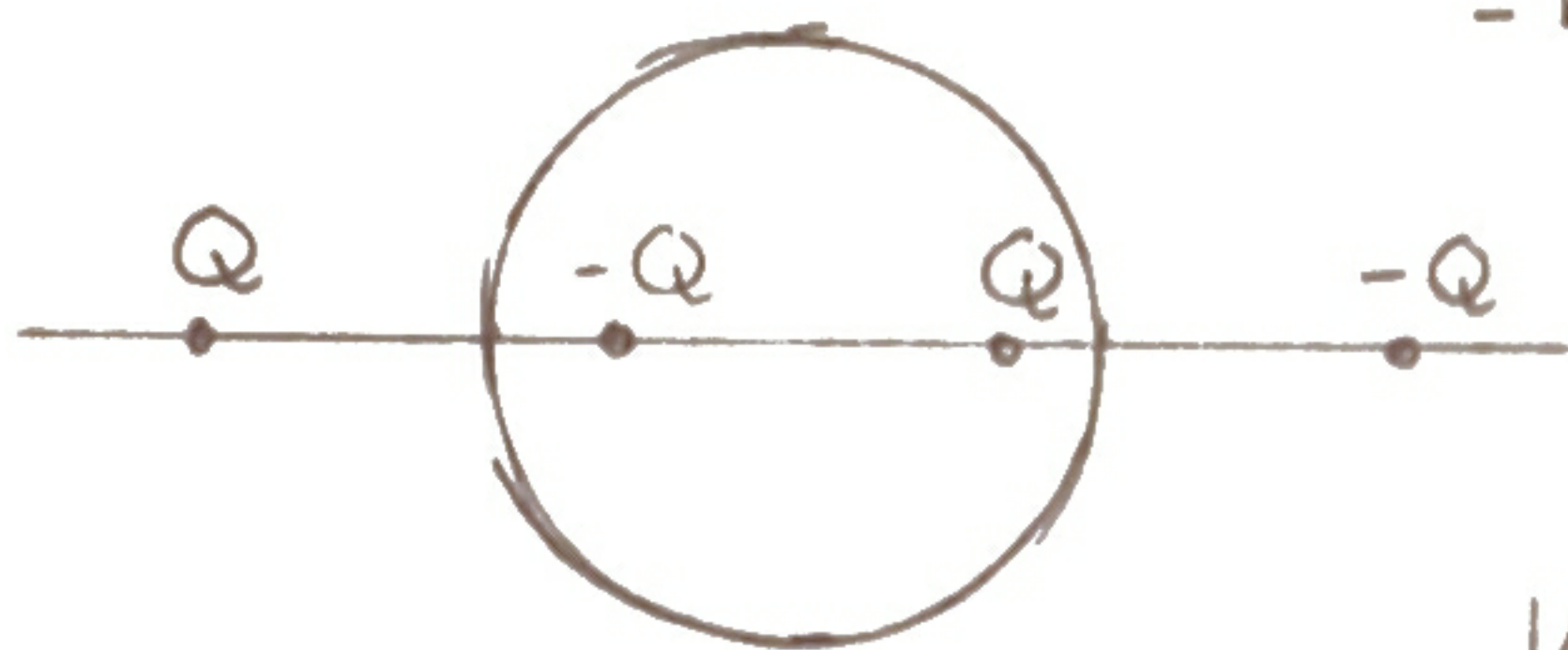


Lösning Spegla trådarna i cylindriska ytan.

Laddningarna ska ha samma belopp men olika tecken.

De ska befinna sig på ett avstånd

$$d = \frac{a^2}{\pm b/a} = \pm \frac{a^3}{b}$$



Beräkna kraften på tråden vid $x = \frac{b}{2}$.

Vi summerar då upp fältbidragen från övriga trådar.

$$E = \frac{Q/L}{2\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{\left(\frac{b}{2} + \frac{a^2}{b}\right)} - \frac{1}{b} + \frac{1}{\left(\frac{b}{2} - \frac{a^2}{b}\right)} \right) \hat{x} = \frac{Q/L}{2\pi\epsilon_0} \left(\frac{2b}{b^2 + 4a^2} - \frac{1}{b} + \frac{2b}{4a^2 - b^2} \right) \hat{x}$$

Vet $F = 0 \rightarrow E = 0$

$$\Rightarrow \frac{2b^2(4a^2 - b^2) - (b^2 + 4a^2)(4a^2 - b^2) + 2b(b^2 + 4a^2)}{(b^2 + 4a^2)b(4a^2 - b^2)} = 0$$

$$\Rightarrow b^4 - 16a^4 + 16a^2b^2 = 0 \quad \text{kom ihåg: } a \text{ given, } b \text{ sökt.}$$

$$\Rightarrow b = \pm \sqrt{-8 \pm \sqrt{80}} a = \pm 2a \sqrt{-2 \pm \sqrt{5}}$$

Storgruppsövning 17/11

Ledningsström: drift rörelse av laddning
i metall.

Konvektionsström: masstransport av laddningar
i vakuum.

Strömtäthet: $\mathbf{J} = \sum N_i \cdot q_i \cdot \mathbf{u}_i$ $[\mathbf{J}] = \text{A/m}^2$

Givet laddningstäthet: $\mathbf{J} = \rho \mathbf{u}$

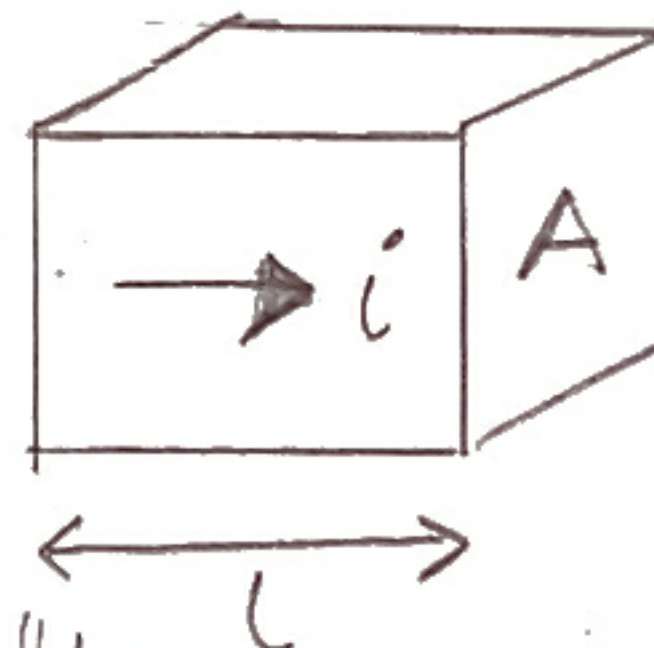
Ström genom yta: $i = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s}$



Kontinuitetsekv: $\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$

Stationär ström: $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$

Resistans: $R = \frac{L}{\sigma A}$



Approximativ resistansberäkning

"vid svåra geometrier"

• Övre gräns: antag annan strömfördelning än den verkliga.

=> implicit antagande $\sigma = 0$ dvs. $R = \infty$, för vissa delar av geometrin

=> övre gräns.

• Undre gräns: antag andra ekvipotentialytor än de verkliga

=> implicit antagit $\sigma = \infty$ dvs. $R = 0$

=> undre gräns.

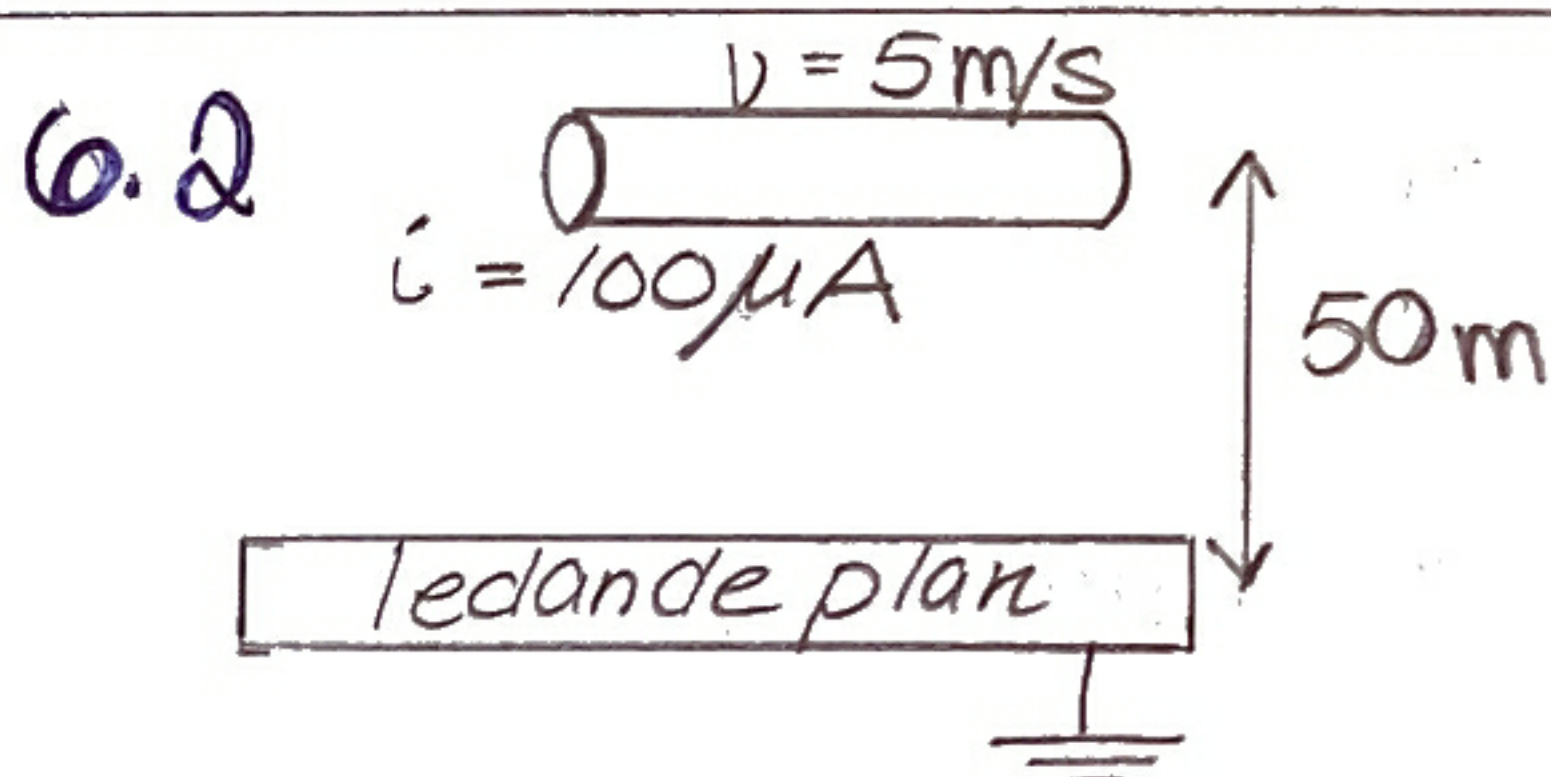
6.1 i ett medium med konduktivitet (ledningsförmåga) σ & permittivitet ϵ , som båda varierar i rummet, uppstår i allmänhet en rymdladdning ρ då en ström flyter genom materialet.

Sök ett samband mellan σ & ϵ s.d. $\rho=0$

Lösning $\nabla \cdot \mathbb{D} = \rho$, kontinuitetsekv. $\nabla \cdot \mathbb{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ ty $\rho=0$
 $\mathbb{D} = \epsilon \mathbb{E}$, produktregeln divergens $\nabla \cdot (f\mathbb{A}) = \nabla f \cdot \mathbb{A} + f(\nabla \cdot \mathbb{A})$
 $\mathbb{J} = \sigma \mathbb{E}$,

$$\rho = \nabla \cdot \mathbb{D} = \nabla \cdot (\epsilon(\mathbb{R})\mathbb{E}) = \nabla \cdot \left(\frac{\epsilon(\mathbb{R})}{\sigma(\mathbb{R})} \mathbb{J} \right) = \nabla \left(\frac{\epsilon(\mathbb{R})}{\sigma(\mathbb{R})} \right) \cdot \mathbb{J} + \frac{\epsilon(\mathbb{R})}{\sigma(\mathbb{R})} \underbrace{\nabla \cdot \mathbb{J}}_{=0}$$

$$\rho = 0 \Rightarrow \nabla \frac{\epsilon(\mathbb{R})}{\sigma(\mathbb{R})} = 0 \Rightarrow \frac{\epsilon(\mathbb{R})}{\sigma(\mathbb{R})} = k \text{ konstant}$$



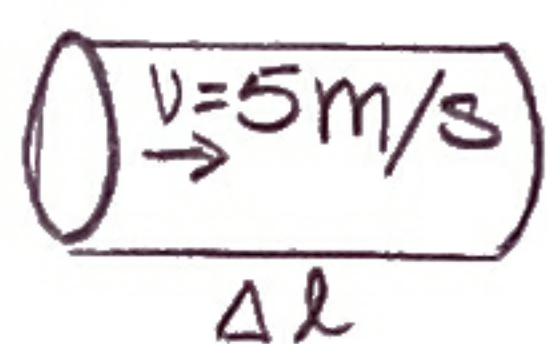
Laddade partiklar släpps ut ur en skorssten 50m över marken. De bildar, vid en vindstyrka på 5m/s, ett långt horisontellt cylindriskt

laddat moln. Strömstyrkan som svarar mot utsläppet är $100 \mu\text{A}$.

Beräkna elektriska fältstyrkan vid marken rakt under molnet, marken antas vara ledande.

Lösning laddningsfördelning ρ_l i molnet

bit av molnet



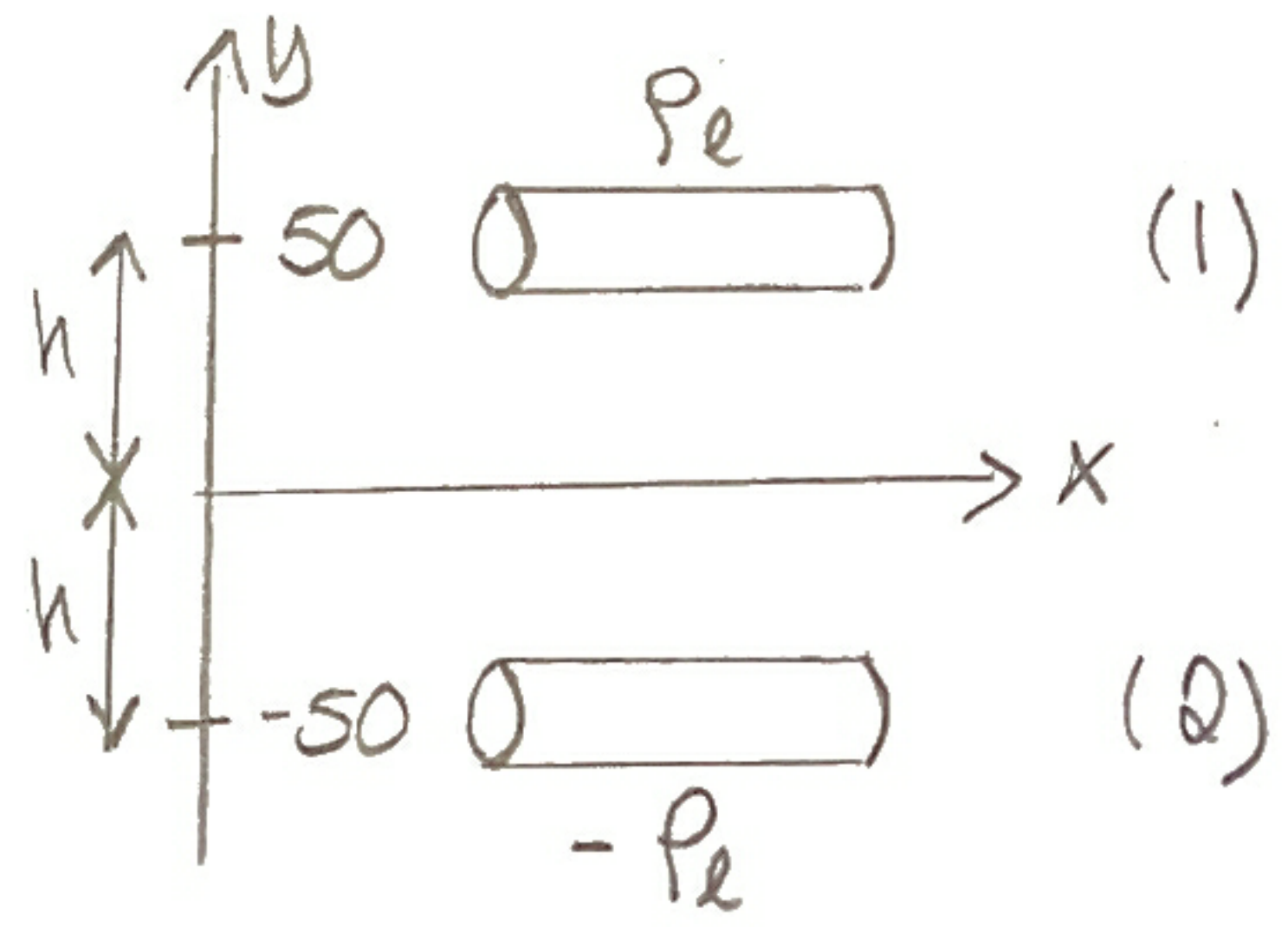
$$\Delta Q = \rho_l \Delta l$$

$$\Delta l = v \Delta t$$

$$i = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{\rho_l \Delta l}{\Delta t} = \frac{\rho_l v \Delta t}{\Delta t} = \rho_l v$$

$$\Rightarrow \rho_l = \frac{i}{v}$$

Speglar linjeladdningen i markplanet.



Elfält från rak linjeladdning

$$E = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0 r} \hat{r}$$

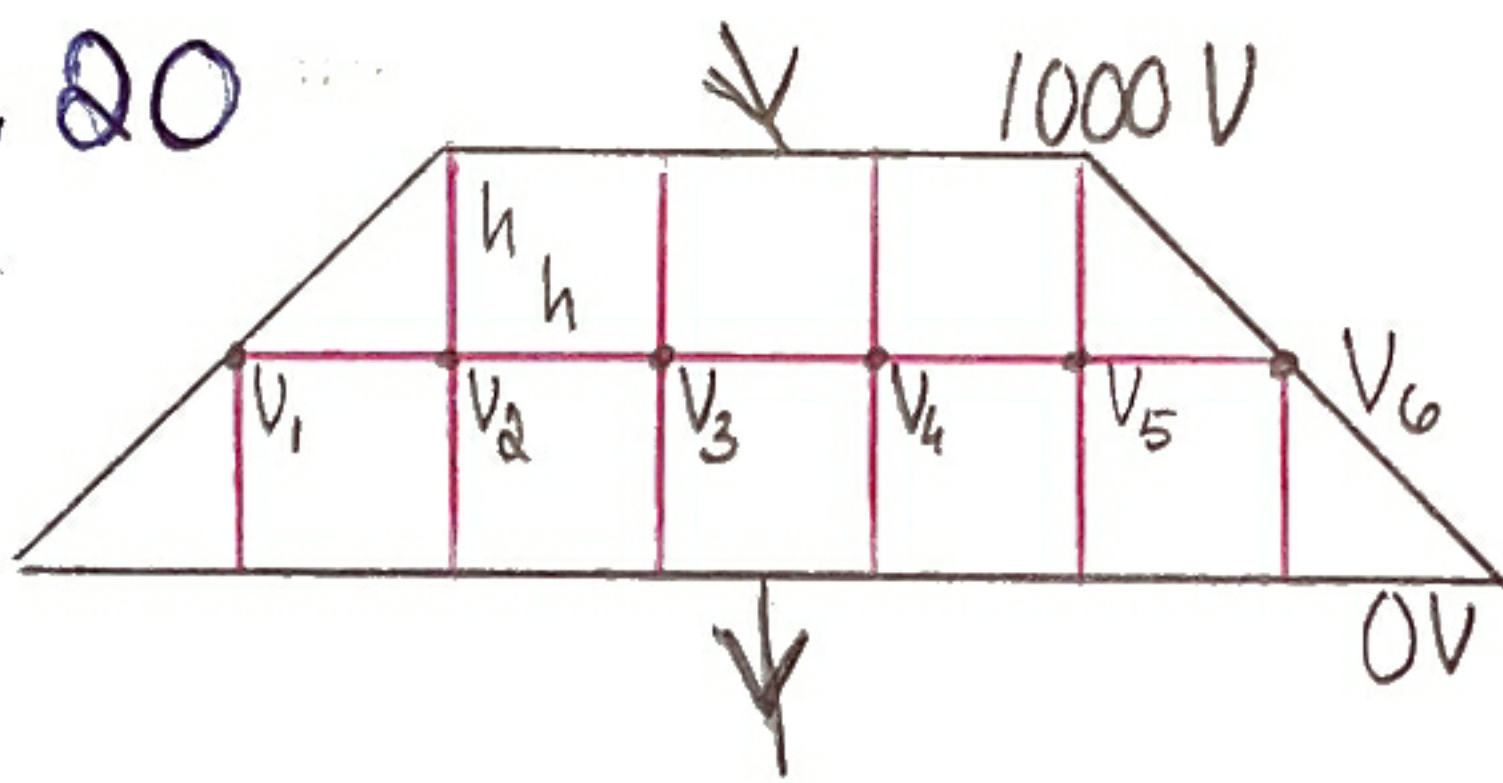
Elfält mellan linjeladdningarna

$$E(y=0) = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0 h} (-\hat{y}) + \frac{-\rho_l}{2\pi\epsilon_0 h} \hat{y} = \frac{-\rho_l}{\pi\epsilon_0 h} \hat{y} = \frac{-i}{\pi\epsilon_0 h v} \hat{y} =$$

$$(1) \quad (2)$$

$$= -\frac{100 \cdot 10^{-6}}{\frac{\pi \cdot 1 \cdot 10^{-9} \cdot 50 \cdot 5}{36\pi}} = -14,4 \text{ kV/m}$$

6.20



$$\sigma = 5 \text{ S/m}$$

tjocklek $d = 0,1 \text{ mm}$

Beräkna...

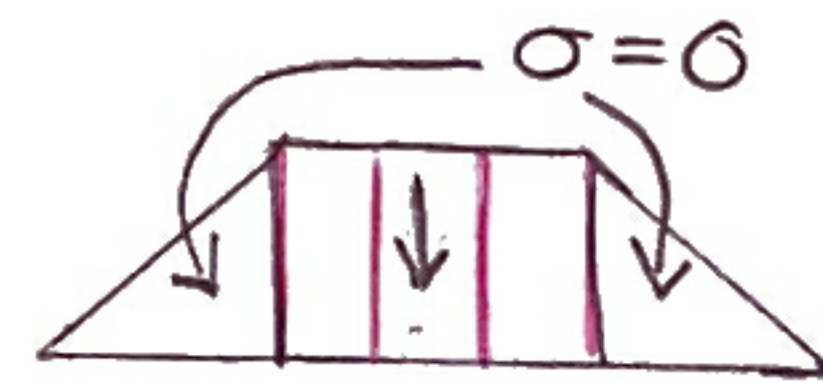
a) ...övre & undre gräns för R

b) ... V_1, \dots, V_6 numeriskt

c) uppskatta R mha. V_1, \dots, V_6

a) övre gräns: antag $\sigma = 0$ för vissa delar.

$$R_o = \frac{L}{\sigma A} = \frac{2h}{\sigma 3hd} = \frac{2}{3\sigma d} = 1333 \Omega$$

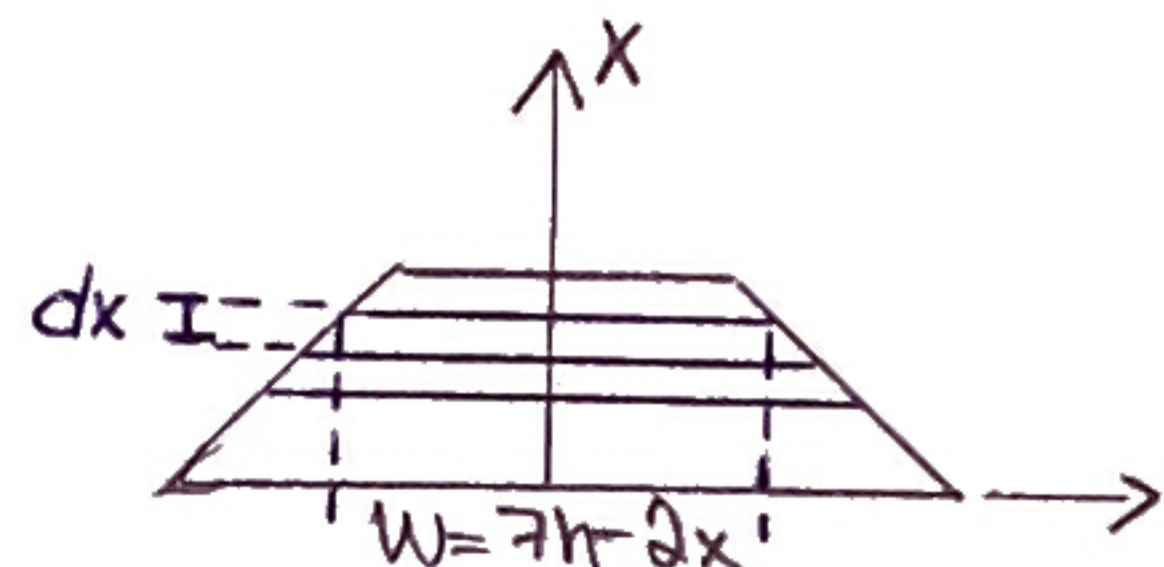


undre gräns: inför ekvipotentialytor

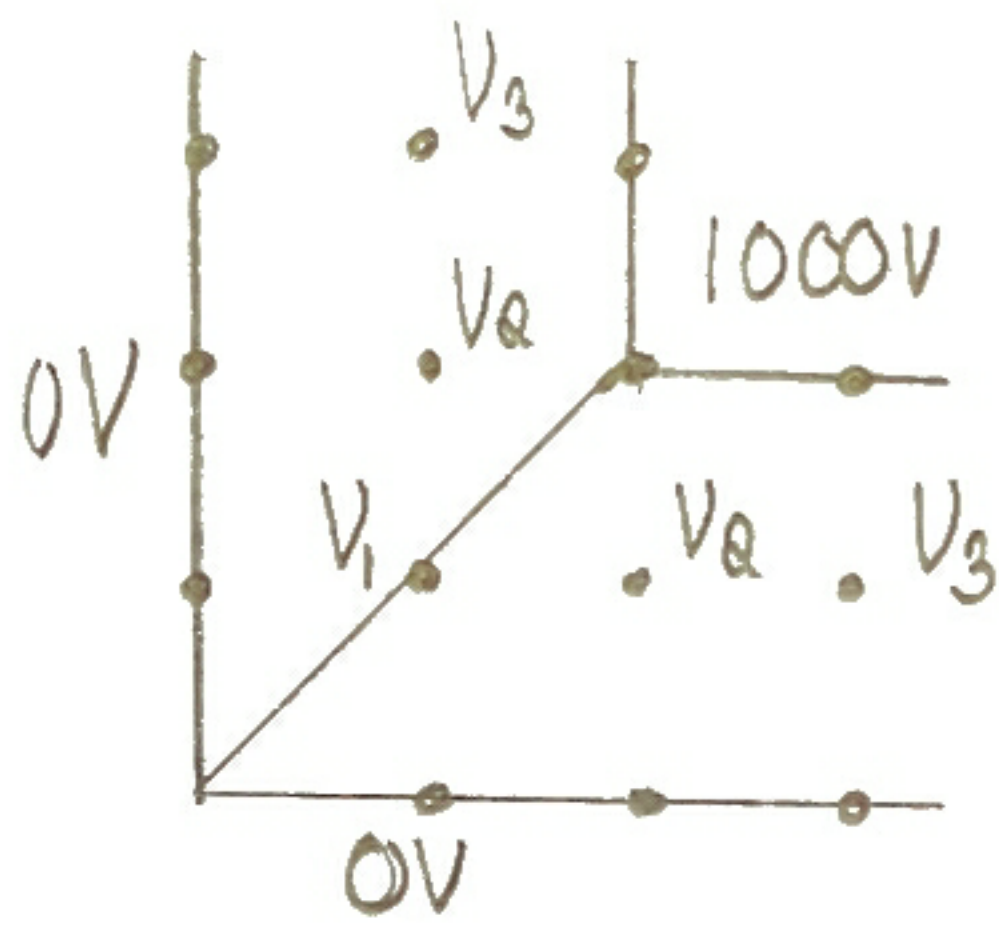
$$dR = \frac{L}{\sigma A} = \frac{dx}{\sigma d(7h-2x)}$$

$$R_u = \int_{x=0}^{2h} \frac{dx}{\sigma d(7h-2x)} = \frac{1}{\sigma d} \left[-\frac{1}{2} \ln(7h-2x) \right]_0^{2h} = \frac{1}{2\sigma d} \ln \frac{7}{3} \approx 847 \Omega$$

$$\Rightarrow R_u = 847 \Omega < R < 1333 \Omega = R_o$$

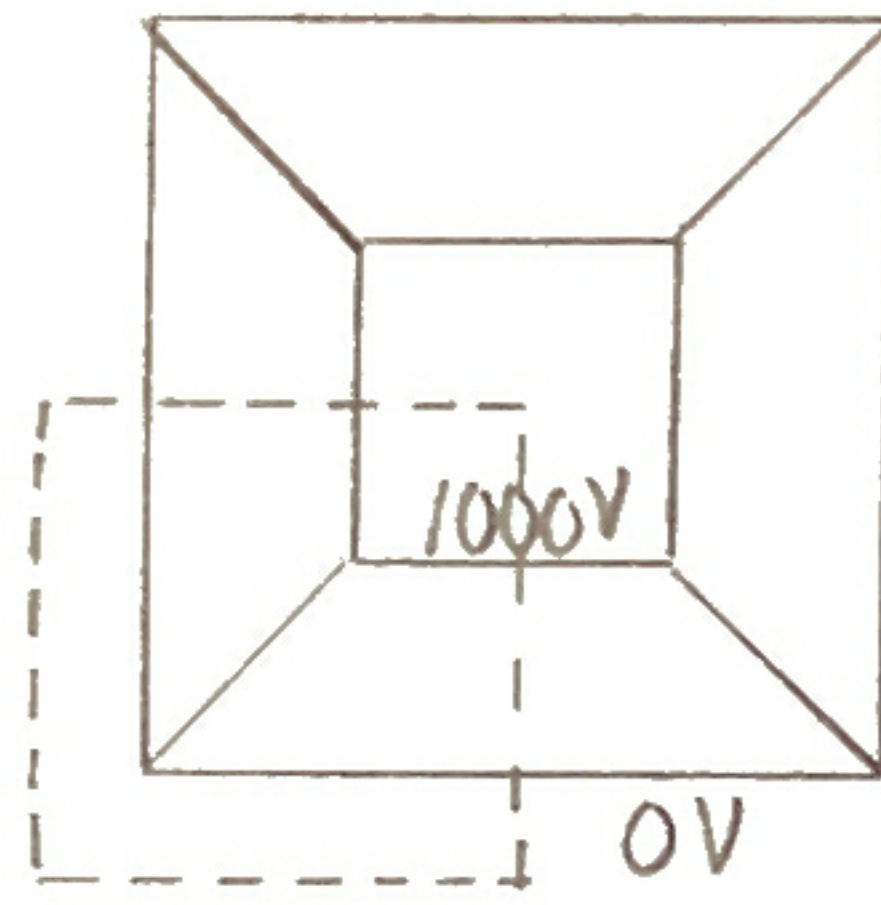


b) Speglar 3 ggr



$$V_5 = V_2 \quad V_6 = V_1$$

$$V_4 = V_3$$



$$\Delta^2 V = 0, \quad V_{i+l,j} + V_{i-l,j} + V_{i,j+1} + V_{i,j-1} - 4V_{i,j} = 0$$

$$\begin{cases} 0 + V_2 + V_2 + 0 - 4V_1 = 0 \\ V_1 + 1000 + V_3 + 0 - 4V_2 = 0 \\ V_2 + 1000 + V_3 + 0 - 4V_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} -4 & 2 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1000 \\ 1000 \end{bmatrix}, \quad \begin{matrix} V_1 = 211 \text{ V} \\ V_2 = 421 \text{ V} \\ V_3 = 474 \text{ V} \end{matrix}$$

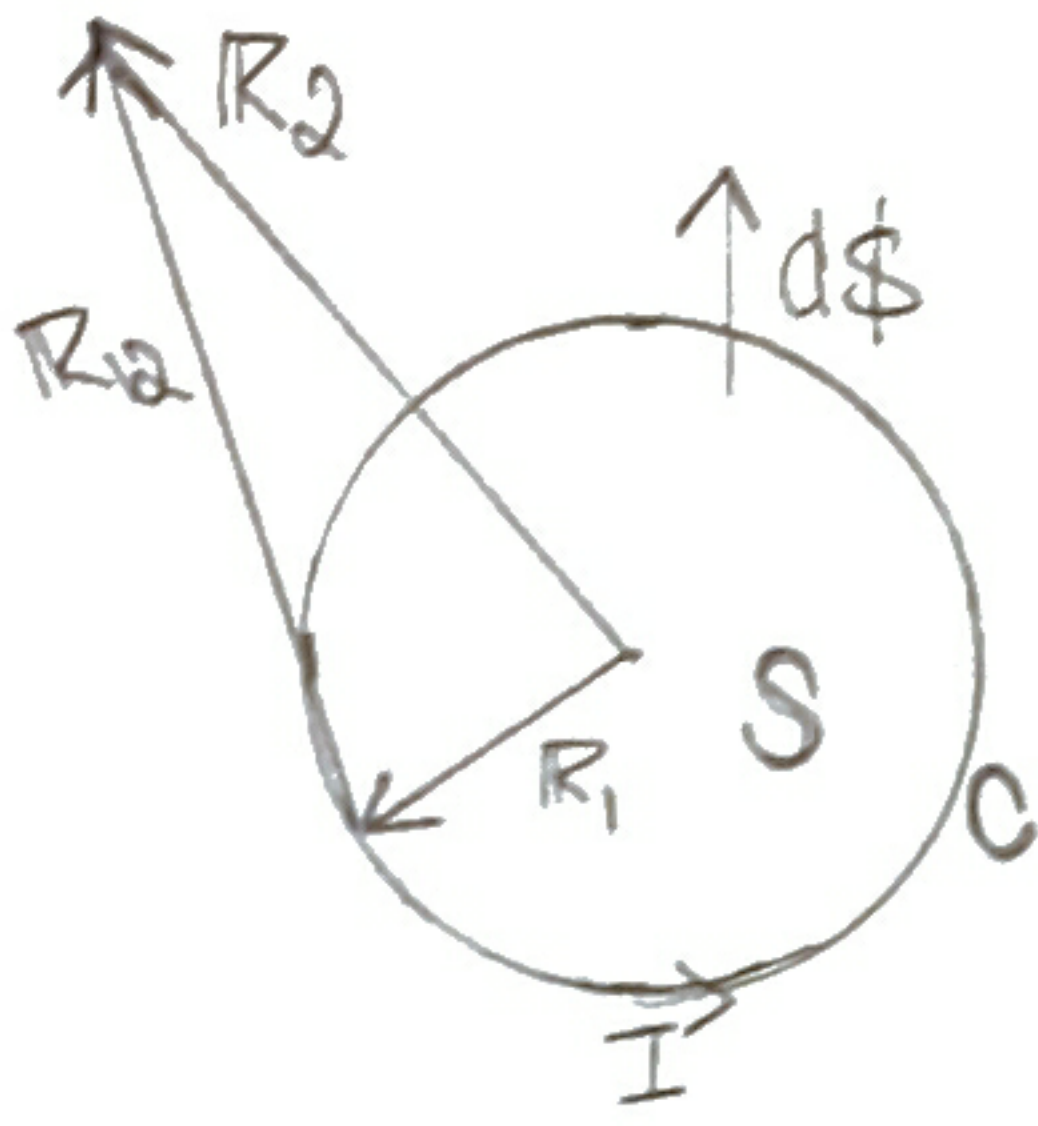
$$c) \quad i = \int \mathcal{J} d\mathcal{S} = \int_S \sigma \mathbf{E} d\mathcal{S} = 2\sigma \int_S \mathbf{E} d\mathcal{S} \approx 2\sigma \sum E_n \Delta A = 2\sigma \sum E_n h d \quad (*)$$

$$E_n = -\frac{\partial V}{\partial y} \approx -\frac{V^{\text{II}} - V^{\text{I}}}{y^{\text{II}} - y^{\text{I}}} = \frac{V^{\text{I}} - V^{\text{II}}}{y^{\text{II}} - y^{\text{I}}}$$

$$\begin{aligned} (*) &= 2\sigma \left(\frac{V_1 - 0}{h} h d + \frac{V_2 - 0}{h} h d + \frac{V_3 - 0}{h} h d \right) = 2\sigma d (V_1 + V_2 + V_3) = \\ &= 2 \cdot 5 \cdot 0,1 \cdot 10^{-3} (211 + 421 + 474) = 1,106 \text{ A} \end{aligned}$$

$$R = \frac{U}{i} = \frac{1000}{1,106} = 904 \Omega$$

22/11 Den magnetiska dipolen, 6-5 (ej 6-5.1)



$$A(\mathbf{R}_2) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_C \frac{d\mathbf{l}_1}{R_{12}} =$$

$$\left(\text{Variant på Stokes } \oint_C \frac{d\mathbf{l}_1}{R_{12}} = \int_S d\mathbf{s} \times \nabla_1 \left(\frac{1}{R_{12}} \right) \right)$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_S d\mathbf{s} \times \nabla_1 \left(\frac{1}{R_{12}} \right) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_S d\mathbf{s} \times \frac{\mathbf{R}_{12}}{R_{12}^3} \approx$$

$$\approx \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_S d\mathbf{s} \times \frac{\mathbf{R}_2}{R_2^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left(\int_S d\mathbf{s} \right) \times \frac{\mathbf{R}_2}{R_2^3} \quad \text{på långt avstånd}$$

Def. magnetiskt dipolmoment

$$m = I \int_S d\mathbf{s}$$

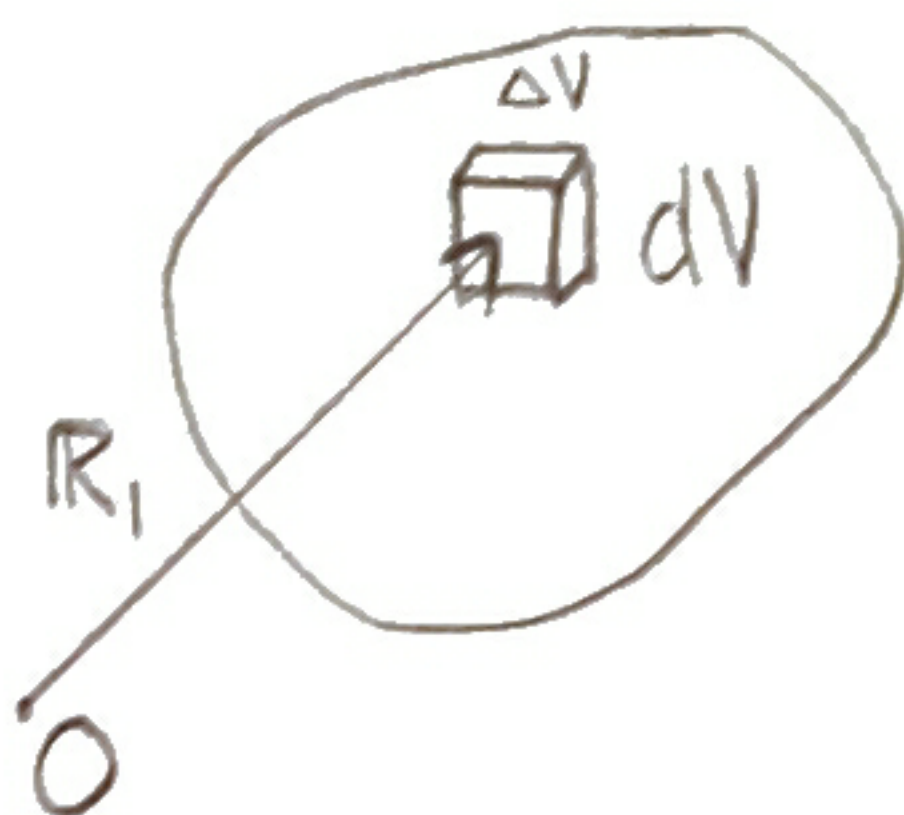
$$\Rightarrow A = \frac{\mu_0}{4\pi} m \times \frac{\mathbf{R}_2}{R_2^3}$$

I sfäriska koord. med $d\mathbf{s}$ i z -led

$$A(R, \theta, \phi) = \hat{\phi} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{m \sin \theta}{R^2}, \quad m = |m|$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = \frac{\mu_0 m}{4\pi R^3} (\hat{R} 2 \cos \theta + \hat{\theta} \sin \theta)$$

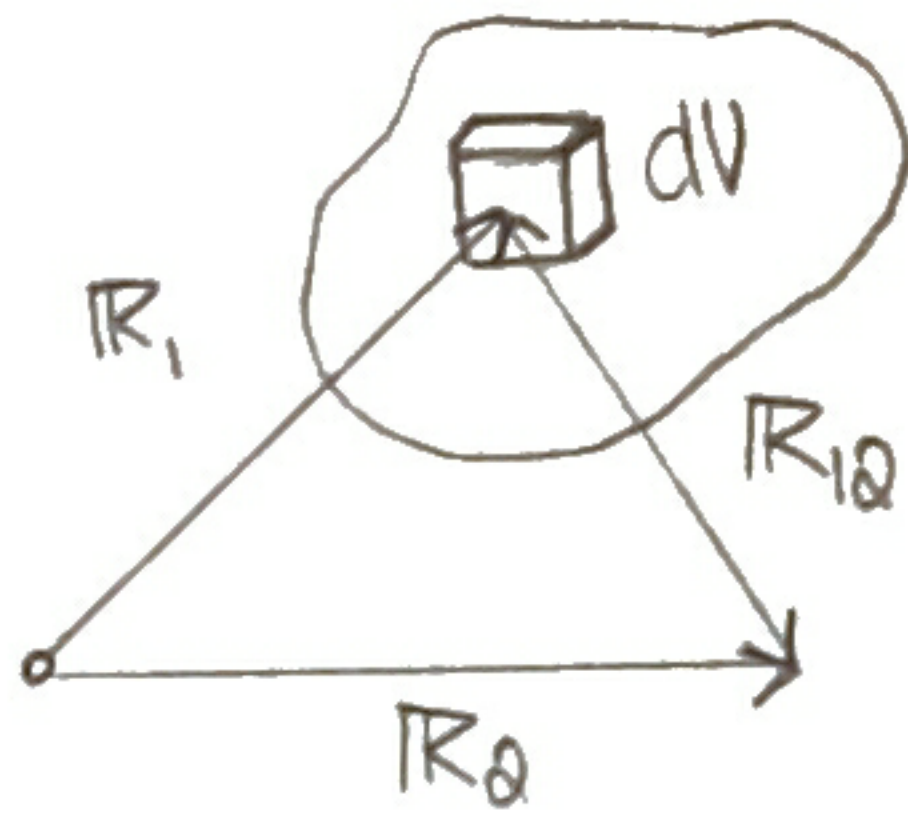
Magnetiseringsfältet \mathbf{M} , 6-6 (ej. 6-6.1)



$$\mathbf{M}(\mathbf{R}_1) = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\sum_{k=1}^{n\Delta V} m_k}{\Delta V} \quad (\text{A/m})$$

$$\text{alt. } d\mathbf{m} = \mathbf{M} dV$$

Vektorpotential från ett magnetiserat material



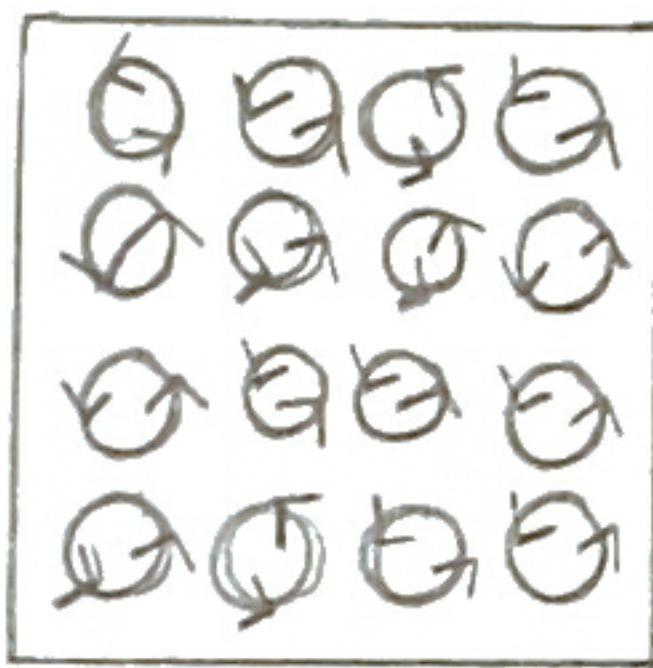
$$dA = \frac{\mu_0}{4\pi} \dim \times \frac{r_{12}}{r_{12}^3}, \quad \dim = IM dV$$

$$A(r_2) = \int_{V_1} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{IM \times r_{12}}{r_{12}^3} dV_1 = \dots =$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V_1} \nabla_1 \times \frac{IM(r_1)}{r_{12}} dV_1 + \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{S_1} \frac{IM(r_1) \times d\mathcal{S}_1}{r_{12}}$$

Identifiera $J_m(r_1) = \nabla \times IM(r_1)$ magnetiseringsströmtäthet
 $J_{ms}(r_1) = IM \times \hat{n}$ ytmagnetiseringsströmtäthet

Magnetiska material



← tvärsnitt hos magnetiskt material

H-fält, 6-7

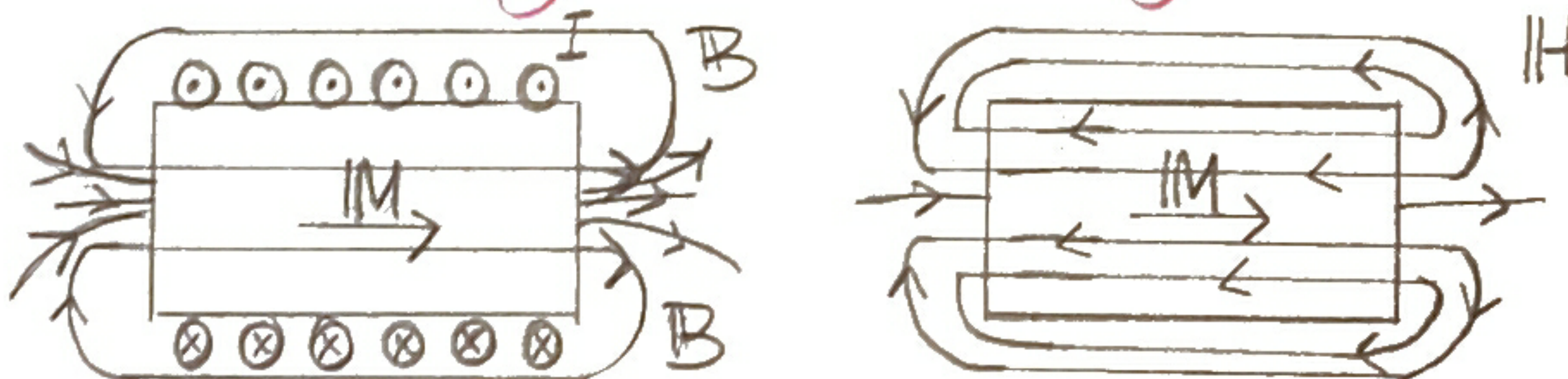
Postulatet säger: $\frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{J}_{fri} + \mathbf{J}_m = (\mathbf{J}_{fri} + \nabla \times IM)$

$\Rightarrow \mathbf{J}_{fri} = \nabla \times \left(\frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - IM \right)$, **def.** $\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - IM$ (A/m)

Uttryck postulatet: $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_{fri} \Leftrightarrow \oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathcal{L} = I_{fri}$

Låt $M = \chi_m H$, $\mathbf{B} = \mu_0 (H + IM) = \mu_0 (1 + \chi_m) H = \mu_0 \mu_r H$

\mathbf{B} , \mathbf{H} & \mathbf{IM} i en magnetiserad cylinder



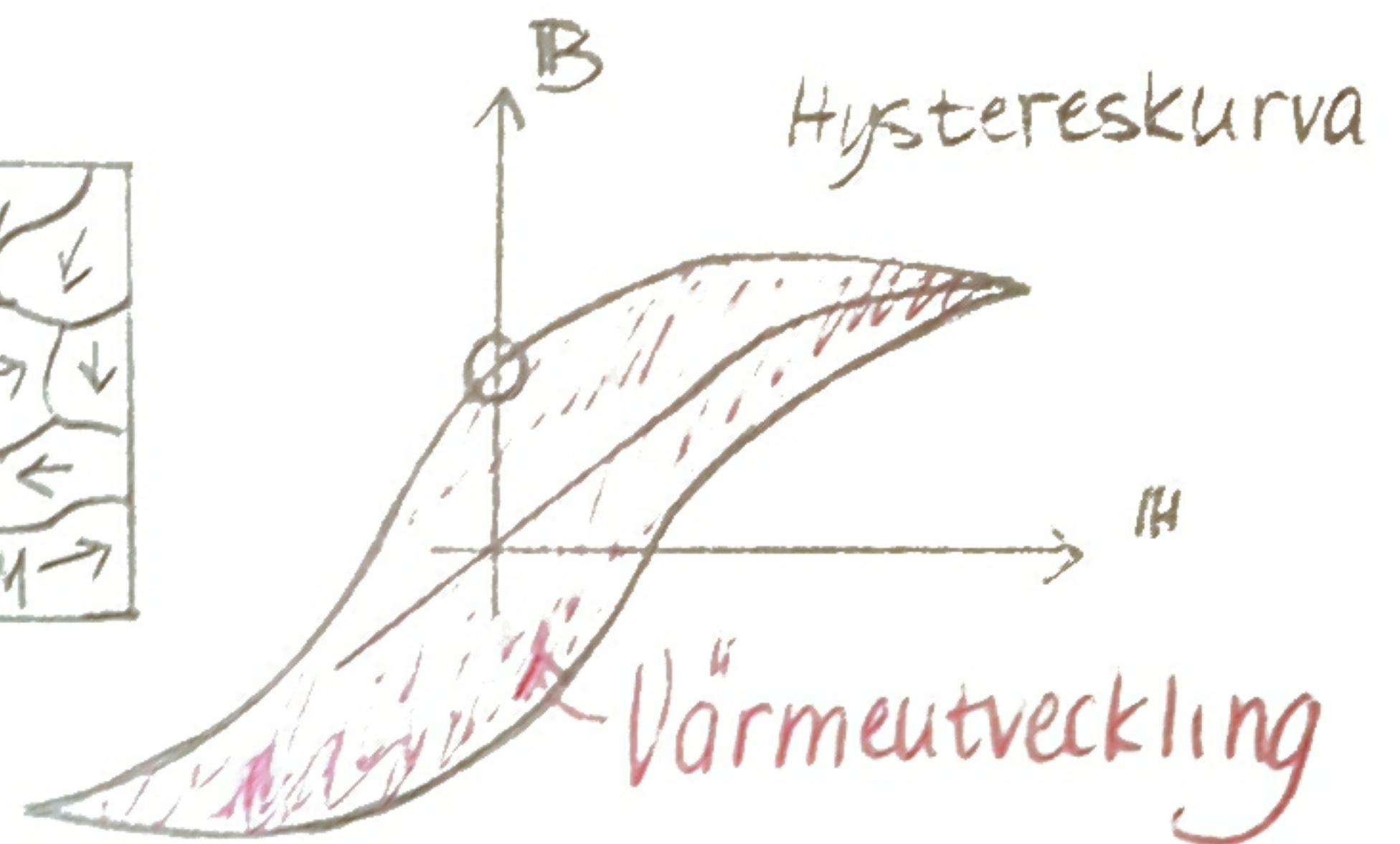
Randvillkor

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \Rightarrow \mathbf{B}_{in} = \mathbf{B}_{out}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \Rightarrow (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2)_t = \mathbf{j}_s \times \hat{\mathbf{n}}_2$$

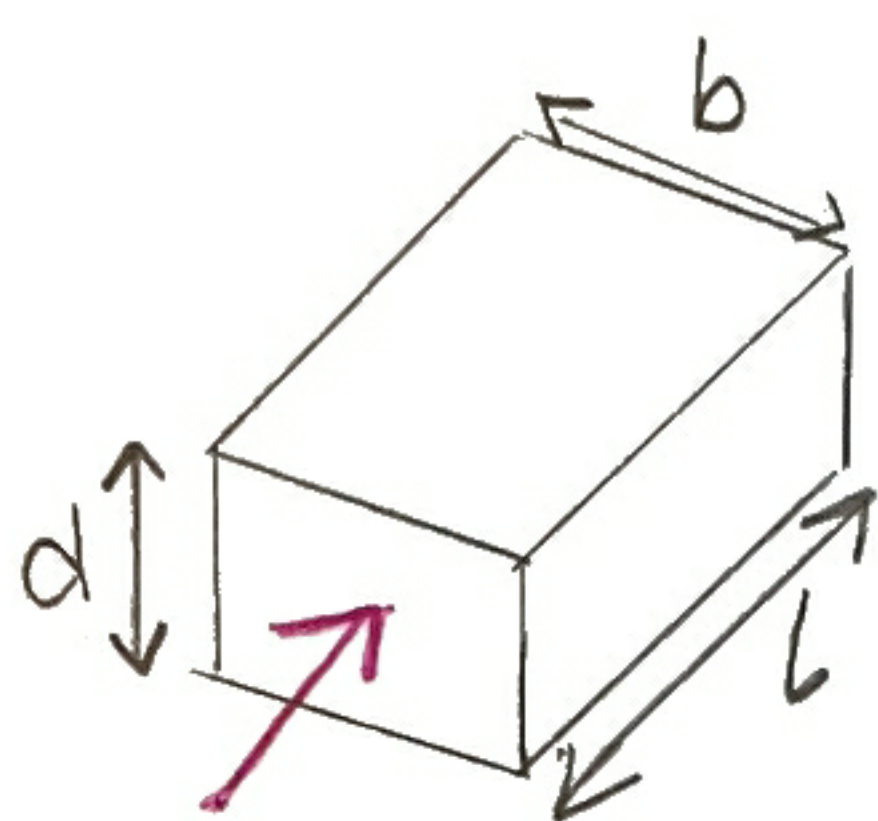
$$\text{Om ytström } \mathbf{j} = 0 \Rightarrow \mathbf{H}_{1t} = \mathbf{H}_{2t}$$

Hysteresvärme, 6-9
En ferromagnet



Storgruppsövning 21/11

Resistans



Konduktivitet: σ materialets ledningsförmåga

Konduktans: $G = \frac{\sigma bd}{l}$

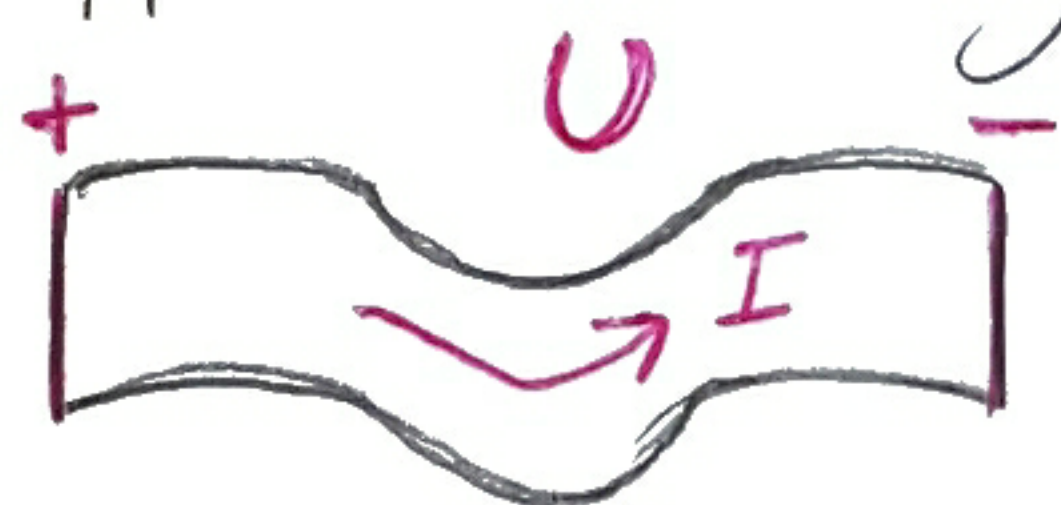
Resistans: $R = \frac{1}{G} = \frac{l}{\sigma bd}$

Approximation av resistans

Joules lag: $P = UI = \frac{U^2}{R} = I^2 R$

Strömmen fördelas s.a. P minimeras (liten effekt, värmelutv.)

En approx. kommer ge en högre effektutv. P'



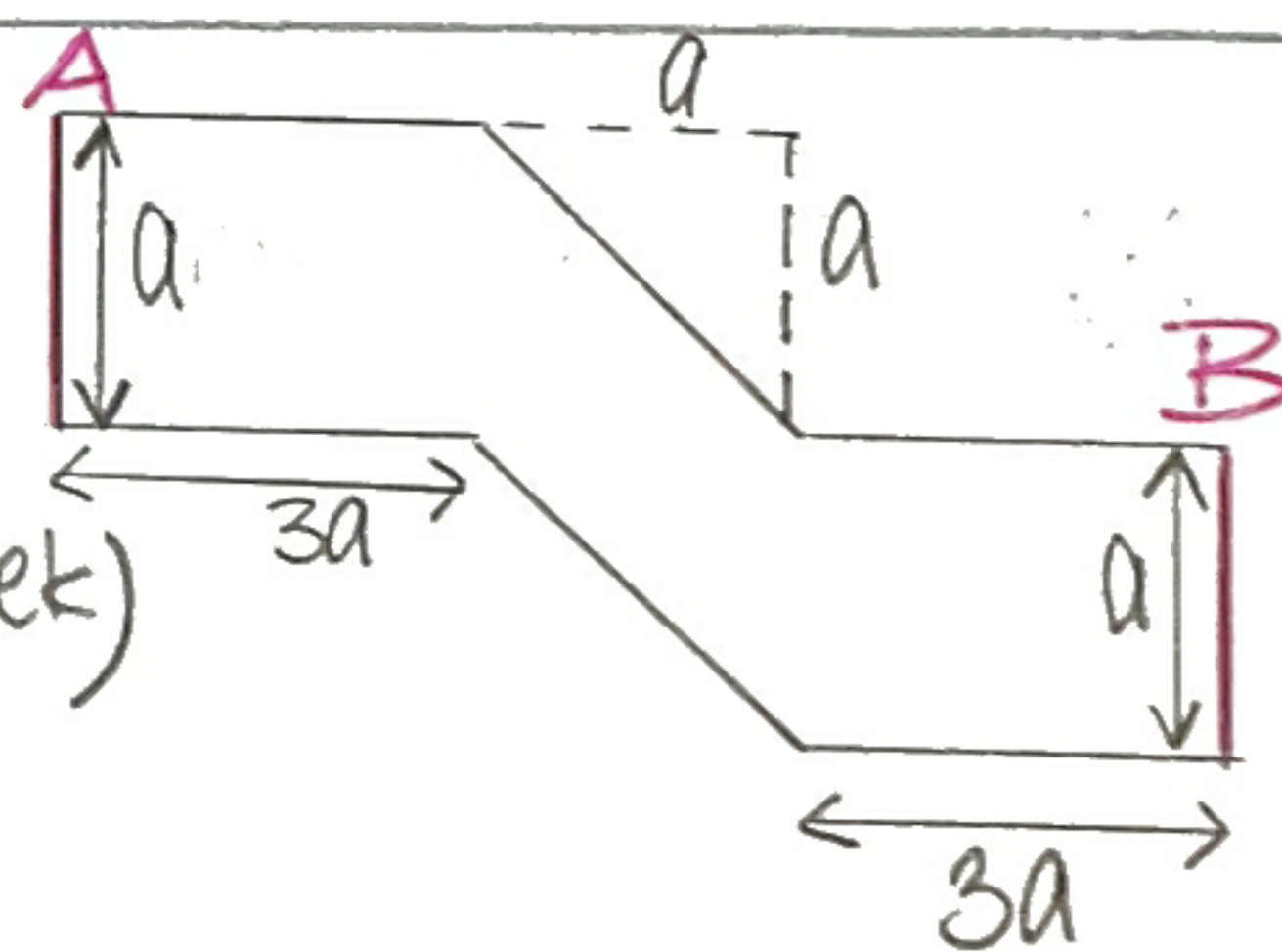
$P' = \frac{U^2}{R_u'} = I^2 R_i' > P$

$R_u' < R < R_i'$ bevis-pdf på kurshems.

6-11 en tunn plåt enl. figur

Beräkna övre & undre gräns för R .

Ytresistivitet s (ty tunn = ingen tjocklek)



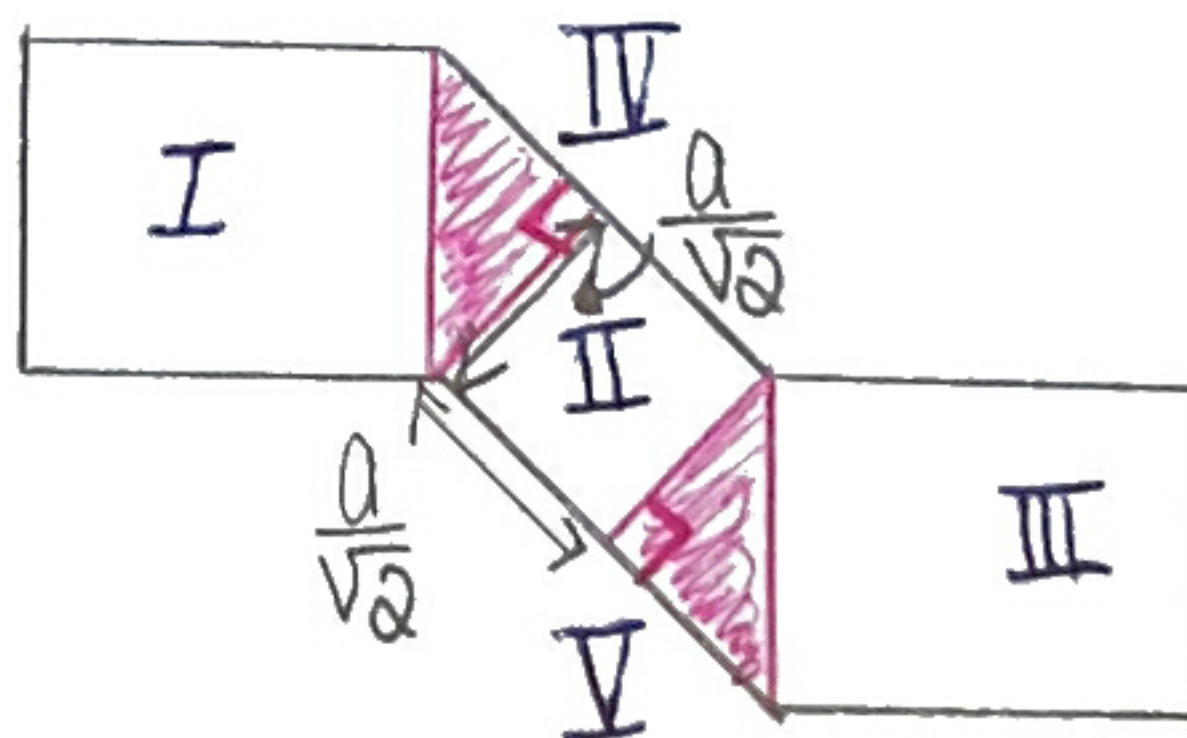
Lösning

Beräkna en lägre gräns genom att fixera potentialytorna

Resistansen i IV & V blir 0 ty konstant potential

$R = \frac{l}{\sigma s} = \frac{sl}{b}$

($s = \frac{1}{\sigma d}$)



$$\Rightarrow \begin{cases} R_I = \frac{s \cdot 3a}{a} = 3s \\ R_{II} = \frac{s \frac{a\sqrt{2}}{a/\sqrt{2}}}{a/\sqrt{2}} = s \\ R_{III} = R_I = 3s \end{cases} \quad R_u = R_I + R_{II} + R_{III} = 7s$$

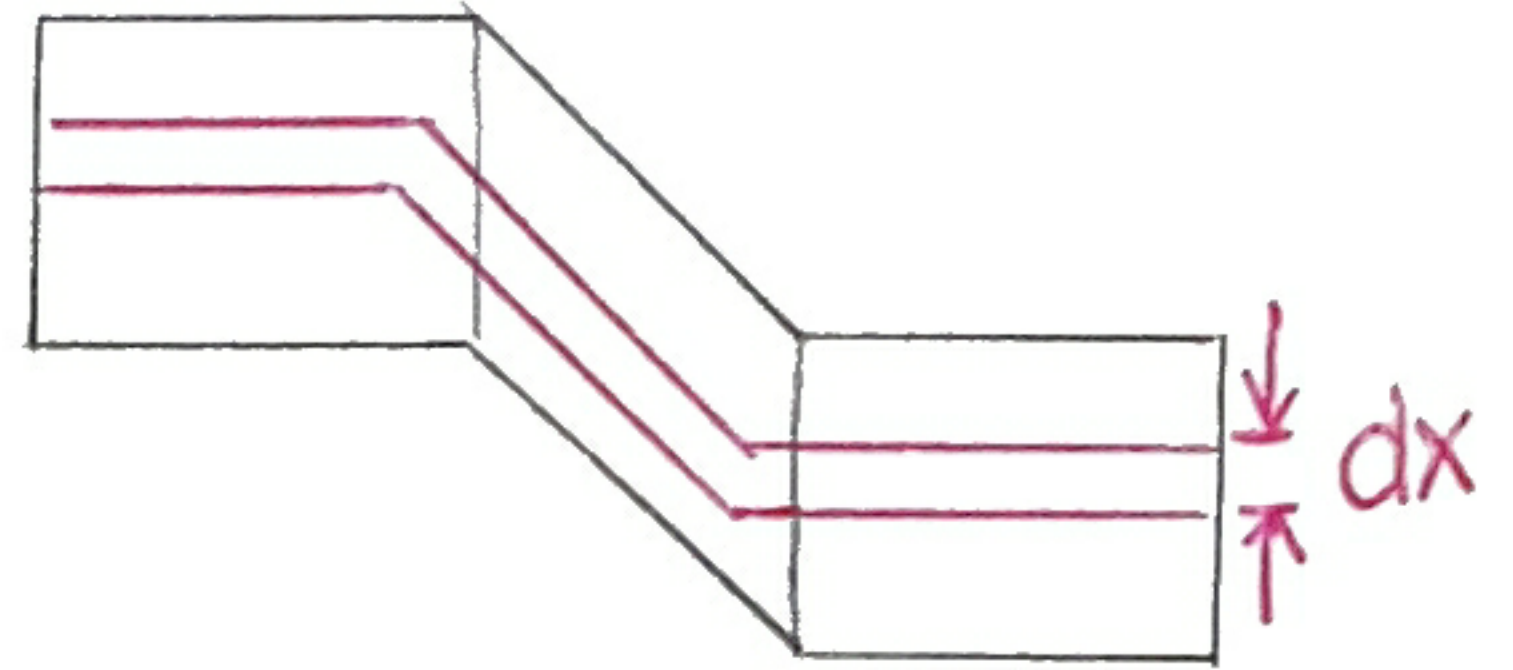
För övre gräns fixeras strömmarna.

"Parallell kopplade" strömrör.

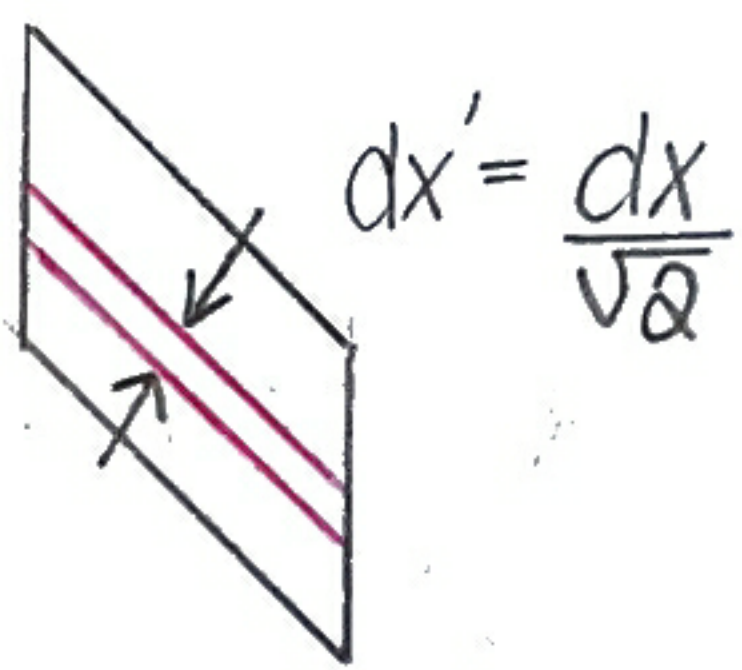
Summera konduktanserna

$$G = \int dG, \quad dG = \frac{dx}{sl}$$

$$G_I = G_{III} = \int_0^a \frac{dx}{s3a} = \frac{a}{s3a} = \frac{1}{3s} \Rightarrow R_I = R_{III} = 3s$$



För område II



$$dG = \frac{dx'}{sl} = \frac{dx}{\sqrt{2}s\sqrt{2}a} = \frac{dx}{2as}$$

$$G_{II} = \int_0^a \frac{dx}{2as} = \frac{a}{2as} = \frac{1}{2s}, \quad R_{II} = 2s$$

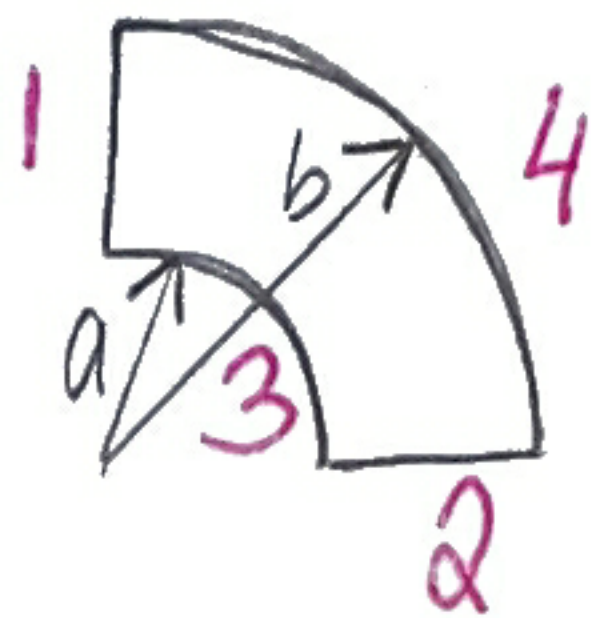
$$R_u = R_I + R_{II} + R_{III} = 8s$$

$$\Rightarrow 7s < R < 8s$$

6-16 Bestäm resistansen för skivan med konduktivitet

σ & tjocklek d , a) mellan 1 & 2

b) mellan 3 & 4



Beräkna R_{12} , R_{34}

Lösning dela upp i infinitesimala element



$$a) G = \int dG, \quad dG = \frac{\sigma d dr}{l} = \frac{2\sigma d dr}{\pi r}$$

$$G = \int_a^b \frac{2\sigma d}{\pi r} \cdot dr = \frac{2\sigma d}{\pi} \ln \frac{b}{a} \Rightarrow R_{12} = \frac{\pi}{2\sigma d \ln \frac{b}{a}}$$

$$b) R = \int dR = \int_a^b \frac{d}{\sigma d \pi r} dr = \frac{d \ln \frac{b}{a}}{\sigma d \pi}$$

$$R_{12} \cdot R_{34} = \frac{1}{(\sigma d)^2}$$

6-17 tunn plåt enl. figur. Tjocklek $d = 0,1 \text{ mm}$ & $\sigma = 10^5 \text{ S/m}$
Beräkna gränser för R .

Lösning övre gräns: antag strömrör

$$G = \int dG = \int_a^b \frac{\sigma d}{\pi r} dr = \int_a^b \frac{2\sigma d}{\pi(a+b)} dr = \frac{2\sigma d}{\pi(a+b)} (b-a) = \frac{2\sigma d}{3\pi}$$

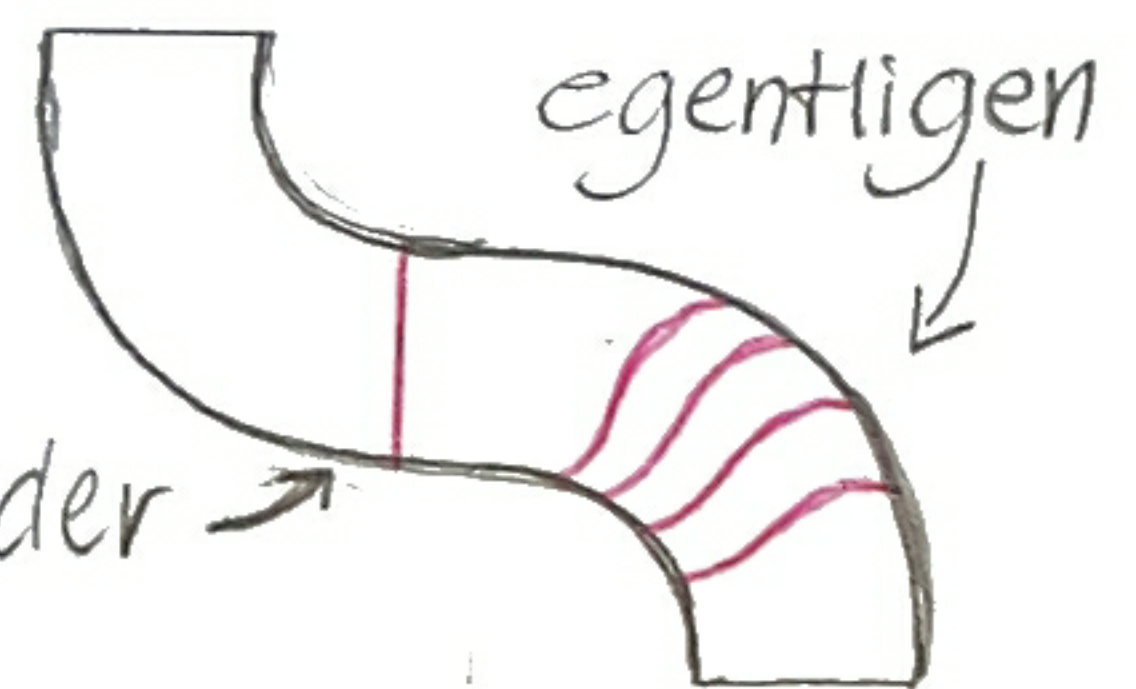
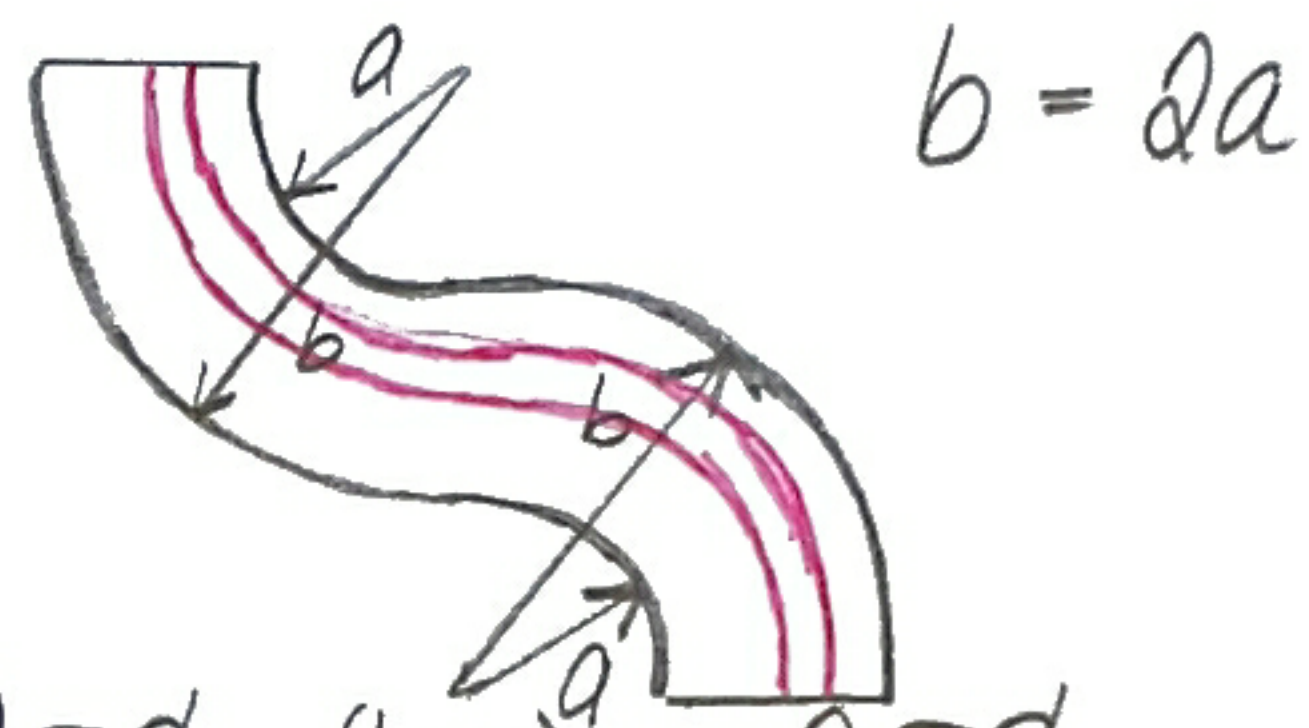
$$\Rightarrow R_0^u = \frac{3\pi}{2\sigma d}$$

undre gräns: antag ekvipotential-
ytor enl. fig. \rightarrow

2 seriekopplade R_{12} från förra uppgiften. använder \rightarrow

$$R_u = 2 \frac{\pi}{2\sigma d \ln \frac{b}{a}} = \frac{\pi}{\sigma d \ln \frac{b}{a}}$$

$$\Rightarrow 0,453 \Omega < R < 0,471 \Omega$$

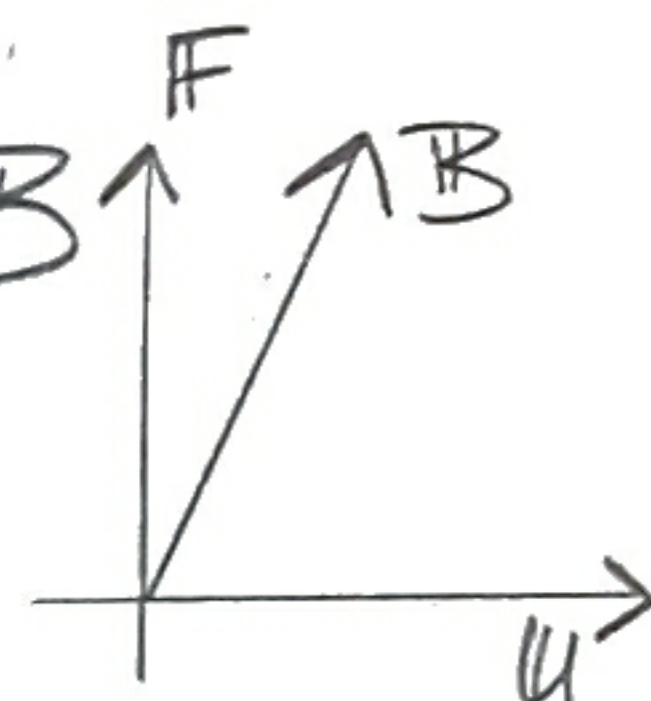


Storgruppsövning 21/11

Magnetostatik

Kraft på laddning i E fält: $F_e = qE$

Kraft på laddning i rörelse i magnetfält: $F_m = q\mathbf{u} \times \mathbf{B}$



Postulat $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ (1)

$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$ (2)

(1) $\Rightarrow \oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = 0$, (2) $\Rightarrow \oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I$ (Amperes lag)

Magnetisk vektorpotential A

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

Om vi väljer $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$$

$$\Rightarrow \nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J}$$

magnetisk potential givet flödestätheten \mathbf{J}

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{\mathbf{J}}{R} dv'$$

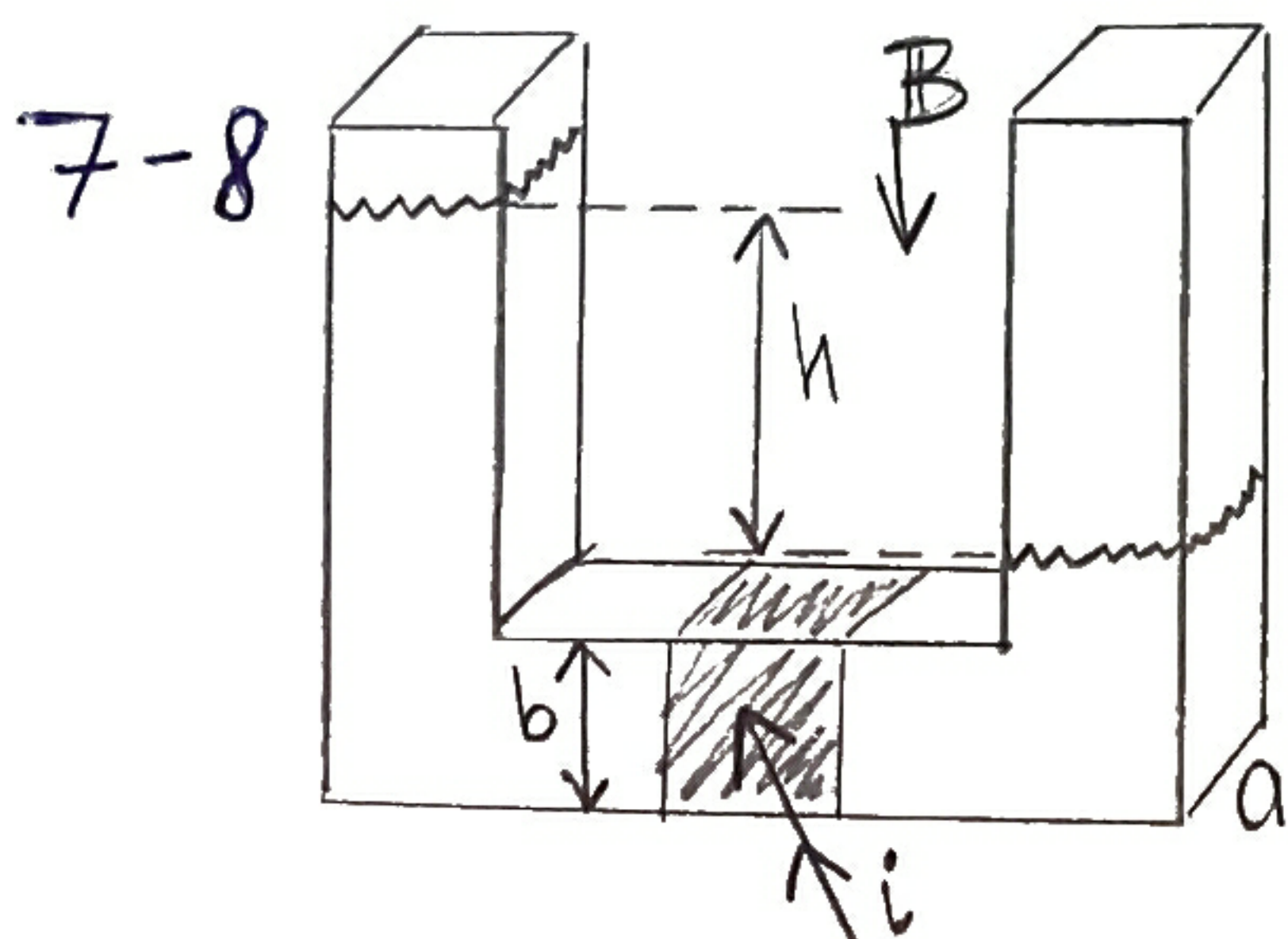
Biot-Savarts lag

magnetiskt fält givet en laddningsbärande krets

$$\mathbf{B} = \oint_C d\mathbf{B}, \quad d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left(\frac{d\mathbf{l} \times \mathbf{a}_R}{R^2} \right)$$

\mathbf{a}_R : enhetsvektor från källa till fält

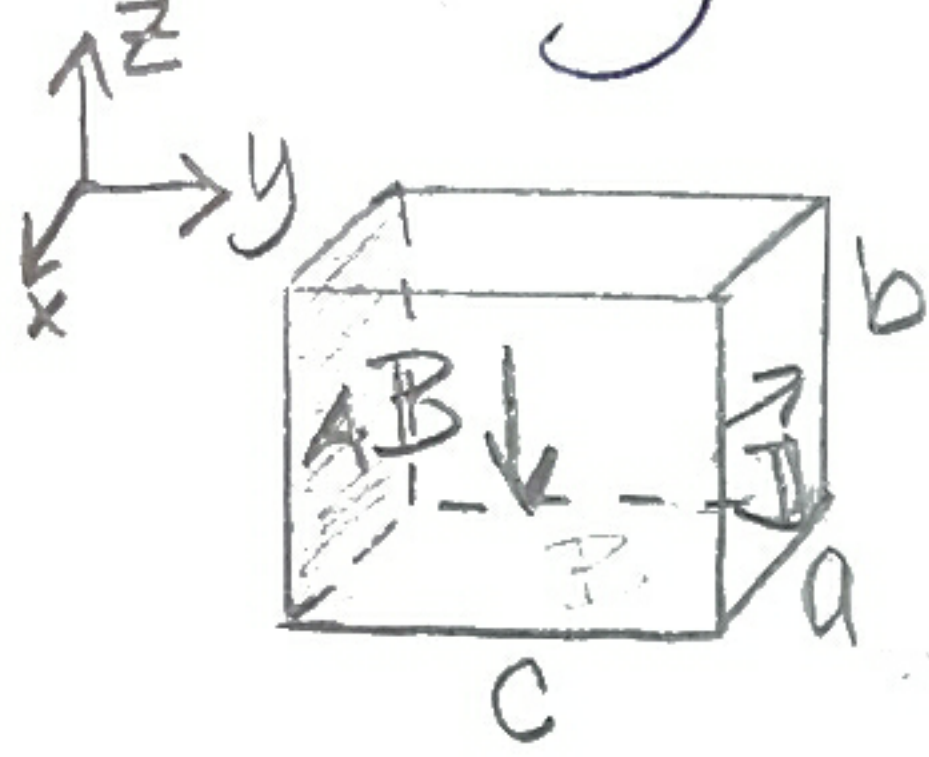
R : avstånd $-||-$



U-rör med tjockleka, med elektriskt ledande vätska med masstäthet ρ .
Mha. elektroder i kontakt med vätskan åstadkommer man ett homogent strömningsfält \mathbf{J} inom det skuggade området.

Inom samma område finns ett magnetfält \mathbf{B} som är homogent. Härled ett uttryck för h .

Lösning skuggade området



$$\mathbf{J} = -J_0 \mathbf{x}$$

$$\mathbf{B} = -B_0 \mathbf{z}$$

laddning i rät blocket: q , volym ΔV
jämnt fördelat $\rho = \frac{q}{\Delta V}$, $\mathbf{J} = \rho \mathbf{u}$

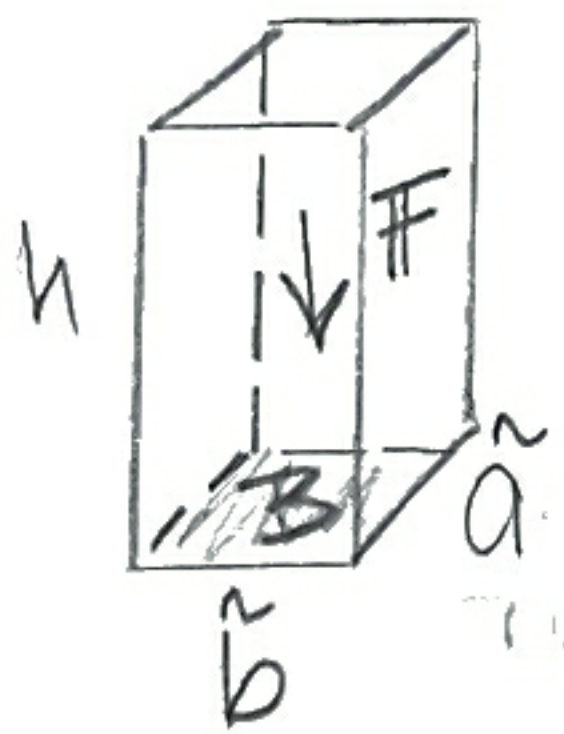
$$\begin{aligned} \text{Kraft per volymsenhet: } \frac{\mathbf{F}}{\Delta V} &= \frac{1}{\Delta V} q \mathbf{u} \times \mathbf{B} = \mathbf{J} \times \mathbf{B} = -J_0 \mathbf{x} \times (-B_0 \mathbf{z}) = \\ &= -J_0 B_0 \mathbf{y} \end{aligned}$$

Totala kraften i rät blocket: $\mathbf{F} = -J_0 B_0 \mathbf{y} abc$.

Kraften ger upphov till ett tryck P_A på ytan A:

$$P_A = \frac{J_0 B_0 abc}{ab} = J_0 B_0 c.$$

Beräkna trycket från den "extra" vätskan t.v. Kraft pga. vätskans tyngd. $F_B = mg = \eta Vg = \eta a^2 b h g$

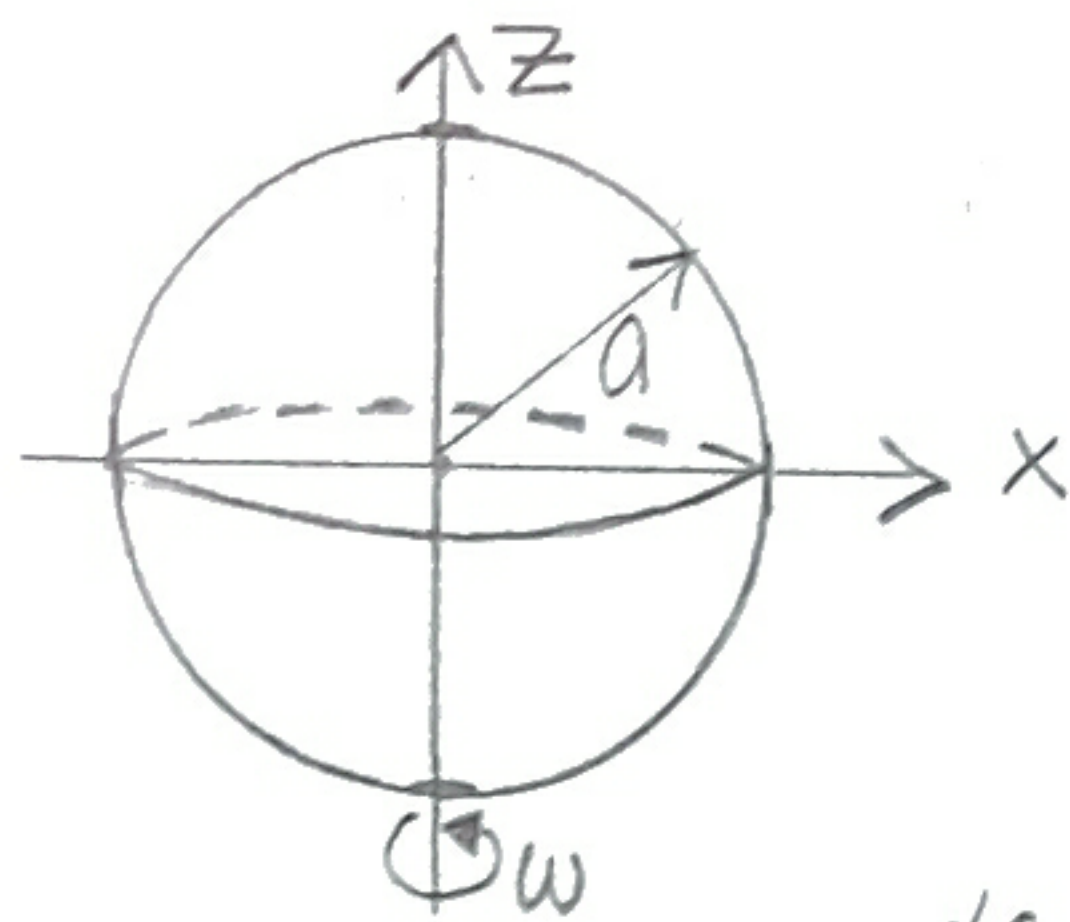


$$\text{Tryck mot B: } P_B = \frac{F_B}{ab} = \eta h g$$

$$\text{För jämvikt krävs } P_A = P_B \Rightarrow J_0 B_0 c = \eta h g$$

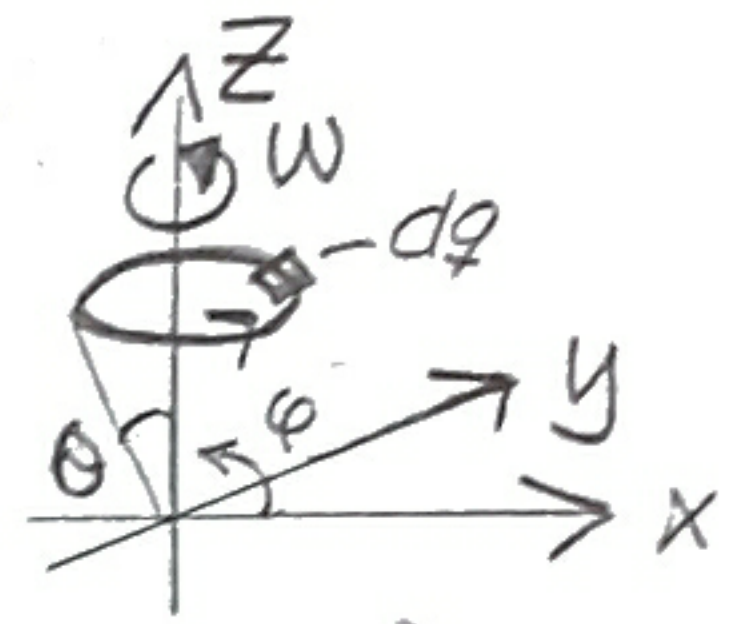
$$\Rightarrow h = \frac{J_0 B_0 c}{\eta g}$$

7-7 metallsfär med radien a ges en laddning Q & sätts i rotation med vinkelhastighet ω kring en diameter. Beräkna det av rotationen orsakade magnetfältet i axelns sfärens centrum. Antag uniform laddningsfördelning.



Lösning $\rho_s = \frac{Q}{4\pi a^2}$

Dela in i tunna strömrör runt z-axeln



$$dq = \rho_s a^2 \sin \theta d\theta d\varphi$$

$$di = \frac{dq}{dt} = \rho_s a^2 \sin \theta d\theta \frac{d\varphi}{dt} \quad \frac{d\varphi}{dt} = \omega$$

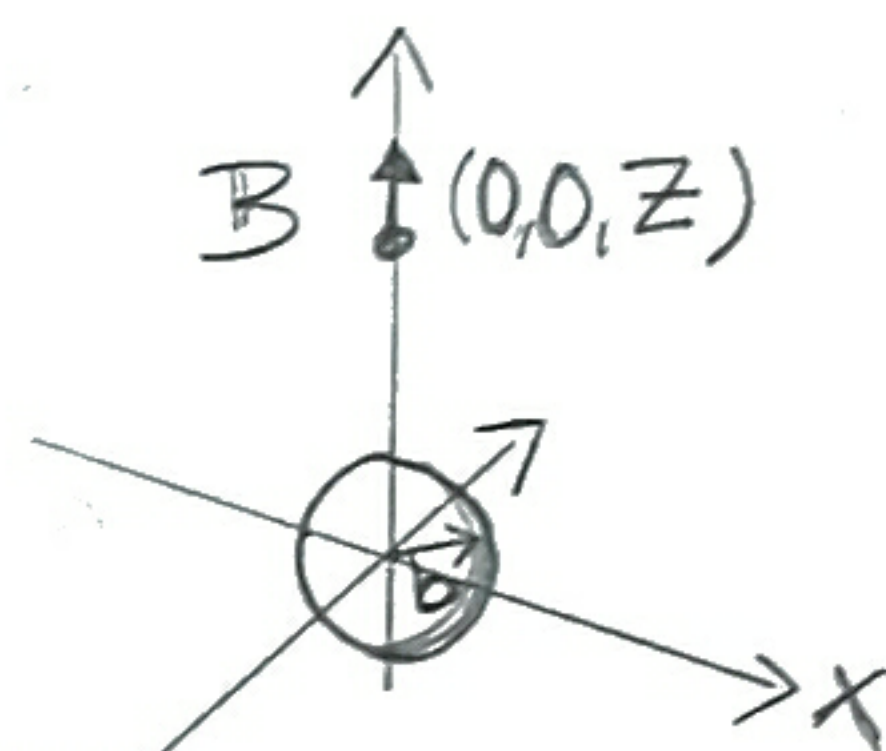
$$di = \frac{Q}{4\pi a^2} a^2 \sin \theta \omega d\theta = \frac{Q\omega}{4\pi} \sin \theta d\theta$$

Magnetiskt fält från cirkulär strömbana på z-axeln, ekv. 6-38 Cheng

$$\mathbf{B} = \hat{z} \frac{\mu_0 I b^2}{2(z^2 + b^2)^{3/2}}$$

radien: $b = a \sin \theta$

avståndet längs z-axeln: $z = a \cos \theta$



Fältbidraget från en strömslinga

$$d\mathbf{B} = \hat{z} \frac{\mu_0 di a^2 \sin^2 \theta}{2(a^2 \cos^2 \theta + a^2 \sin^2 \theta)^{3/2}} = \hat{z} \frac{\mu_0 a^2 \sin^2 \theta di}{2a^3}$$

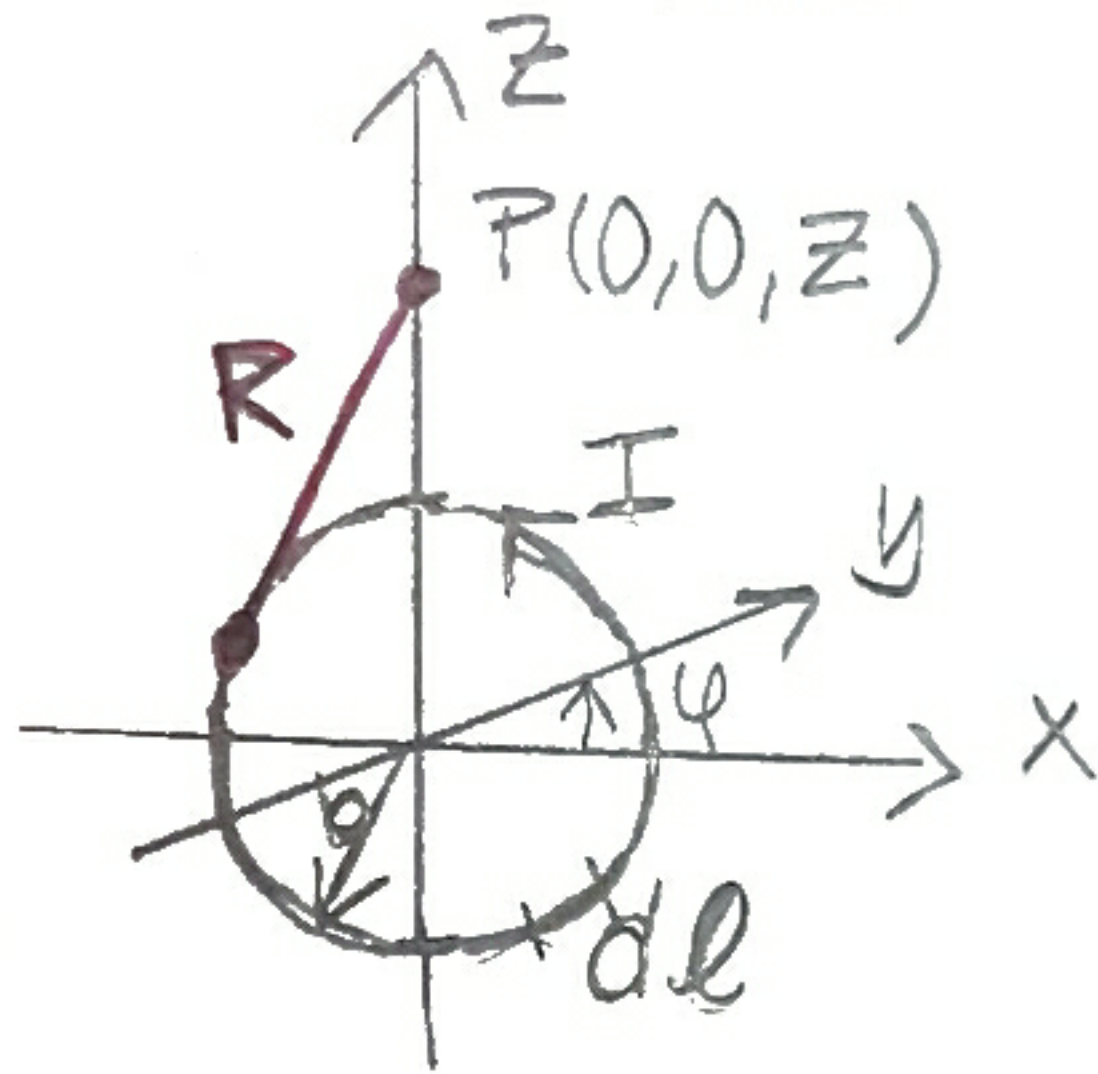
$$= \hat{z} \frac{\mu_0 \sin^2 \theta}{2a} \frac{Q\omega}{4\pi} \sin \theta d\theta = \hat{z} \frac{\mu_0 Q\omega}{8\pi a} \sin^3 \theta d\theta$$

Totala fältet ges av att integrera över alla strömrör

$$\mathbf{B} = \int d\mathbf{B} = \int_0^\pi \hat{z} \frac{\mu_0 Q\omega}{8\pi a} \sin^3 \theta d\theta = \hat{z} \frac{\mu_0 Q\omega}{8\pi a} \int_0^\pi \sin \theta - \sin \theta \cos^2 \theta d\theta =$$

$$= \hat{z} \frac{\mu_0 Q\omega}{6\pi a}$$

6-6 Cirkulär slinga i xy-planet med centrum i origo. Ström I . Beräkna \underline{B} i $P(0,0,z)$.
Radien b .



Lösning Biot-Savarts lag

$$\underline{B} = \oint_{C'} d\underline{B}, \quad d\underline{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\underline{\ell}' \times \underline{a}_R}{R^2}$$

$$\underline{a}_R = \frac{\underline{R}}{R}, \quad d\underline{\ell}' = a_\varphi b d\varphi$$

$$\underline{R} = a_z z - a_r b$$

$$R = \sqrt{z^2 + b^2}$$

$$d\underline{\ell}' \times \underline{a}_R = a_\varphi b d\varphi \times (a_z z - a_r b) = a_r b z d\varphi + a_z b^2 d\varphi$$

Vid integrering kommer a_r -komponenterna ta ut varandra.

$$\underline{B} = \int d\underline{B} = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\underline{\ell}' \times \underline{R}}{R^3} = \int_0^{2\pi} \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{a_z b^2 d\varphi}{(z^2 + b^2)^{3/2}} =$$

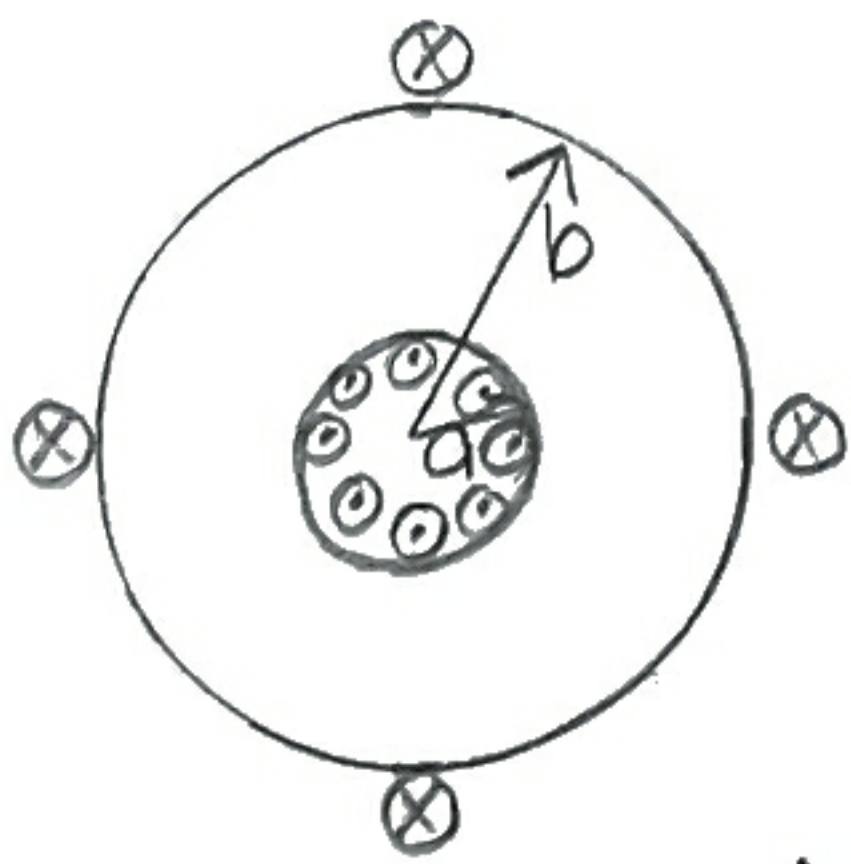
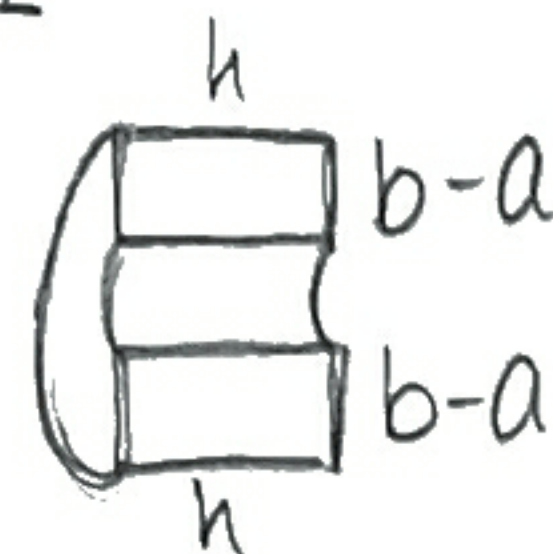
$$= a_z \frac{\mu_0 I b^2}{4\pi (z^2 + b^2)^{3/2}} 2\pi = a_z \frac{\mu_0 I b^2}{2 (z^2 + b^2)^{3/2}}$$

6-14

Beräkna totala magnetiska flödet Φ

N lindningar, ström I

Genomskärning



Lösning

$$\text{Amperes lag } \oint_C \underline{B} \cdot d\underline{\ell} = \mu_0 I_{\text{tot}}$$

$$\underline{B} = B_\varphi a_\varphi, \quad d\underline{\ell} = r d\varphi a_\varphi$$

$$\int_{\varphi=0}^{2\pi} B_\varphi a_\varphi \cdot a_\varphi r d\varphi = 2\pi r B_\varphi, \quad I_{\text{tot}} = IN$$

$$2\pi r B_\varphi = \mu_0 IN \Rightarrow B_\varphi = \frac{\mu_0 IN}{2\pi r}$$

Magnetiskt flöde

$$\Phi = \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \int_{r=a}^b \int_{z=0}^h \frac{\mu_0 I N}{2\pi r} \cdot 2\pi r \cdot dz = \frac{\mu_0 I N h}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$$

Storgruppsövning 24/11

Magnetostatik

Analoger till elektrostatiken

Gauss lag	$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho / \epsilon_0$	$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$
	$\nabla \times \mathbf{E} = 0$	$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$
	$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \frac{Q_{innet}}{\epsilon_0}$	$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I_{innet}$
		Ampère lag



Konstitutiva relationer

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \mathbf{E} \quad \mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0 \mu_r} \mathbf{B}$$

\mathbf{D} = elektriska flödestätheten

\mathbf{E} = elektriska fältet

\mathbf{H} = magnetiska fältet

\mathbf{B} = magnetisk flödesdensitet

Precis som att \mathbf{D} -fältet bara beror på fria laddningar, beror \mathbf{H} -fältet bara på fria strömmar.

Magnetiseringsvektor $\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H} \Rightarrow \mathbf{B} = (1 + \chi_m) \mu_0 \mathbf{H} = \mu_r \mu_0 \mathbf{H}$

Magnetiska kretsar - typ transformatorer

"ström" - Flödet: $\Phi = \oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}$ # varv på spolen

"spänningskällor" - MMK: $\mathcal{V} = N I$

"resistans" - Reluktans: $\mathcal{R} = \frac{L}{\mu S}$

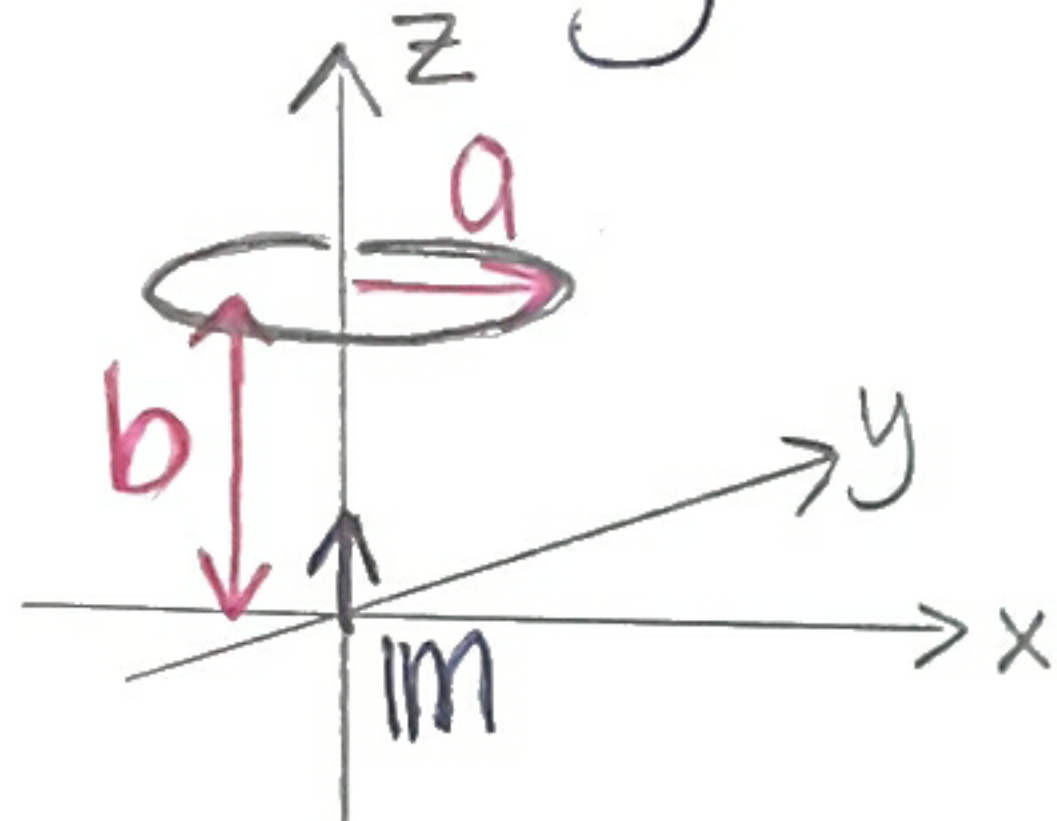
\mathbf{B} -fält magnetisk dipol

$$\mathbf{B}(R, \theta) = \frac{\mu_0 m}{4\pi R^3} (\hat{R} 2 \cos \theta + \hat{\theta} \sin \theta)$$

7.10 magnetisk dipol i origo, $m = m\hat{z}$ en cirkulär ring av en tunn metalltråd med z-axeln som axel, dess radie är a & avstånd till origo är b .

Beräkna magnetiska flödet genom ringen.

Lösning



B-fält från magnetisk dipol

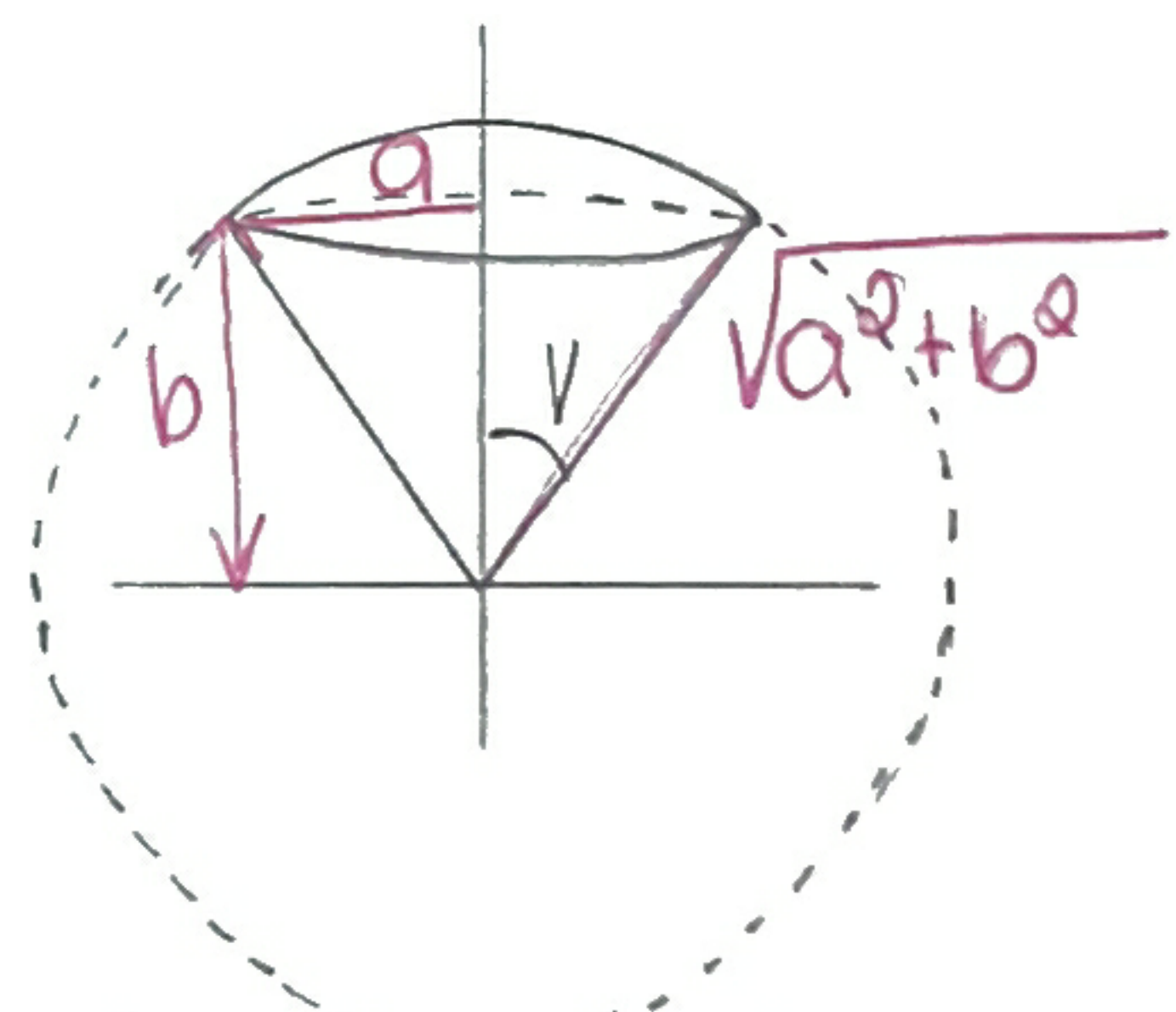
$$\mathbf{B}(R, \theta) = \frac{\mu_0 m}{4\pi R^3} (\hat{R} 2\cos\theta + \hat{\theta} \sin\theta)$$

Vi kan välja valfri yta med rand längs cirkeln, lämpligen en sfär med centrum i origo.

$$\text{Flödet } \Phi = \oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \int_0^{\nu} d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi R^2 \sin\theta \frac{\mu_0 m}{4\pi R^3} 2\cos\theta =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} R = \sqrt{a^2 + b^2} \text{ konst.} \\ u = \cos\theta, du = -\sin\theta d\theta, u(\theta=0) = 1, u(\theta=\nu) = b/\sqrt{a^2 + b^2} \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{\mu_0 m}{\sqrt{a^2 + b^2}} \int_b^1 du u = \frac{\mu_0 m a^2}{2(a^2 + b^2)^{3/2}}$$

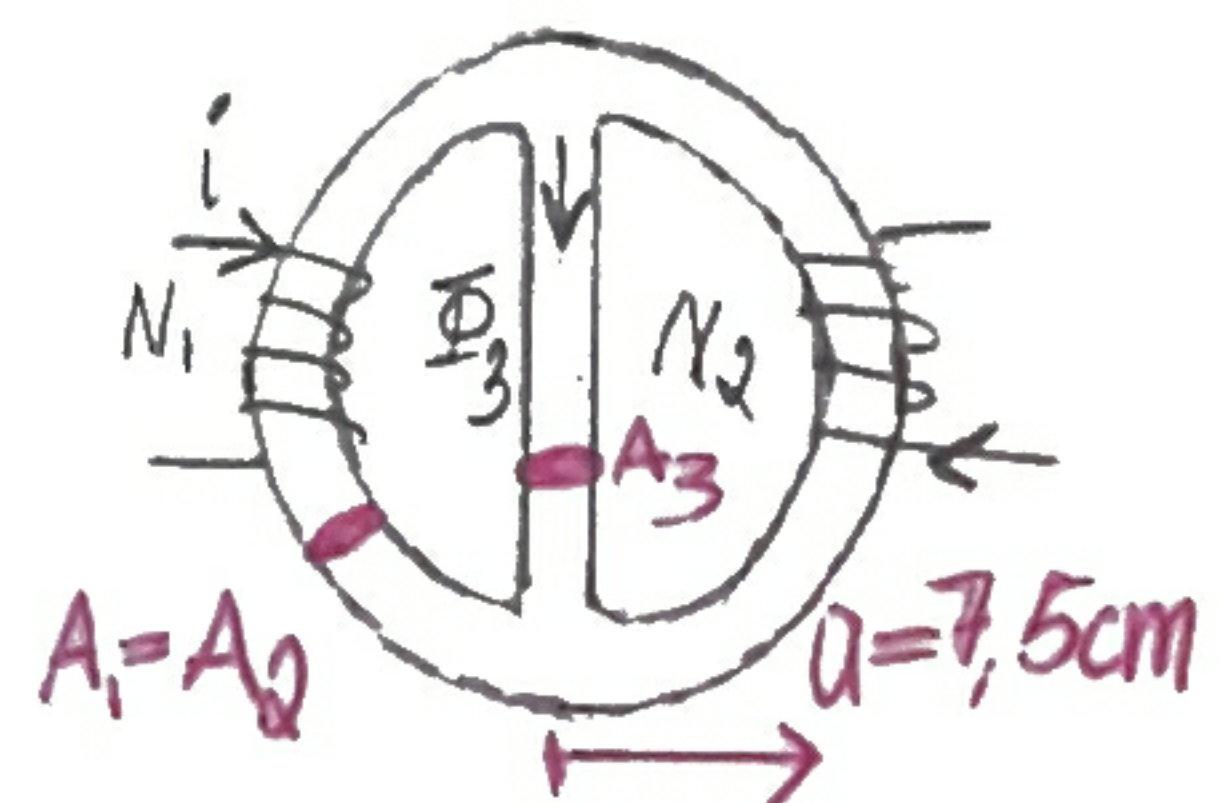


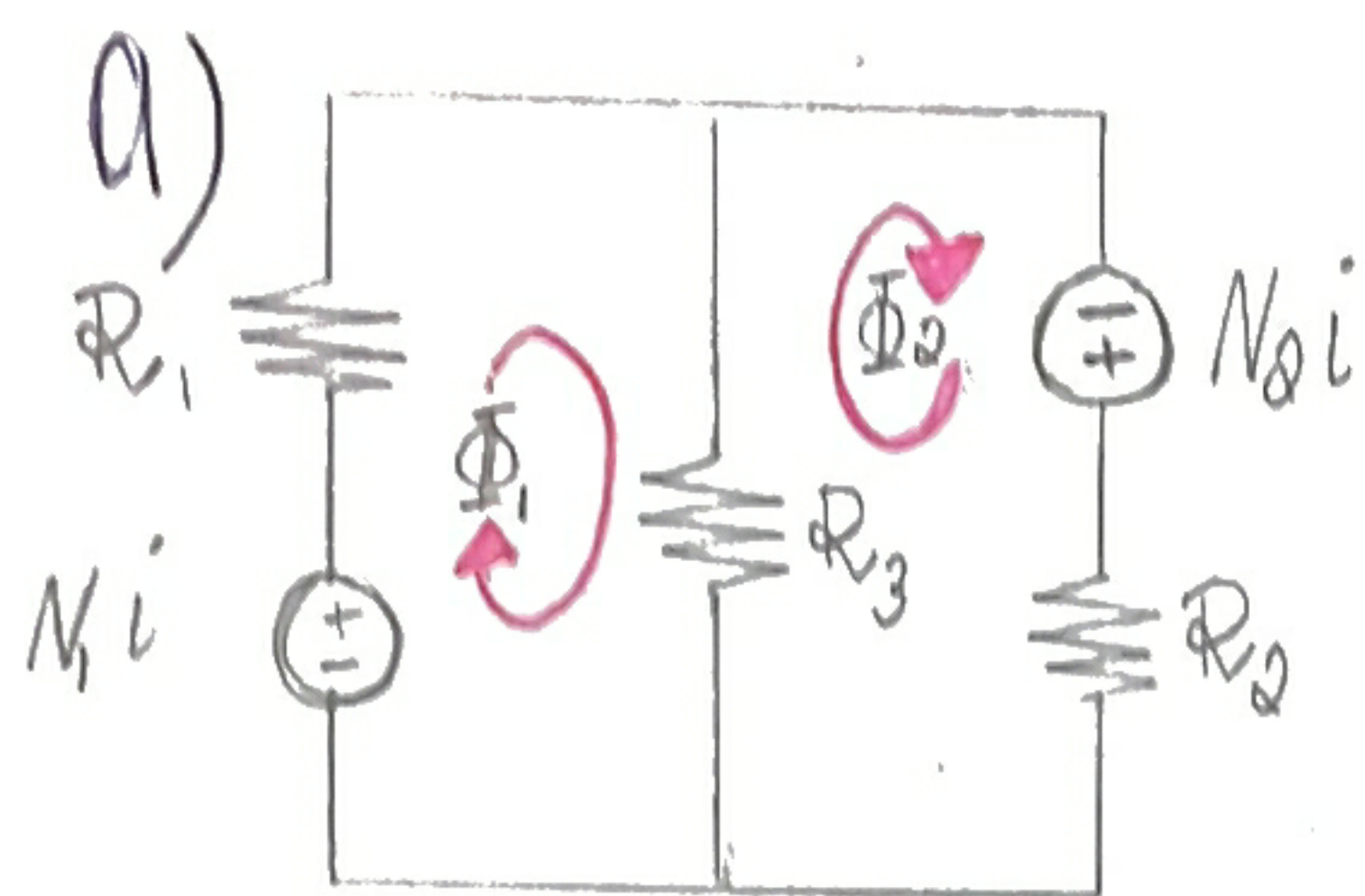
8.5 en järnring m brygga enl. fig har 2 lindningar

$N_1 = 160$ & $N_2 = 120$ varv, $\mu_r = 150$.

a) lindningarna serie kopplas & leder $i = 2$ mA s.a. flödena samverkar. Beräkna flödet Φ_3 genom bryggan.

b) låt nu strömmen flyta genom N_1 . Vilken ström, i , krävs för att få $\Phi_3 = 60 \mu\text{Wb}$





Reluktans $\mathcal{R} = \frac{l}{\mu S}$

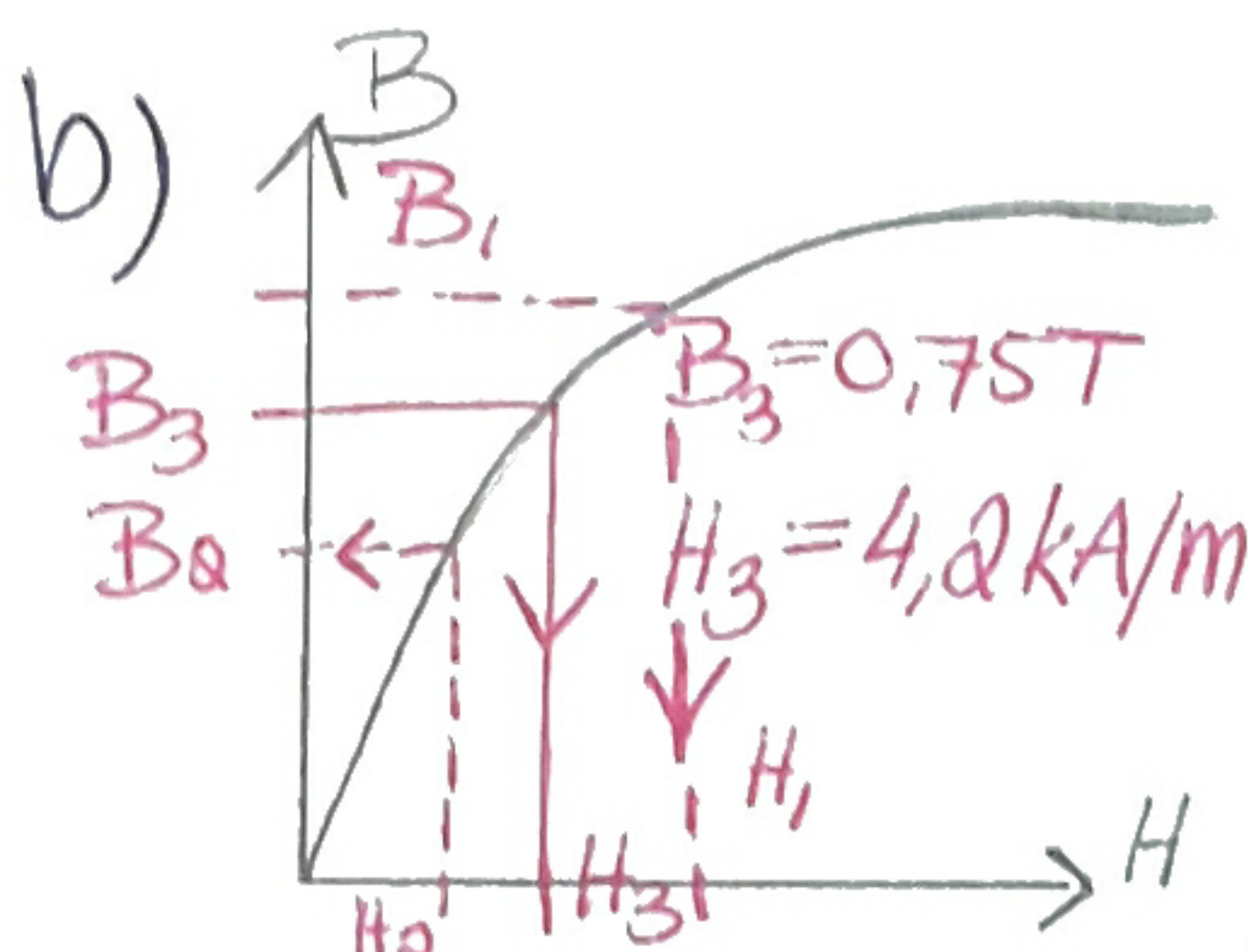
$$\mathcal{R}_1 = \mathcal{R}_2 = \frac{\pi a}{\mu_0 \mu_r A_1}, \quad \mathcal{R}_3 = \frac{2a}{\mu_0 \mu_r A_3}$$

$$A_1 = A_2 = 1,2 \text{ cm}^2, \quad A_3 = 0,8 \text{ cm}^2$$

Lös som en elkrets

$$\begin{pmatrix} \mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_3 & -\mathcal{R}_3 \\ -\mathcal{R}_3 & \mathcal{R}_2 + \mathcal{R}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N_1 i \\ N_2 i \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \Phi_1 = 0,0282 \mu\text{Wb} \\ \Phi_2 = 0,02556 \mu\text{Wb} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \Phi_3 = \Phi_1 - \Phi_2 = 2,639 \text{ nWb}$$



det starka flödet betyder att vi är i ett icke-linjärt område

\Rightarrow vi kan ej lösa uppgiften på samma sätt

$$\Phi_3 = 60 \mu\text{Wb} \Rightarrow B_3 = \Phi_3 / A_3 = 0,75 \text{ T} \Rightarrow H_3 = 4,2 \text{ kA/m}$$

Ampères lag: $\oint H \cdot dl = I_{\text{inne}}$

$$\Rightarrow H_3 2a - H_2 \pi a = 0 \Rightarrow H_2 = \frac{2}{\pi} H_3 = 2,8 \text{ kA/m} \Rightarrow B_2 = 0,65 \text{ T}$$

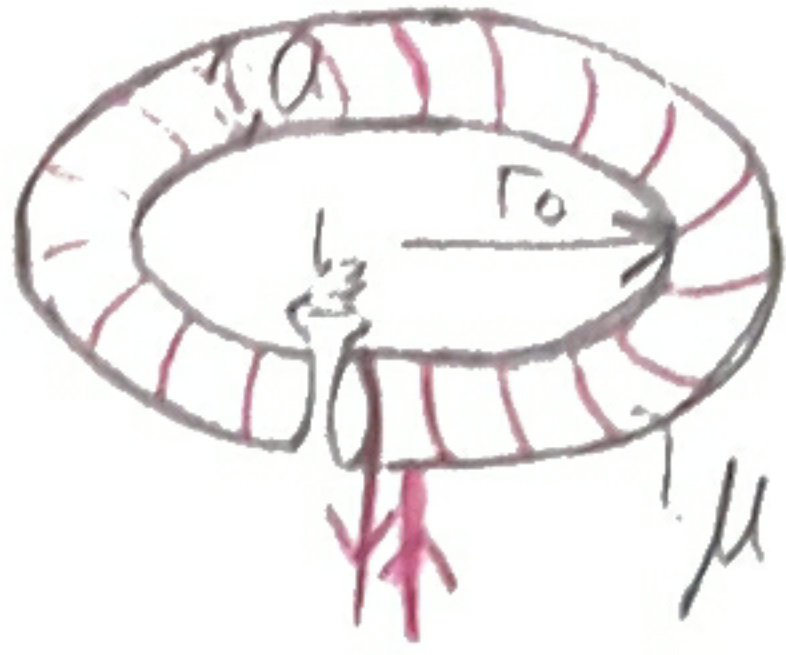
$$\Rightarrow \Phi_2 = B_2 A_2 = 78 \mu\text{Wb}$$

Från $\oint B \cdot d\mathcal{S} = 0$

$$\Rightarrow \Phi_1 = \Phi_2 + \Phi_3 = 138 \mu\text{Wb} \Rightarrow B_1 = \Phi_1 / A_1 = 1,15 \text{ T} \Rightarrow 20 \text{ kA/m} = H_1$$

Ampères lag $H_1 \pi a + H_3 2a = N_1 I_1 \Rightarrow I_1 = 33,4 \text{ A}$

Ex 6.10 i Cheng



Bestäm a) B_f i kärnan

b) H_f i kärnan

c) H_g i luftgapet

a) försumma läckage & transfält

$$\Rightarrow B_f = B_g = \hat{\varphi} B_f, \text{ från } H = \frac{1}{\mu_0 \mu_r} B \text{ fås:}$$

$$H_f = \frac{1}{\mu} B_f \hat{\varphi}, \quad H_g = \frac{1}{\mu_0} B_g \hat{\varphi} \text{ \& Ampères lag}$$

$$\oint_C H \cdot d\ell = NI_0 \Rightarrow \frac{B_f}{\mu} (2\pi r_0 - l_3) + \frac{B_f}{\mu_0} l_3 = NI_0$$

$$\Rightarrow B_f = \hat{\varphi} \cdot \frac{NI_0 \mu \mu_0}{\mu_0 (2\pi r_0 - l_3) + \mu l_3}$$

24/11 Elektrostatik

Postulat $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho / \epsilon_0$
 $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ } utgör grunden för
elektrostatiken

Def. av fält $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$

Gauss lag $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \frac{Q}{\epsilon_0}$

Punkt laddning $\mathbf{E}(R) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R^2} \hat{\mathbf{R}}$ fältpkt till källpkts
vektorn.

Superposition $\mathbf{E}(R) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dQ}{R^2} \hat{\mathbf{R}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho dV}{R^2} \hat{\mathbf{R}}$

Potential $\nabla \times \mathbf{E} = 0 \rightarrow \mathbf{E} = -\nabla V$
 $V(R) = \int_R^{Ref} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} + V(Ref)$

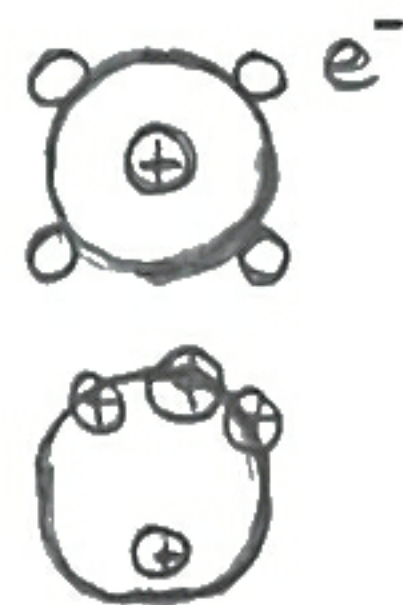
För punkt laddning $V(R) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R}$

För laddningsfördelning $V(R) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(R)}{R} dV$

Metaller $\mathbf{E} = 0$, $V = \text{konstant}$

Materialmodell neutralt, $\mathbf{E} = 0$

$\mathbf{E} \neq 0$



$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} = \epsilon_0 \epsilon_r \mathbf{E}$$

Randvillkor $E_{it} = E_{at}$

$$D_{in} - D_{en} = \rho_{fri,s}$$

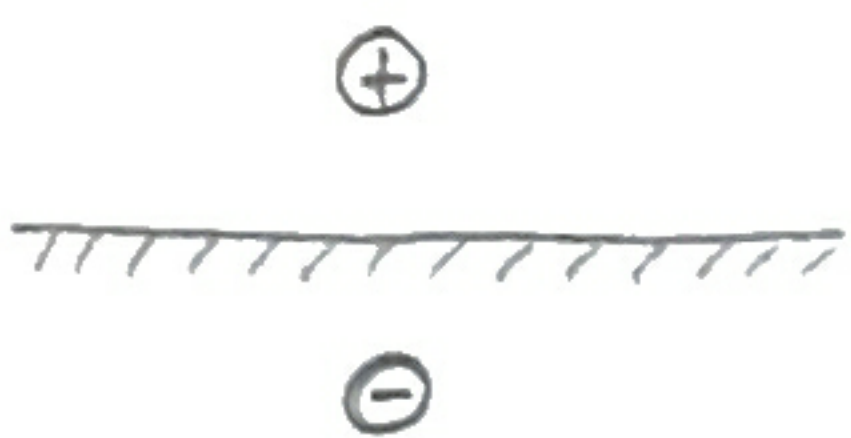
Kapacitans $C = \frac{Q}{V}$

Energi $W_e = \frac{1}{2} \int_{V'} V(R) \rho(R) dV' = \frac{1}{2} \int_{V'} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} dV'$

Kraft $F_Q = -\nabla W_e$

$$F_v = \nabla W_e$$

Coulombs lag $F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{R_{12}^2} \hat{R}_{12}$

Spegling  Viktigt!

Ström

Ström $I = \frac{\Delta Q}{\Delta t}$

Kontinuitetskv. $\int J dS = -\frac{\partial Q}{\partial t} \Rightarrow \nabla \cdot J = 0$ (statik)

Konduktionsströmmar Ohm's lag $J = \sigma E$
Joules lag $\mathcal{P} = \int_V E \cdot J dV$

Randvillkor $J_{in} = J_{out}$, $\frac{J_{it}}{J_{ot}} = \frac{\sigma_1}{\sigma_2}$

Resistans $R = \frac{\Delta V}{I}$

Approx. resistans Strömrör \Rightarrow övre gräns
Ekvipotential ytor \Rightarrow undre gräns

Magnetostatik

Kraft $F = q(\mathcal{U} \times B)$

Postulat $\nabla \cdot B = 0$

$$\nabla \times B = \mu_0 J$$

Ampères lag $\int B \cdot dl = \mu_0 I$

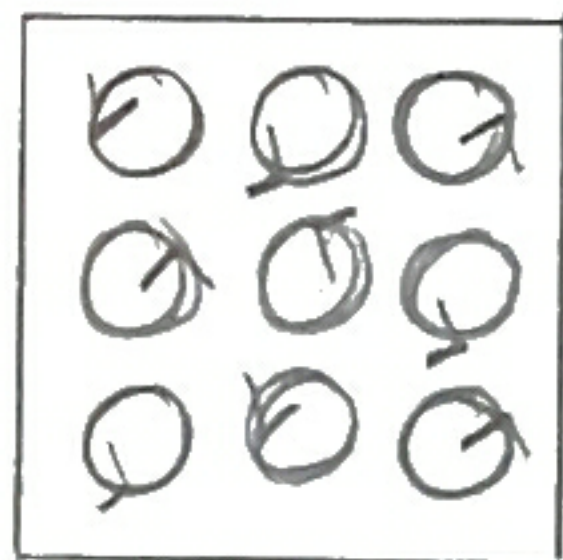
Linjeström $B(R) = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}$

$$\text{Biot-Savart } \mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{R}') \times \hat{\mathbf{R}}}{R^2} dV'$$

Vektorpotential $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \rightarrow \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$

Integral för vektorpotential $\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{R}')}{R} dV'$

Material



$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M}$$

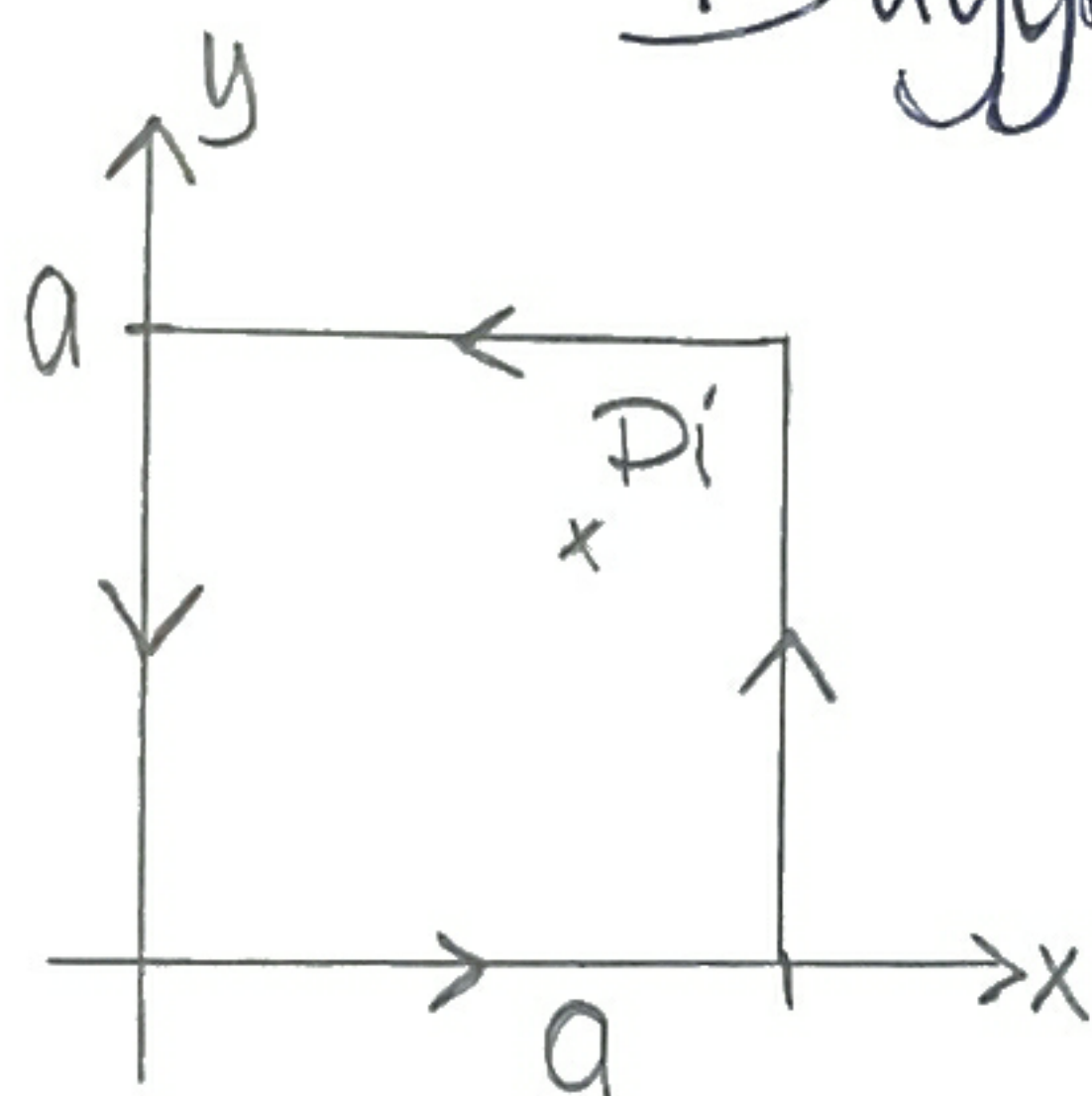
$$\mathbf{B} = \mu_0 \mu_r \mathbf{M}$$

Randvillkor $\mathbf{B}_{1n} - \mathbf{B}_{2n}$

$$(\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2)_{\text{tang}} = \int_S \mathbf{k} \hat{\mathbf{n}}_2$$

3

Dugga 2016 II 246

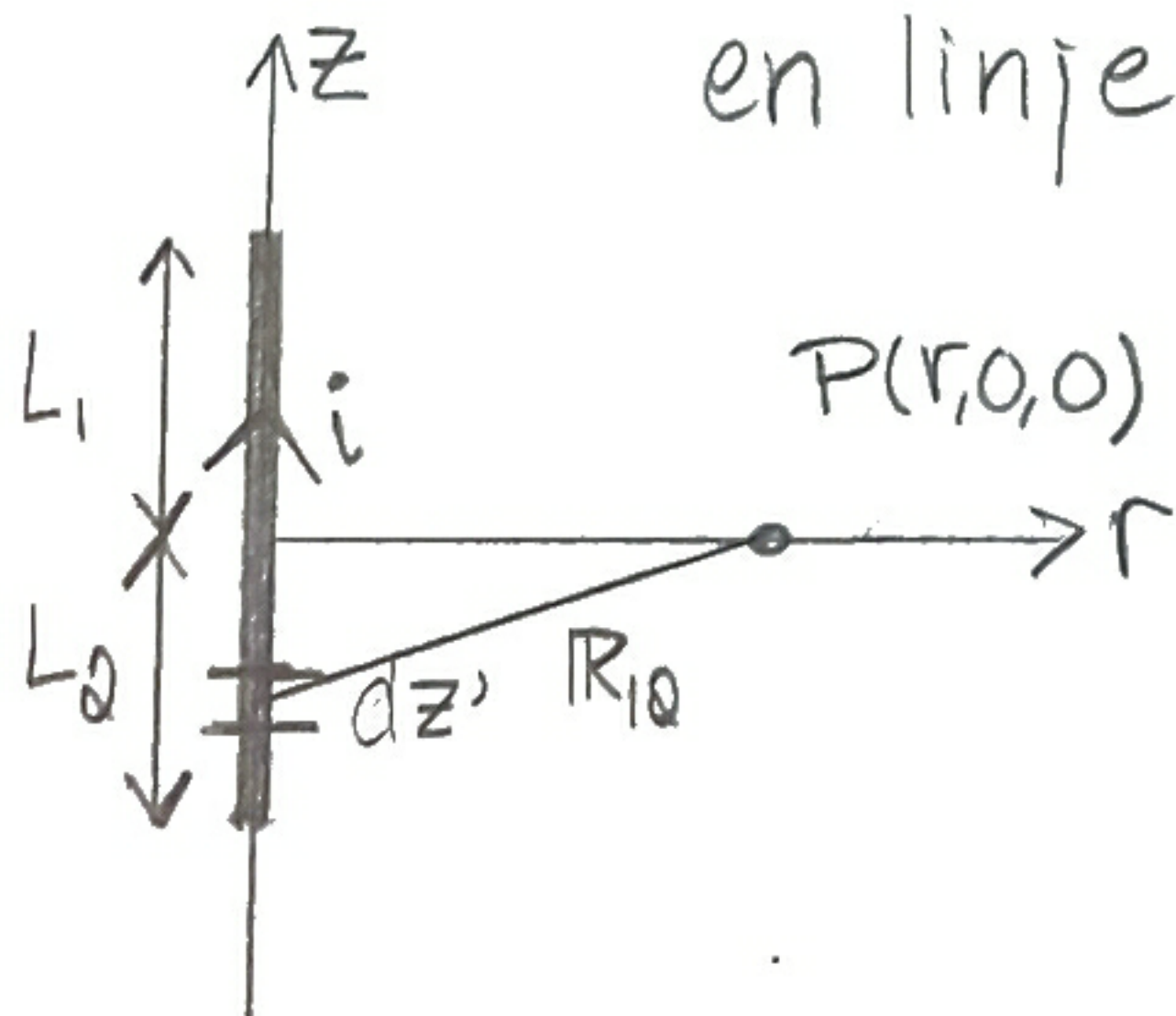


Liten kvadratisk slinga i xy-planet, ström i .

Beräkna \mathbf{A} i $P(x, y, 0)$ (inuti kvadraten)

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \oint_C \frac{d\mathbf{l}_1}{R_{12}}, \quad \begin{array}{l} d\mathbf{l}_1 = \text{linjeelement från källan} \\ R_{12} = \text{avstånd från källa till fält} \end{array}$$

Metod: • dela upp slingan i 4 raka linjeladdningar
• bestäm allmänt uttryck för bidrag till \mathbf{A} från en linjeladdning.



$$d\mathbf{l}_1 = dz' \hat{\mathbf{z}}$$

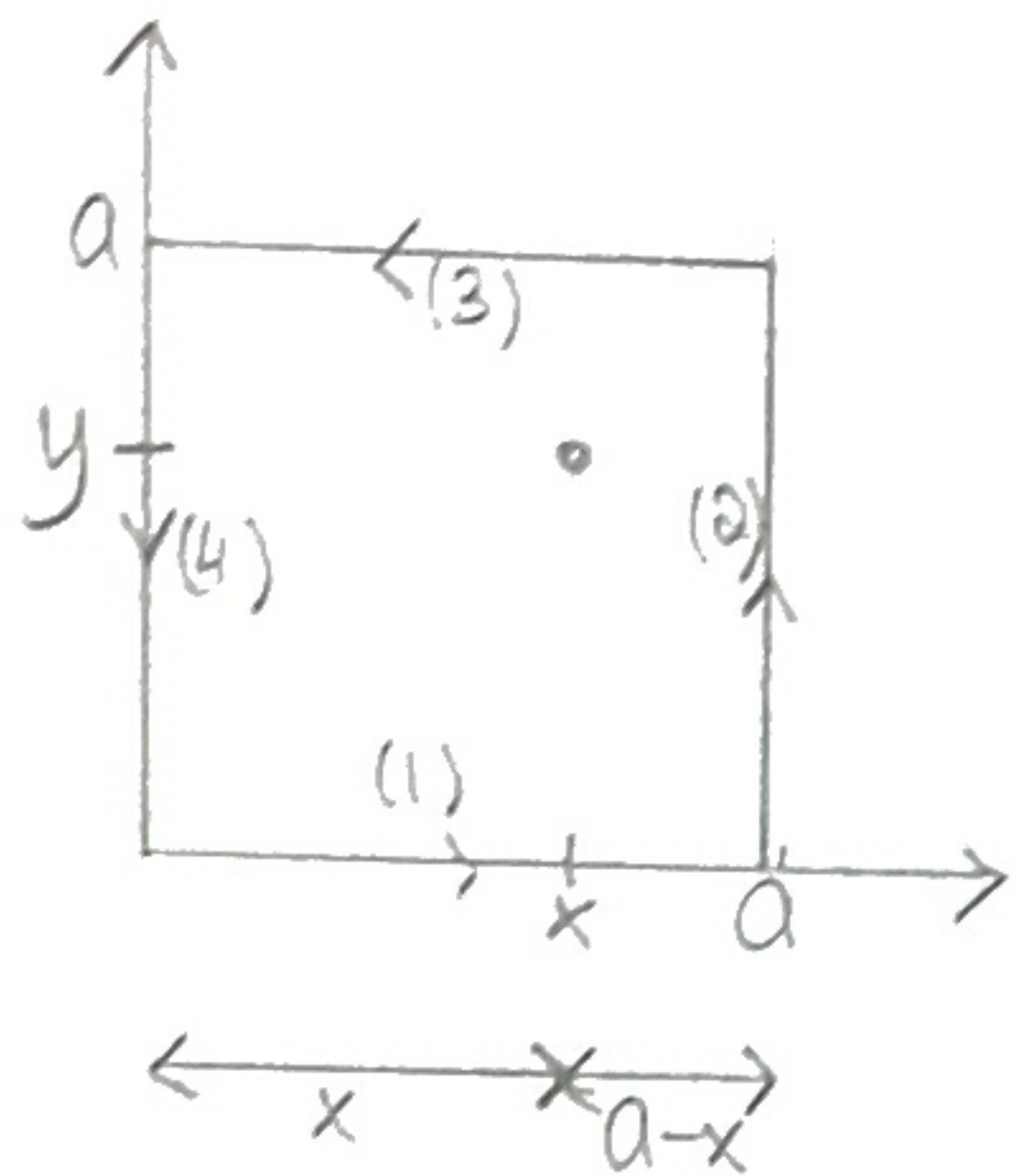
$$R_{12} = r\hat{\mathbf{a}}_r - dz' \hat{\mathbf{z}}$$

$$R_{12} = \sqrt{r^2 + z'^2}$$

$$A = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \int_{z'=-L_2}^{L_1} \frac{Q_z dz'}{\sqrt{r^2 + z'^2}} = Q_z \frac{\mu_0 i}{4\pi} \left[\ln(z' + \sqrt{r^2 + z'^2}) \right]_{-L_2}^{L_1} =$$

$$= Q_z \frac{\mu_0 i}{4\pi} \ln \left(\frac{L_1 + \sqrt{r^2 + L_1^2}}{-L_2 + \sqrt{r^2 + L_2^2}} \right)$$

Identifiera L_1, L_2, Q_z & r för varje sida.



$$(1) L_1 = a - x$$

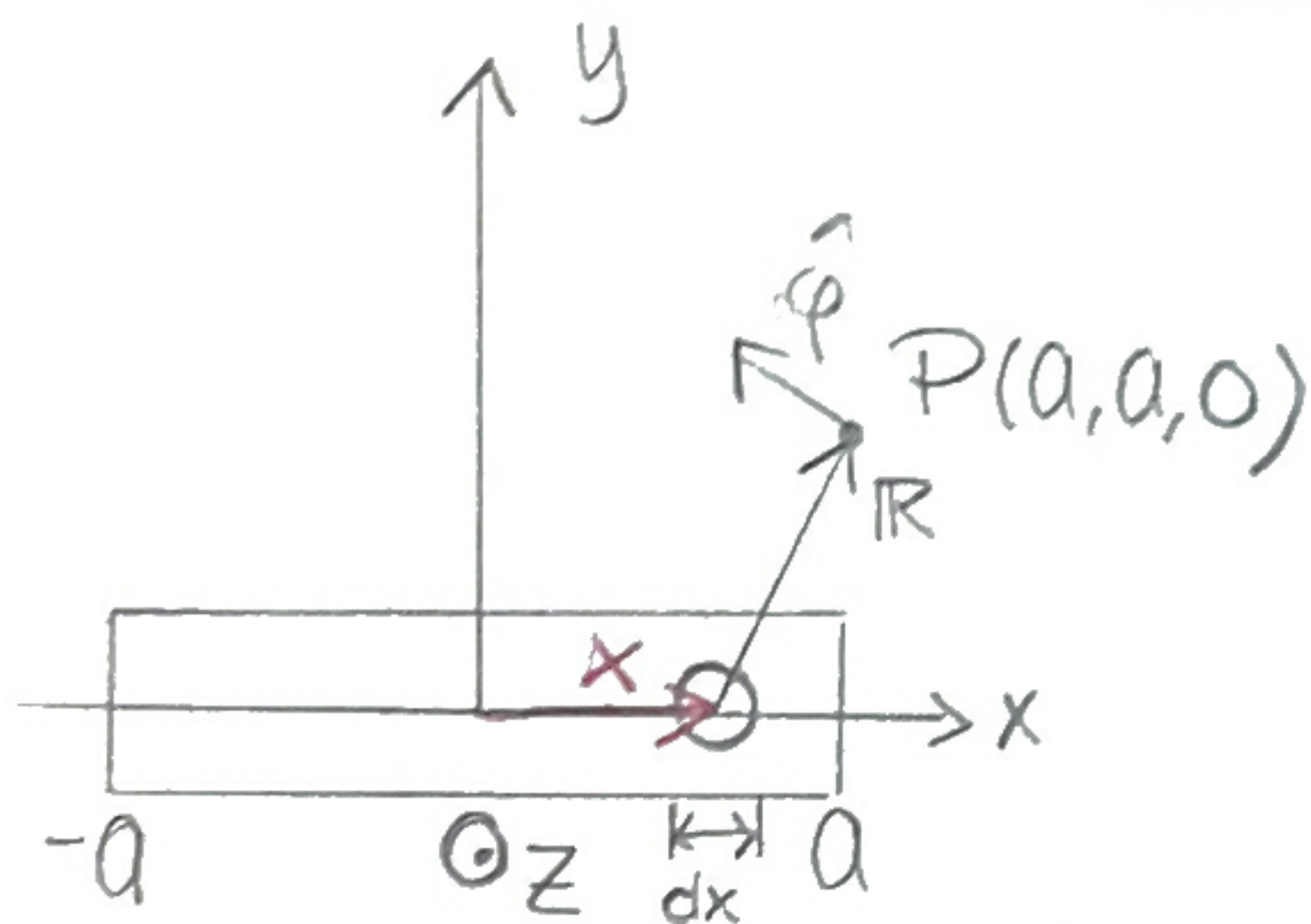
$$L_2 = x$$

$$r = y$$

$$Q_z = Q_x$$

$$A_1 = Q_x \frac{\mu_0 i}{4\pi} \ln \left(\frac{a-x + \sqrt{(a-x)^2 + y^2}}{-x \sqrt{x^2 + y^2}} \right)$$

4



mkt långt platt metall band med bredd $2a$ i xy -planet leder strömmen i_s i \hat{z} -riktningen. Antag jämn ström fördelning. Beräkna \mathbb{B} i P .

Delat in i strömrör, tjocklek dx .

\mathbb{B} från lång, rak ledare (belägen längs z -axeln) $\mathbb{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \hat{\varphi}$

R = avstånd mellan källa & fält

$\hat{\varphi}$ vinkelrät mot \mathbb{R} & ligger i xy -planet

$$R = \sqrt{(a-x)^2 + a^2}$$

$$\hat{\varphi} = \frac{\hat{z} \times \mathbb{R}}{R} = \frac{\hat{z} \times ((a-x)\hat{x} + a\hat{y})}{\sqrt{(a-x)^2 + a^2}}$$

$I = \frac{i_s}{2a} dx$, strömmen i ett strömrör, jämnt fördelat

Bidrag från ett strömrör vid position x

$$dB = \frac{\mu_0 I_s}{4\pi a} dx \frac{(a-x')\hat{y} - a\hat{x}}{(a-x')^2 + a^2}$$

Superposition, integrera över bredden på bandet

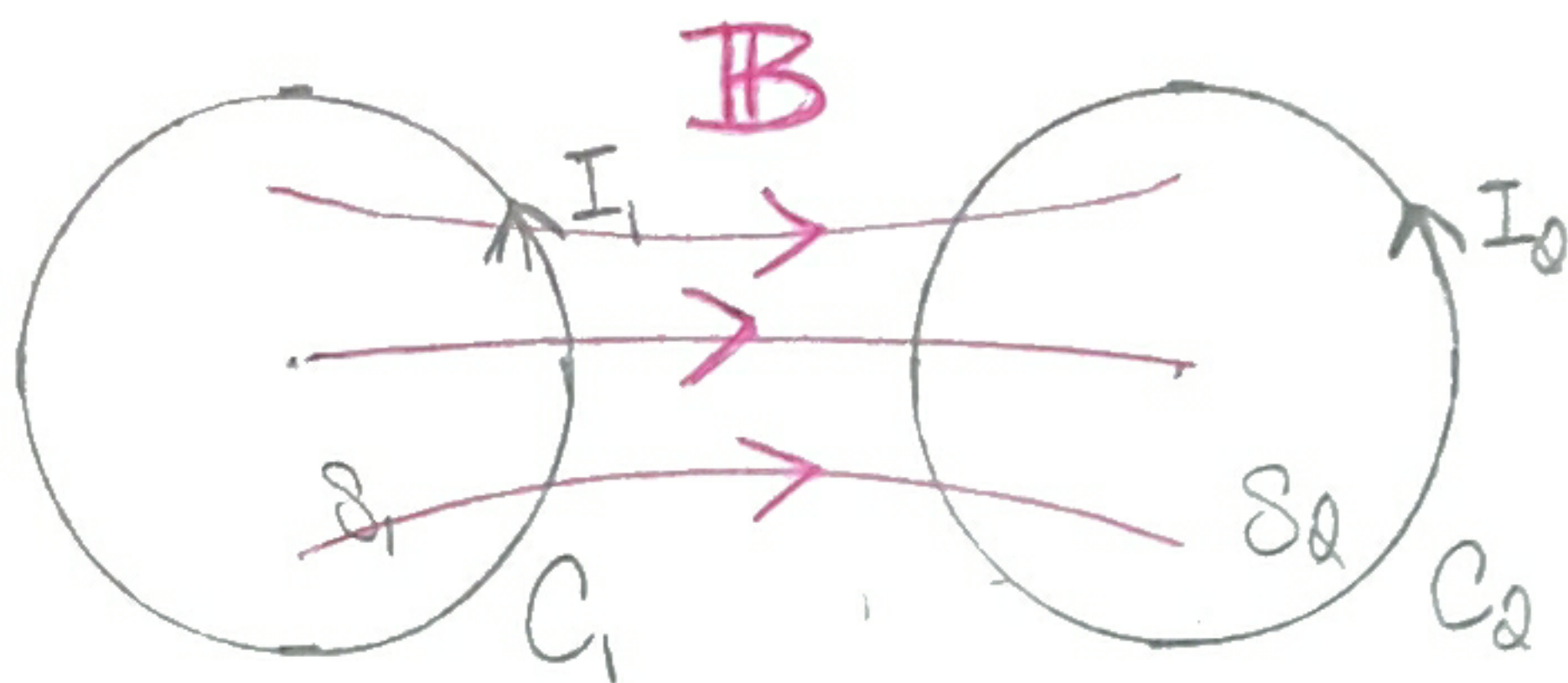
$$B = \frac{\mu_0 I_s}{4\pi a} \int_{-a}^a \frac{(a-x')\hat{y} - a\hat{x}}{(a-x')^2 + a^2} dx'$$

Beräknar x , y -komp var för sig

$$B_x = -\frac{\mu_0 I_s}{4\pi} \int_{-a}^a \frac{dx'}{(a-x')^2 + a^2} = \frac{\mu_0 I_s}{4\pi} \int_{\xi=2a}^0 \frac{1}{\xi^2 + a^2} d\xi = \dots = \frac{\mu_0 I_s}{4\pi a} \tan^{-1}(2)$$

$$B_y = \frac{\mu_0 I_s}{4\pi a} \int_{-a}^a \frac{a-x'}{(a-x')^2 + a^2} dx' = \dots = \frac{\mu_0 I_s}{8\pi a} \ln(5)$$

Q8/11 Induktanser, 6-11



Flöde i slinga 2 från slinga 1

$$\Phi_{12} = \int_{S_2} \mathbf{B}_1 \cdot d\mathbf{S}_2 = L_{12} I_1$$

↑ ömsesidig induktans
proportionalitets konstant

Om C_2 har N_2 varv, definieras **länkat flöde**

$$\Lambda_{12} = N_2 \Phi_{12}$$

generalisera $\Phi_{12} = L_{12} I_1$, till $\Lambda_{12} = L_{12} I_1$, $L_{12} = \frac{\Lambda_{12}}{I_1}$
egeninduktans $L_{11} = \frac{\Lambda_{11}}{I_1}$

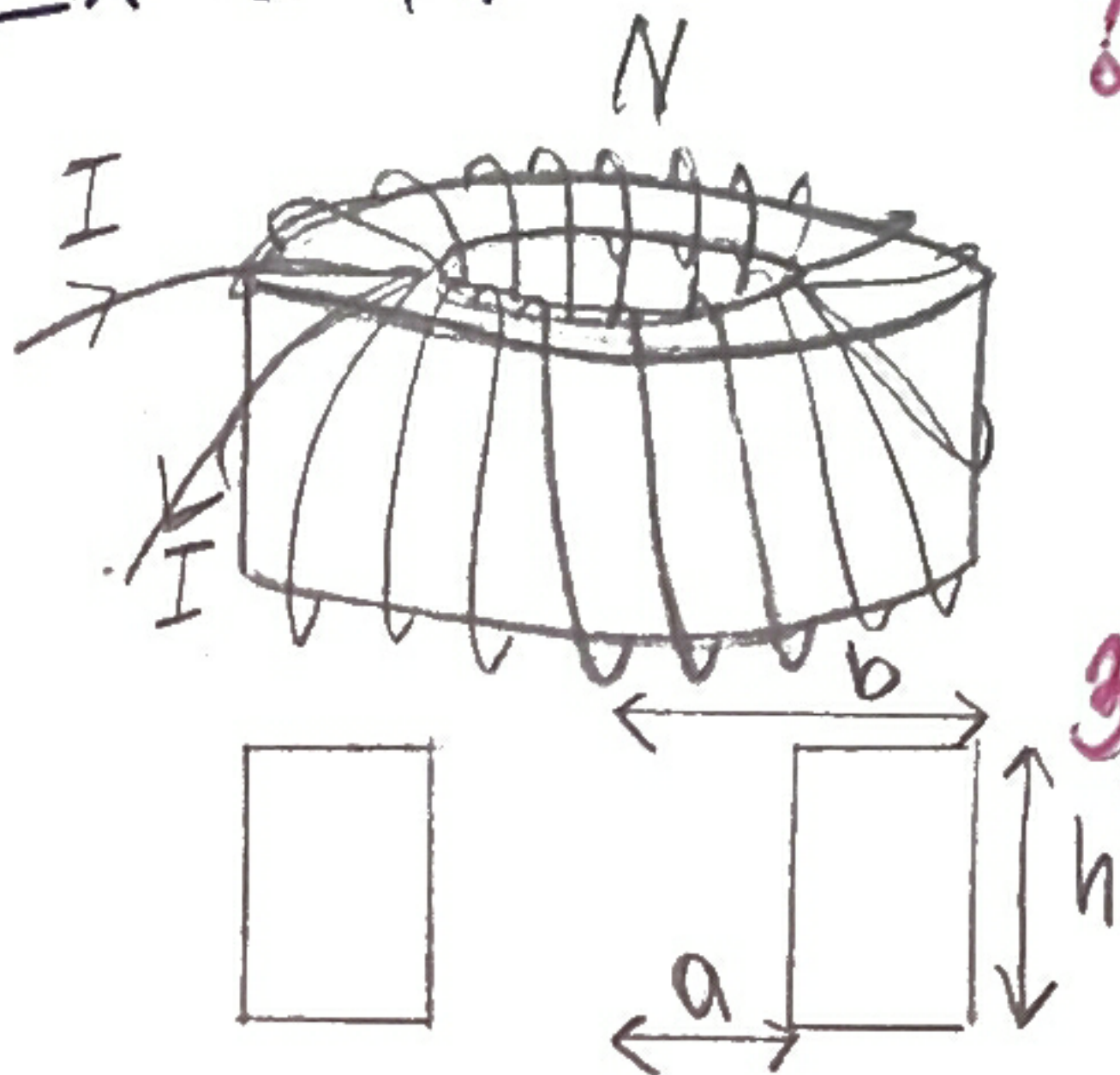
Beräkningsgång

- 1) Antag I_1
- 2) Beräkna \mathbf{B}_1
- 3) Beräkna Φ_{12}
- 4) Beräkna Λ_{12}
- 5) Beräkna $L_{12} = \frac{\Lambda_{12}}{I_1}$

Neumanns formel

$$L_{12} = L_{21}$$

Ex 6-14



2) $\mathbf{B} = \hat{\phi} B_\phi$, $d\mathbf{l} = \hat{\phi} r d\phi$
Ampères lag $\mu N I = \int_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \int_0^{2\pi} B_\phi r d\phi = 2\pi r B_\phi$

$$B_\phi = \frac{\mu N I}{2\pi r}$$

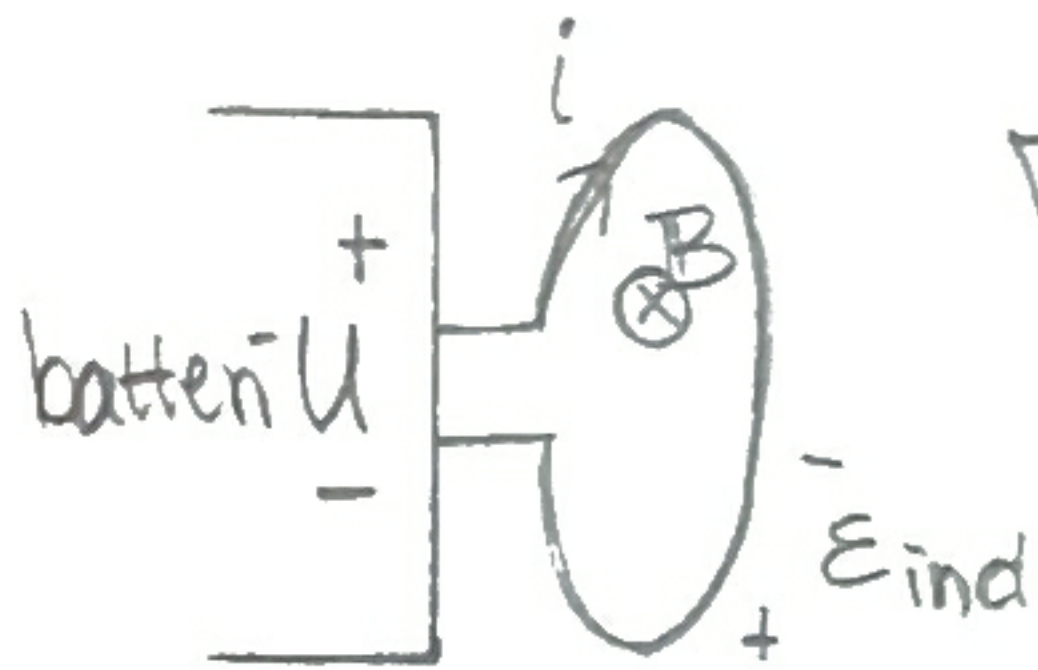
3) $\Phi_{11} = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \int_a^b \hat{\phi} \frac{\mu N I}{2\pi r} \cdot \hat{\phi} h dr = \frac{\mu N I h}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$

$$4) \Lambda_{||} = N\Phi_{||}$$

$$5) L_{||} = \frac{\Lambda_{||}}{I} = \frac{\mu N^2 h}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$$

Magnetisk energi, 6-12

Det kostar energi att bygga upp ett magnetfält



$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \int_S \nabla \times \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{s}, \int_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t} \Rightarrow$$

Om antar resistanslös, $U + \epsilon_{ind} = 0$

$$\Rightarrow \epsilon_{ind} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t} = -\frac{\partial (Li)}{\partial t} = -L \frac{\partial i}{\partial t}$$

Ändring av energi pga ändring i B-fält

$$dW_m = dW_{batteri} = U i dt = -\epsilon_{ind} i dt = i d\Phi$$

För ensam slinga $\Phi = Li$

$$dW_m = U i dt = i d\Phi = i L di$$

$$W_m = \int_0^I i L di = \frac{1}{2} LI^2$$

För N slingor



Arbete i slinga k $dW_k = i_k d\Phi_k$

Arbete vid flödesändring $dW_m = \sum_1^N dW_k = \sum_1^N i_k d\Phi_k$

Låt nu $i_k = \alpha I_k$, $\Phi_k = \alpha \Phi_k$, $d\Phi_k = \Phi_k d\alpha$, $0 \leq \alpha \leq 1$

Uttryck totala arbetet som $W_m = \int dW_m = \sum_1^N I_k \Phi_k \int_0^1 \alpha d\alpha = \frac{1}{2} \sum_1^N \Phi_k I_k$

Magnetisk energi i J & A

$$\text{med } \phi = \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}, \quad I = \int \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s}$$

$$\Rightarrow W_m = \frac{1}{2} \int_{V'} \mathbf{J} \cdot \mathbf{A} dV'$$

- II -

i H & B

$$W_m = \frac{1}{2} \int_{V'} \mathbf{J} \cdot \mathbf{A} dV' = \begin{array}{l} \text{postulat} \\ \text{vektorident.} \\ \text{divergent} \end{array} \dots = \frac{1}{2} \int_{V'} \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} dV'$$

Energi metoden för kraftberäkning, 6-13.3

relatera energiförändring till kraft.

energiförändring i termer av I & ϕ

1) ϕ_k konstant, I_k ändras $\mathbf{F}_\phi = -\nabla W_m$

2) I_k konstant, ϕ_k ändras.

antag en liten förflyttning $d\mathbf{l}$.

batteriet tillför energi $dW_s = \sum I_k d\phi_k$

det går åt till mek-arbete utfört av systemet $dW = \mathbf{F}_I \cdot d\mathbf{l}$

& förändring i lagrad energi $dW_m = \frac{1}{2} \sum I_k d\phi_k = \frac{1}{2} dW_s$

energiförändringen $dW_s = dW + dW_m$

$$\Rightarrow dW = \mathbf{F}_I \cdot d\mathbf{l} = dW_m = (\nabla W_m) \cdot d\mathbf{l}, \quad \mathbf{F}_I = \nabla W_m$$

Ampères kraftlag, 6-13.2

def. av kraft $\mathbf{F} = q\mathbf{u} \times \mathbf{B}$ (en laddningsbärare)

kraft på volym dV' , $d\mathbf{F}_m = Nq dV'(\mathbf{u} \times \mathbf{B}) = Nq \mathbf{u} \times \mathbf{B} dV'$

kraft på volym V' , $\mathbf{F}_m = \int_{V'} \mathbf{J} \times \mathbf{B} dV'$

" $\mathbf{F} = \mathbf{B} I \mathbf{l}$ ", betrakta en tråd.

$$d\mathbf{F}_m = \mathbf{J} \times \mathbf{B} \pi a^2 d\mathbf{l} = \mathbf{J} \pi a^2 d\hat{\mathbf{l}} \times \mathbf{B} = i d\hat{\mathbf{l}} \times \mathbf{B}$$

$$\mathbf{F}_m = i \int_L d\hat{\mathbf{l}} \times \mathbf{B} = i L \mathbf{B}$$

28/11 Elektrodynamik

Faradays lag $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$

Integrera båda sidor

$$\int_S \nabla \times \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{s}$$

$$\int_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{s} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t}$$

Studera 3 fall

- 1) fix slinga i tidsvarierande fält
- 2) ledare i rörelse i statiskt fält
- 3) rörlig slinga i tidsvarierande fält

$$1. V_{\text{ind}} = \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \underbrace{\int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}}_{\Phi(t)} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t}$$

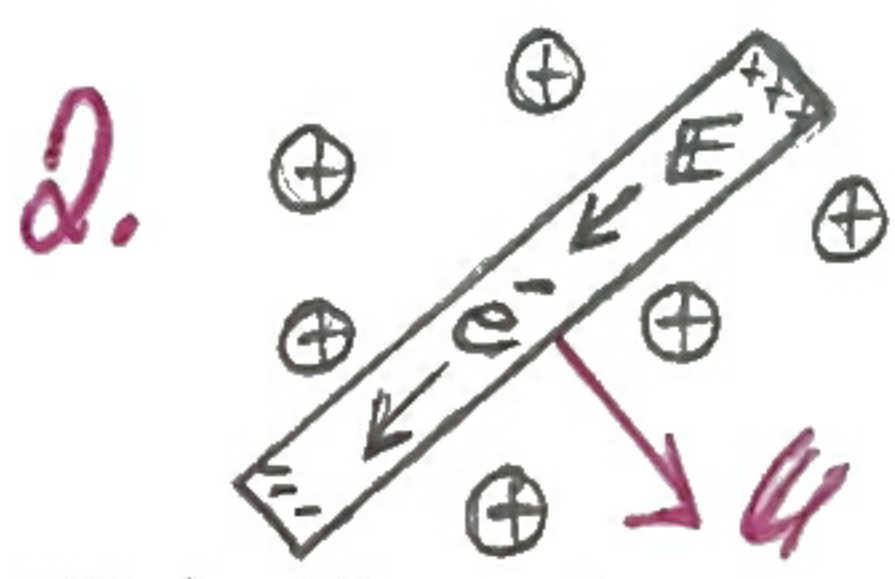
$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \Rightarrow \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{A}) \Rightarrow \nabla \times (\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}) = 0$ konservativt
 \Rightarrow potential definition

$$\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla V$$

$$\Rightarrow \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla V$$

induktion laddning

ingen tidsvariation ger elektrostatiska uttrycket



\mathbf{B} in i pappret

Kraft $\mathbf{F}_m = q \mathbf{u} \times \mathbf{B}$

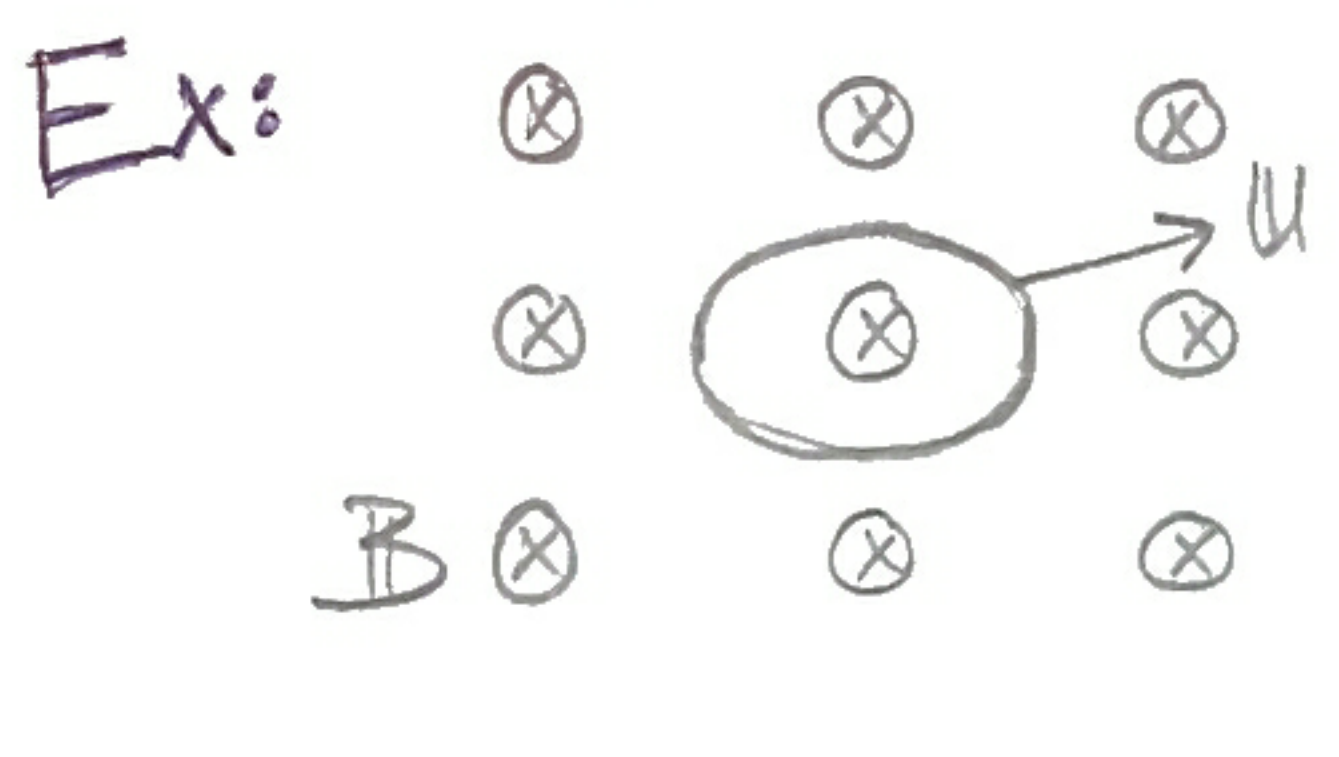
Kraftjämvikt $-\nabla V + \frac{\mathbf{F}_m}{q} = 0 \Rightarrow \nabla V = \mathbf{u} \times \mathbf{B}$

För ett koord. system som rör sig med ledaren

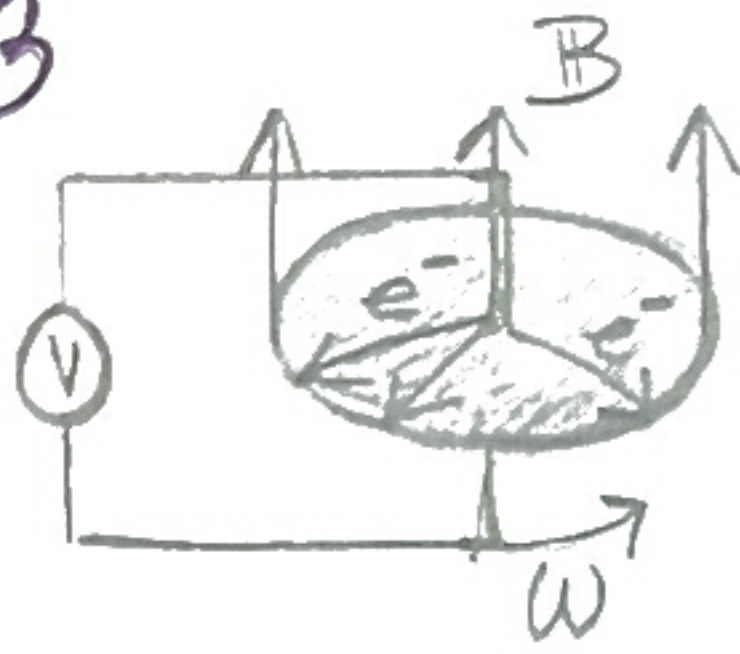
uppfattas den inducerade spänningen som ett E-fält,

\Rightarrow spännande länk till relativitetsteori

$$V_2 - V_1 = \int_1^2 \nabla V \cdot d\mathbf{l} = \int_1^2 (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l}$$

Ex:  Hur mkt spänning induceras i slingan?
 $V_{ind} = \oint_C \mathbf{u} \times \mathbf{B} = 0$

Ex 7-3



3. en ledare rör sig med hastighet \mathbf{u} i fältet $\mathbf{B}(t)$

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$$

{ kraft på laddning pga \mathbf{E} & \mathbf{B} , $\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B})$,
 en observatör som åker med, $\mathbf{F} = q(\mathbf{E}' + \mathbf{0} \times \mathbf{B}) = q\mathbf{E}'$
 där $\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B} \Leftrightarrow \mathbf{E} = \mathbf{E}' - \mathbf{u} \times \mathbf{B}$ }

I rörliga system

$$\oint_C \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{l} = \underbrace{- \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}}_{\text{inducerad elektro- magnetisk kraft}} + \underbrace{\oint_C \mathbf{u} \times \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}}_{\text{rörelse}} = V_{ind} + V_{rörelse} = \dots = - \frac{\partial \Phi}{\partial t}$$

Maxwells ekvationer, 7-3

Hittills $\nabla \times \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

Dessutom $\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$

Är detta konsistent med sig självt? Svar nej!

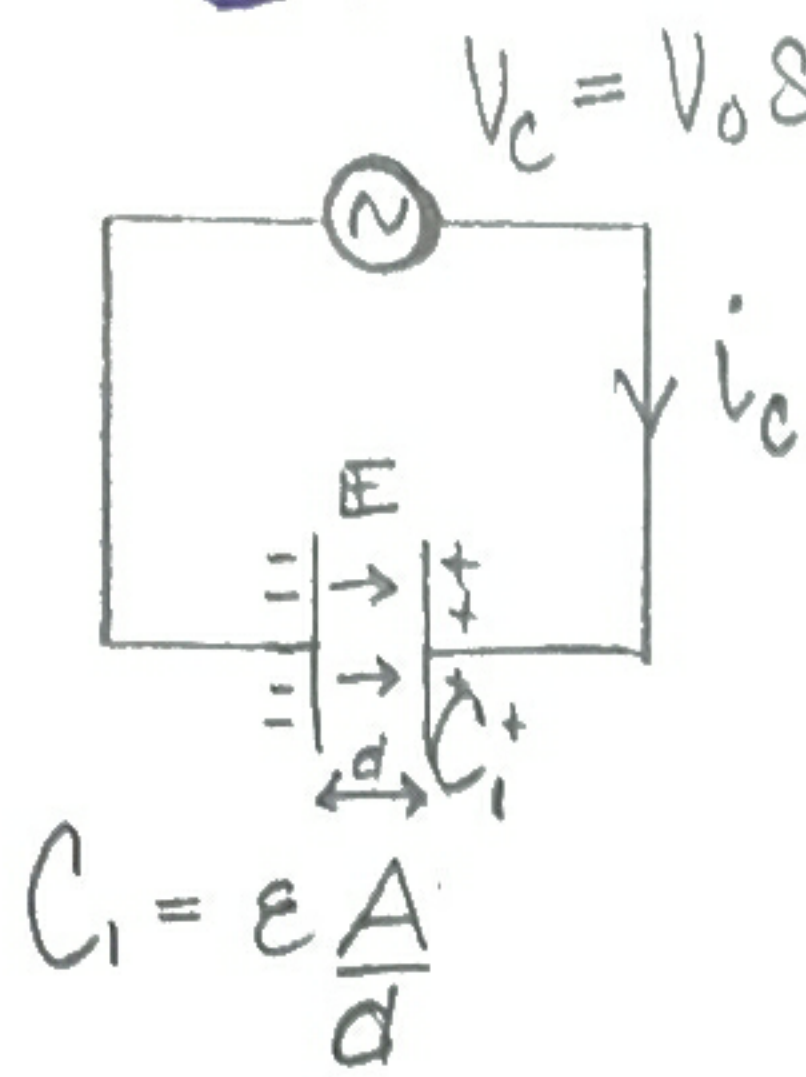
Beräkna $\underbrace{\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{H})}_{\equiv 0} = \nabla \cdot \mathbf{J}$ stämmer ej!

Vi behöver $\nabla \cdot (\nabla \times H) = \nabla \cdot J + \frac{\partial \rho}{\partial t} \equiv 0$ men $\nabla \cdot D = \rho$

$\nabla \cdot (\nabla \times H) = \nabla \cdot J + \frac{\partial \nabla \cdot D}{\partial t} = \nabla \cdot (J + \frac{\partial D}{\partial t}) \rightarrow \nabla \times H = J + \frac{\partial D}{\partial t}$ ←
förflyttningström

Maxwells ekv. på integralform 7-3.1 (läs själv)

Ex 7-5



$i_c = C_1 \frac{\partial v_c}{\partial t} = \omega C_1 V_0 \cos(\omega t)$

Vad är D & E i kondensatorn?

$D = \epsilon E = \epsilon \frac{V_0 \sin(\omega t)}{d}$

Förflyttningström mellan plattorna

$i_D = \int_A \frac{\partial D}{\partial t} \cdot dA = \epsilon \frac{V_0 \omega \cos(\omega t)}{d} \cdot A = C_1 V_0 \omega \cos(\omega t)$

29/11 Retarderade potentialer, 7-4, 7-6

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{B}) = -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{A}) \Rightarrow \nabla \times (\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}) = 0$$

Def! postulaten $\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla V$, $\mathbf{E} = -\nabla V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$
↑ laddning ↙ induktion

I statiken: $V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho}{R} dV'$, $\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}}{R} dV'$ statiska lösningar

I dynamiken: Ampères lag $\nabla \times \mathbf{B} = \mu \mathbf{J} + \mu \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \mu \mathbf{J} + \mu \epsilon \frac{\partial}{\partial t} (-\nabla V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t})$$

$$\{\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}\} \Rightarrow \nabla^2 \mathbf{A} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu \mathbf{J} + \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) + \mu \epsilon \frac{\partial V}{\partial t}$$

Vi måste välja $\nabla \cdot \mathbf{A}$; väljer $\nabla \cdot \mathbf{A} = -\mu \epsilon \frac{\partial V}{\partial t}$

(konsistent m. statiken)

$\Rightarrow \nabla^2 \mathbf{A} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu \mathbf{J}$ (vågekvationen) **Vektorpotentialen**

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho, \quad \nabla \cdot \epsilon (-\nabla V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}) = \rho, \quad \nabla^2 V + \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{A}) = -\frac{\rho}{\epsilon}$$

$$\nabla^2 V - \mu \epsilon \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon} \quad \text{Skalära potentialen}$$

Lösningar?

Propagerande vågor $u = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Antag pktladdning Γ origo $\rho(t) \Delta V'$

Sfäriska koord. (homogen ekv.) $\frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} (R^2 \frac{\partial V}{\partial R}) - \mu \epsilon \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = 0$

Variabelbyte $V(R, t) = \frac{1}{R} u(R, t)$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial R^2} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

Lösningar till ekv. har beroendet $(t - R\sqrt{\mu\epsilon})$ eller $(t + R\sqrt{\mu\epsilon})$

$$u = f(t - R\sqrt{\mu\epsilon}) \Rightarrow V(R, t) = \frac{1}{R} f(t - R\sqrt{\mu\epsilon}) \quad \text{ef fysikalisk}$$

Jmf. E-statiken: $V = \frac{q}{4\pi R\epsilon}$, $\Delta V = \frac{\rho(t)\Delta V'}{4\pi R\epsilon}$

I dynamiken: jmf. & identifierar

$$\Delta f(t - R\sqrt{\mu\epsilon}) = \frac{\rho(t - R\sqrt{\mu\epsilon})\Delta V'}{4\pi R\epsilon}$$

För en volym V' : $V(R, t) = \frac{1}{4\pi R\epsilon} \int_{V'} \frac{\rho(t - R\sqrt{\mu\epsilon})}{R} dV'$

Analogt: $A(R, t) = \frac{\mu}{4\pi R} \int_{V'} \frac{J(t - R\sqrt{\mu\epsilon})}{R} dV'$

dynamiska lösningar

Randvillkor, 7-5

$$E_{in} = E_{out}, \quad D_{in} - D_{out} = \rho_s, \quad H_{in} - H_{out} = J_s, \quad B_{in} = B_{out}$$

Vågekvationer i E & H , 7-6

Vi kan härleda mha postulat

- $\nabla^2 E - \mu\epsilon \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \mu \frac{\partial J}{\partial t} + \frac{1}{\epsilon} \nabla \rho(t)$
- $\nabla^2 H - \mu\epsilon \frac{\partial^2 H}{\partial t^2} = -\nabla \times J(t)$

Om vi inte är intresserade av hur vågen skapas (dvs. $J=0, \rho=0$)

utan propagationen • $\nabla^2 E - \mu\epsilon \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0$

• $\nabla^2 H - \mu\epsilon \frac{\partial^2 H}{\partial t^2} = 0$

Komplexa fält, 7-7

Def. komplext fält som följer tidsberoendet $\cos(\omega t)$

$$E(x, y, z, t) = \text{Re}\{\bar{E}(x, y, z) e^{i\omega t}\} \quad \bar{E} = \text{komplext } E\text{-fält}$$

Vad händer med postulaten?

$$\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t}, \quad \nabla \times \{\text{Re}(\bar{E} e^{i\omega t})\} = -\frac{\partial}{\partial t} \{\text{Re}(\bar{B} e^{i\omega t})\}$$

$$\operatorname{Re}\{\nabla \times (\bar{\mathbf{E}} e^{i\omega t})\} = \operatorname{Re}\left\{-\frac{\partial}{\partial t} (\bar{\mathbf{B}} e^{i\omega t})\right\}$$

$$\operatorname{Re}\{e^{i\omega t} \nabla \times \bar{\mathbf{E}}\} = \operatorname{Re}\{\bar{\mathbf{B}} (-j\omega e^{i\omega t})\}$$

Om detta ska gälla $\forall t \Rightarrow \nabla \times \bar{\mathbf{E}} = -j\omega \bar{\mathbf{B}}$, minnesregel $\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow j\omega$

Maxwells ekv.

$$\begin{aligned} \nabla \times \bar{\mathbf{E}} &= -j\omega \bar{\mathbf{B}} \\ \nabla \times \bar{\mathbf{H}} &= \bar{\mathbf{J}} + j\omega \bar{\mathbf{D}} \\ \nabla \cdot \bar{\mathbf{B}} &= 0 \\ \nabla \cdot \bar{\mathbf{D}} &= \bar{\rho} \end{aligned}$$

Vågekv. $\nabla^2 \bar{\mathbf{V}} + k^2 \bar{\mathbf{V}} = -\bar{\rho}/\epsilon$, $k = \omega\sqrt{\mu\epsilon} = \omega/u$

$$\nabla^2 \bar{\mathbf{A}} + k^2 \bar{\mathbf{A}} = -\mu \bar{\mathbf{J}}$$

Homogena fältkv. $\nabla^2 \bar{\mathbf{E}} + k^2 \bar{\mathbf{E}} = 0$

$$\nabla^2 \bar{\mathbf{H}} + k^2 \bar{\mathbf{H}} = 0$$

Plana vågor, §-1, §-2

Källfri vågekv. i vakuum, $\nabla^2 \bar{\mathbf{E}} + k_0^2 \bar{\mathbf{E}} = 0$ där $k_0 = \omega\sqrt{\mu_0\epsilon_0}$

Cart. koord. $(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k_0^2) \bar{\mathbf{E}} = 0$

Antag plan våg; konstant amplitud & fasi plan vinkelrätt mot utbredningsriktningen.

Antag att den propagerar i z-led, dvs. $\frac{\partial^2 \bar{E}_x}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \bar{E}_x}{\partial y^2} = 0$,

$$\text{då } \bar{\mathbf{E}} = \hat{x} \bar{E}_x,$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 \bar{E}_x}{\partial z^2} + k_0^2 \bar{E}_x = 0$$

Lösning: $\bar{E}_x(z) = \bar{E}_x^+(z) + \bar{E}_x^-(z) = \bar{E}_0^+ e^{-jk_0 z} + \bar{E}_0^- e^{jk_0 z}$

Generaliserad form: $\bar{\mathbf{E}}(x, y, z) = \bar{\mathbf{E}}_0 e^{-jk_x x - jk_y y - jk_z z}$

Vågekv. uppfyllnadom $k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \omega^2 \mu \epsilon$

På kompakt form $\bar{\mathbf{E}}(\mathbf{R}) = \bar{\mathbf{E}}_0 e^{-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}}$, $\mathbf{k} = \hat{x} k_x + \hat{y} k_y + \hat{z} k_z$

$$\mathbf{R} = \hat{x} x + \hat{y} y + \hat{z} z$$

1/12 Mer om plana vågor

Vågekvationen $\nabla^2 \bar{E} + k_0^2 \bar{E} = 0$ (vakuum)

$\nabla^2 \bar{E} + k^2 \bar{E} = 0$ (homogena material)

$\nabla^2 \bar{E} + k_c^2 \bar{E} = 0$ (material m förluster)

Man brukar def! $\gamma = ik_c = j\omega\sqrt{\mu\epsilon_c} = \alpha + j\beta$ där $\epsilon_c = \underbrace{\epsilon'}_{\epsilon_0\epsilon_r} - j\underbrace{\epsilon''}_{\sigma/\omega}$

$$\Rightarrow \nabla^2 \bar{E} - \gamma^2 \bar{E} = 0$$

För en plan våg $\bar{E} = \hat{x} \bar{E}_x(z)$ blir vågekv. $\frac{\partial^2 \bar{E}_x(z)}{\partial z^2} - \gamma^2 \bar{E}_x(z) = 0$
med lösning $\bar{E}_x(z) = \bar{E}_x^+(0) e^{-\gamma z} + \bar{E}_x^-(0) e^{\gamma z}$

$$\{ \bar{E}_x^+(0) = E_0^+ e^{j\theta^+}, \bar{E}_x^-(0) = E_0^- e^{j\theta^-} \}$$

Motsvarande reell ekv.

$$E_x(z,t) = \text{Re} \left\{ E_0^+ e^{j\theta^+} e^{-(\alpha+j\beta)z} + E_0^- e^{j\theta^-} e^{(\alpha+j\beta)z} \right\} e^{j\omega t} = \\ = E_0^+ e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z + \theta^+) + E_0^- e^{\alpha z} \cos(\omega t + \beta z + \theta^-)$$

där α = dämpning & β är faskonstant.

α & β , kap 8-3

$$\gamma = ik_c = j\omega\sqrt{\mu\epsilon_c} = \alpha + j\beta, \quad \epsilon_c = \epsilon - j\frac{\sigma}{\omega} \Rightarrow \gamma = j\omega\sqrt{\mu\epsilon} \left(1 + \frac{\sigma}{j\omega\epsilon}\right)^{1/2}$$

$$\alpha = \omega\sqrt{\frac{\epsilon\mu}{2}} \sqrt{\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)^2} - 1}, \quad \beta = \omega\sqrt{\frac{\epsilon\mu}{2}} \sqrt{\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)^2} + 1} \quad \alpha, \beta \geq 0$$

$$\text{För goda ledare } \left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right) \gg 1 \Rightarrow \alpha \approx \beta \approx \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}}$$

$$\text{För dielektriska material } \frac{\sigma}{\omega\epsilon} \ll 1 \Rightarrow \alpha \approx \frac{\sigma}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}, \quad \beta \approx \omega\sqrt{\epsilon\mu}$$

Lite notation: $k_c = k_r - jk_i$

$$\gamma = ik_c$$

$$\alpha = -k_i$$

$$\beta = k_r$$

$$\epsilon_c = \epsilon' - j\epsilon'' = \epsilon - j\sigma/\omega$$

Vågimpedans, 8-2.2

I boken förlustfritt, här med förluster. Relation mellan \mathbf{B} & \mathbf{E} :

$$\nabla \times \bar{\mathbf{E}} = -j\omega \bar{\mathbf{B}}$$

Anta $\bar{\mathbf{E}} = \hat{x} \bar{E}_x(z)$, $\Rightarrow \bar{\mathbf{H}} = \frac{-1}{j\omega\mu} \left[\hat{y} \frac{\partial \bar{E}_x}{\partial z} \right] = \hat{y} \frac{-1}{j\omega\mu} \left[-\gamma \bar{E}_x^+(z) + \gamma \bar{E}_x^-(z) \right] =$

$$= \hat{y} \frac{\gamma}{j\omega\mu} \left[\bar{E}_x^+(z) - \bar{E}_x^-(z) \right] = \hat{y} \left[\bar{H}_y^+(z) + \bar{H}_y^-(z) \right]$$

$$\bar{H}_y^+(z) = \frac{\gamma}{j\omega\mu} \bar{E}_x^+(z) = \frac{1}{Z_1} \bar{E}_x^+(z)$$

$$\bar{H}_y^-(z) = \frac{-\gamma}{j\omega\mu} \bar{E}_x^-(z) = -\frac{1}{Z_1} \bar{E}_x^-(z)$$

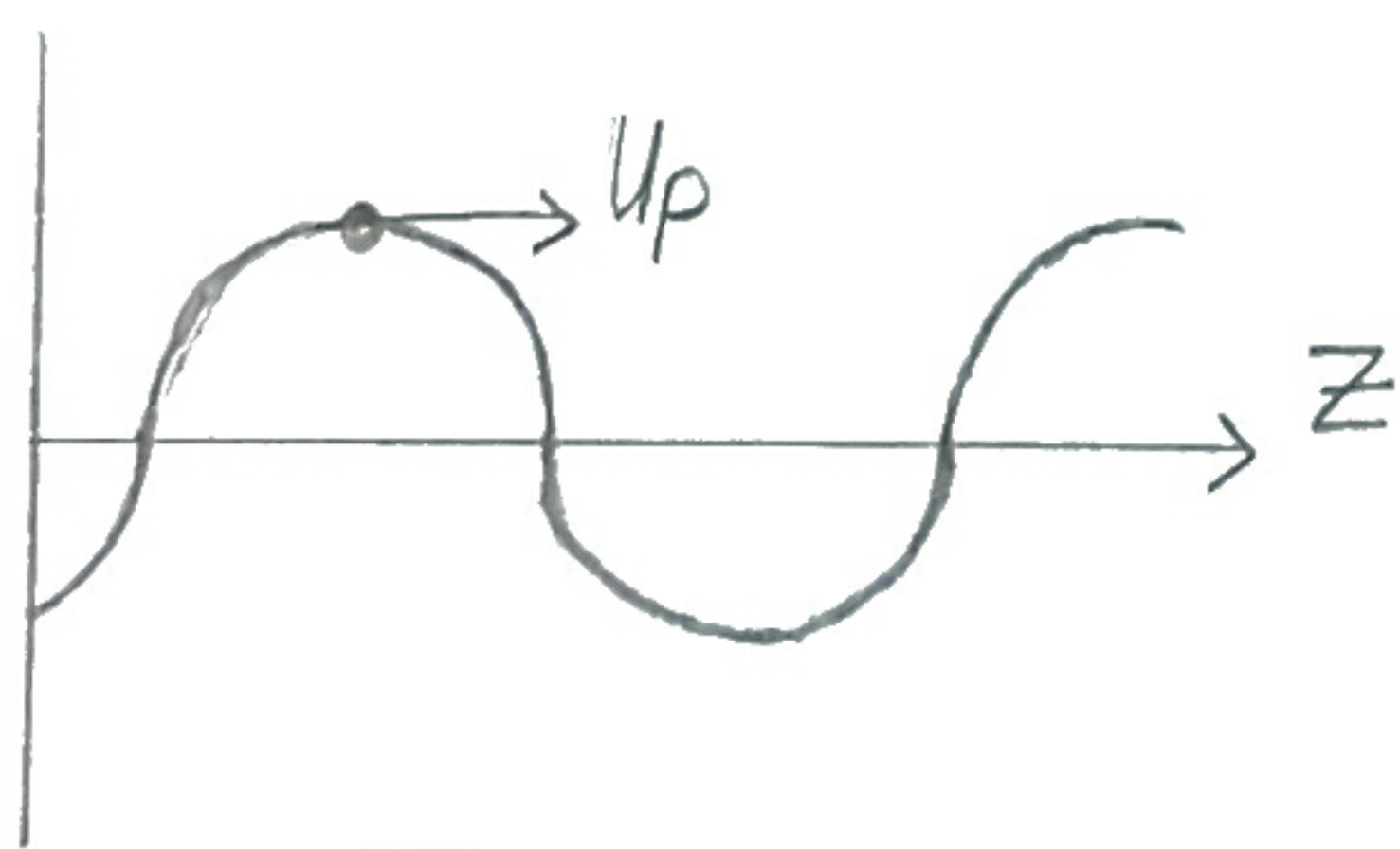
$$Z_1 = \frac{j\omega\mu}{\gamma} = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{j\omega\epsilon + \sigma}} \quad \text{ty } \gamma = j\omega\mu(j\omega\epsilon + \sigma)$$

En godtycklig plan våg $\bar{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) = \bar{\mathbf{E}}(0) e^{-\gamma \hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{r}}$, $\hat{\mathbf{k}} \cdot \bar{\mathbf{E}} = 0$

$$\Rightarrow \left. \begin{aligned} \bar{\mathbf{H}} &= \frac{1}{Z_1} \hat{\mathbf{k}} \times \bar{\mathbf{E}} \\ \bar{\mathbf{E}} &= Z_1 \bar{\mathbf{H}} \times \hat{\mathbf{k}} \end{aligned} \right\}$$

Fas hastighet, 8-2

$E_x^+(z, t) = E_0^+ \cos(\omega t - k_0 z)$ plan våg i vakuum



följ en viss topp, $\omega t - k_0 z = \text{konstant}$

derivera m.p. t, $\omega - k_0 \frac{\partial z}{\partial t} = 0$

$$\Rightarrow u_p = \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\omega}{k_0} = \frac{\omega}{\beta}$$

Grupp hastighet

Två vågor $\begin{matrix} \omega_0 + \Delta\omega & \beta_0 + \Delta\beta \\ \omega_0 - \Delta\omega & \beta_0 - \Delta\beta \end{matrix}$

$$E(z, t) = E_0 \cos((\omega_0 + \Delta\omega)t - (\beta_0 + \Delta\beta)z) + E_0 \cos((\omega_0 - \Delta\omega)t - (\beta_0 - \Delta\beta)z) =$$

$$= 2E_0 \cos(\Delta\omega t - \Delta\beta z) \cos(\omega_0 t - \beta_0 z)$$

$$\Delta\omega t - \Delta\beta z = \text{konstant}$$

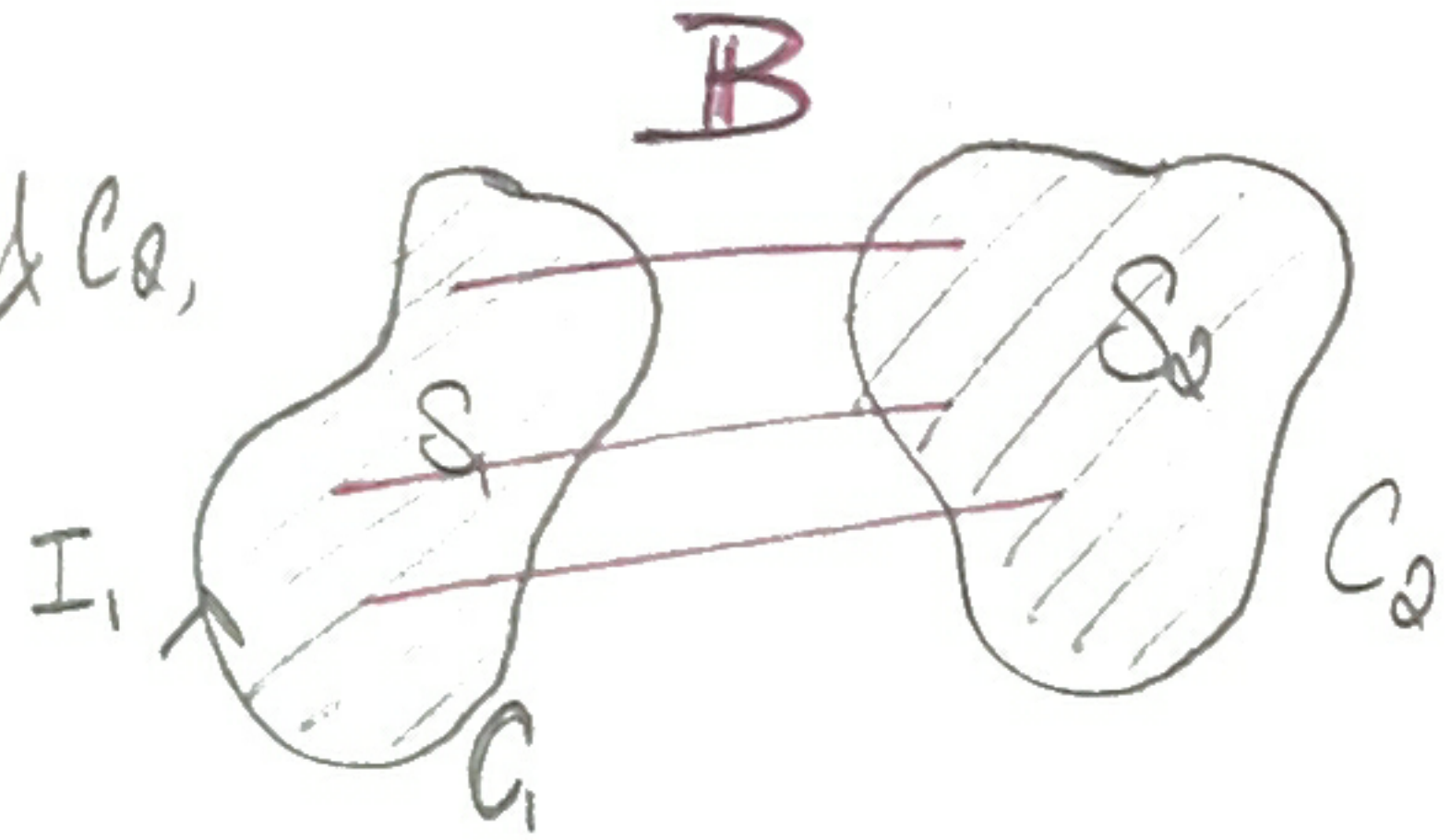
$$v_g = \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\Delta\omega}{\Delta\beta}, \quad \text{med } \Delta\omega \rightarrow 0 \quad v_g = \frac{1}{\frac{\partial\beta}{\partial\omega}}$$

Storgruppsövning 29/11

Extra uppgifter att räkna hemma P6-39, P6-42, P6-47

Induktans

Två närliggande slutna kurvor C_1 & C_2 , omsluter ytor S_1 & S_2 .



Ström genom C_1 ger upphov till magnetiskt fält B_1 . Detta ger i sin tur ett magnetiskt flöde genom S_1 , Φ_{11} & genom S_2 , Φ_{12} ,

$$\text{egen induktans } L_{11} = \frac{N_1 \Phi_{11}}{I_1}$$

$$\text{"ömsesidig induktans } L_{12} = \frac{N_2 \Phi_{12}}{I_1}$$

Induktans relaterar flöde till ström (jmf. kapacitans relaterar laddning till spänning)

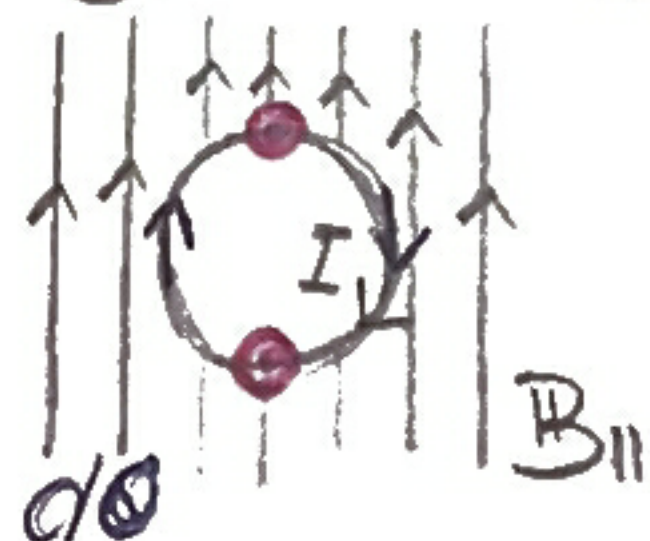
Beräkning av induktans L_{ab}

- 1) bestäm koord. system
- 2) ansätt ström I_a genom slinga a
- 3) beräkna B vid slinga b
- 4) beräkna flödet genom slinga b
- 5) $L_{ab} = \frac{N_b \Phi_{ab}}{I_a}$

Magnetisk kraft på ledande slinga $d\vec{F}_m = I d\vec{l} \times \vec{B}$, $\vec{F}_m = \oint \vec{l} \times \vec{B}$

$$\text{sluten slinga } \vec{F}_m = \int_C I d\vec{l} \times \vec{B}$$

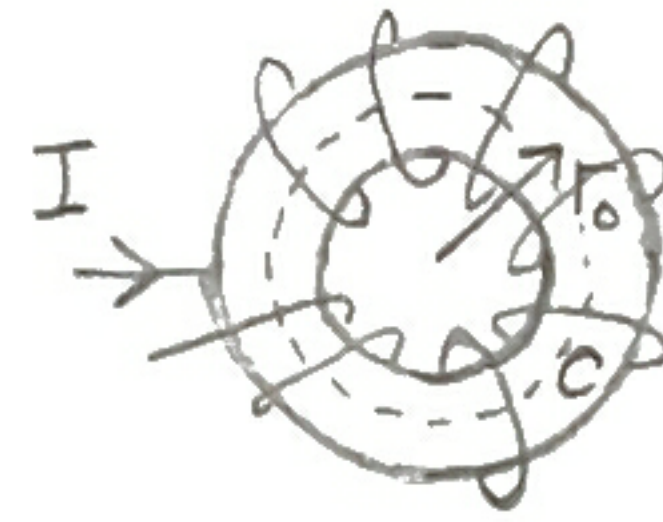
Ex: cirkulär slinga i homogent magnetfält, dela upp $B = B_{\perp} + B_{\parallel}$



$\odot F$

P6-35 bestämm egeninduktansen hos en slinga som lindats N ggr kring en luftkärna i form av en torus, med medelradie r_0 & cirkulärt tvärsnitt med radie b . Jmf med fallet då $b \ll r_0$

Lösning $b \ll r_0$.



tvärsnitt



1. Cylindriska koord.

origo i centrum av torusen

\hat{z} ut ur pappret.

2. Ansätter ström I i slingan

3. Ampères lag $\oint_C \mathbf{B} d\mathbf{l} = \mu_0 I_{in} = \mu_0 N I$

$$\mathbf{B} = B_\varphi \hat{\varphi} \Rightarrow B_\varphi 2\pi r_0 = \mu_0 N I \Rightarrow B_\varphi = \frac{\mu_0 N I}{2\pi r_0}$$

4. $\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$, $b \ll r_0 \Rightarrow$ kan anta \mathbf{B} konstant över tvärsnittet

$$\Rightarrow \Phi = B_\varphi S = \frac{\mu_0 N I}{2\pi r_0} \pi b^2 = \frac{\mu_0 N I b^2}{2 r_0}$$

5. $L = \frac{N\Phi}{I} = \frac{N \mu_0 N I b^2}{2 r_0} \cdot \frac{1}{I} = \frac{\mu_0 N^2 b^2}{2 r_0}$ (induktans beror ej på I)

$b \ll r_0$

1.-3 som ovan.

4. $\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$, \mathbf{B} ej konstant över S

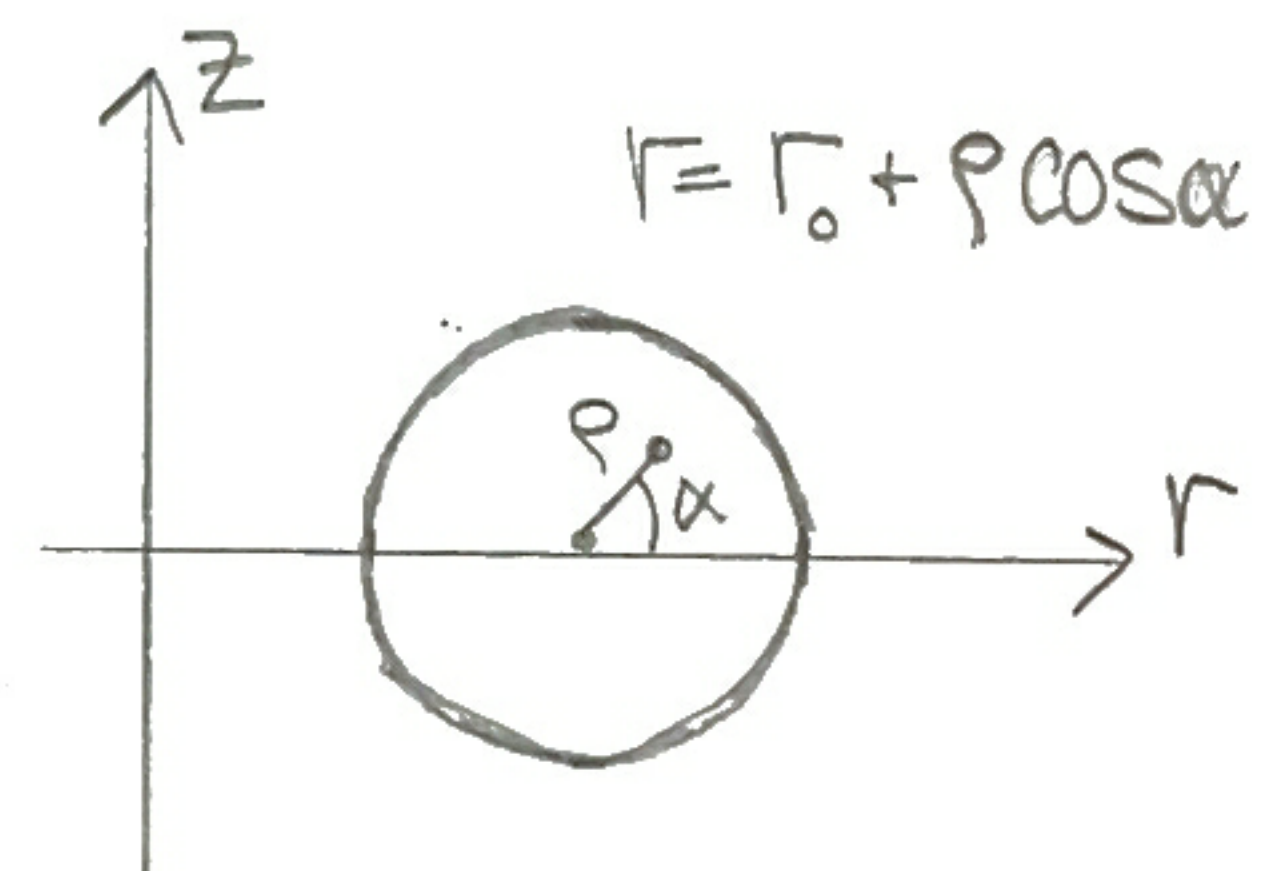
Integrera över tvärsnitt

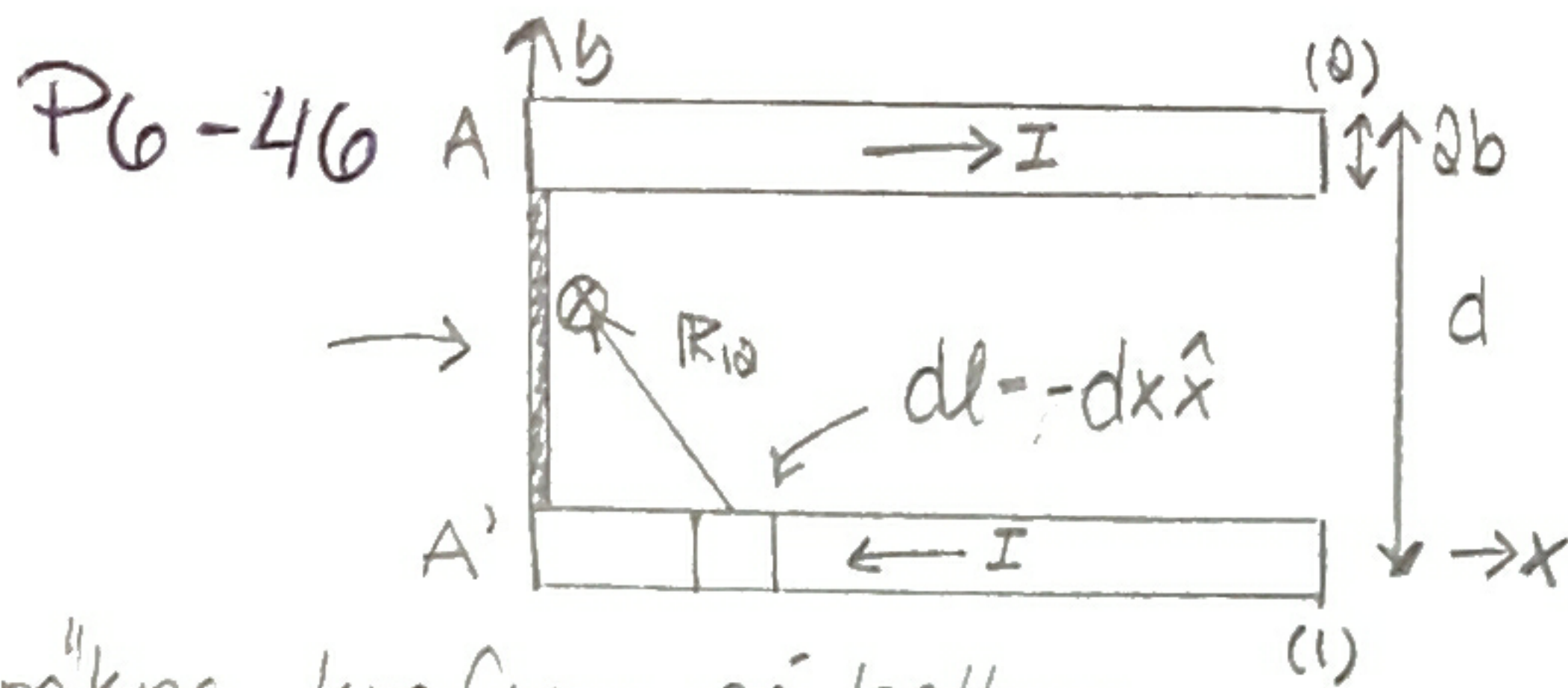
$$\begin{aligned} \rho &: 0 \rightarrow b \\ \alpha &: 0 \rightarrow 2\pi \\ dS &= \rho d\rho d\alpha \end{aligned}$$

$$\Phi = \frac{\mu_0 N I}{2\pi} \int_{\rho=0}^b \int_{\alpha=0}^{2\pi} \frac{1}{r_0 + \rho \cos \alpha} \rho d\rho d\alpha = \frac{\mu_0 N I}{2\pi} \int_0^b \frac{2\pi \rho}{\sqrt{r_0^2 - \rho^2}} d\rho = \mu_0 N I \left[\sqrt{r_0^2 - \rho^2} \right]_0^b =$$

$$= \mu_0 N I (r_0 - \sqrt{r_0^2 - b^2})$$

$$5. L = N\Phi / I = \mu_0 N^2 (r_0 - \sqrt{r_0^2 - b^2})$$





Balken mellan A & A' leder strömmen I mellan 2 väldigt långa parallella ledare.

Beräkna kraften på balken.

Lösning

$$\mathbf{F}_m = \int_C I d\mathbf{l} \times \mathbf{B}, \text{ beräkna } \mathbf{B} \text{ vid balken}$$

$$\text{Biot-Savarts } \mathbf{B}(R_{12}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{C_1} \frac{d\mathbf{l}_1 \times \mathbf{R}_{12}}{R_{12}^3}$$

$$\text{för (1)} \quad d\mathbf{l}_1 = -dx' \hat{x}, \quad \mathbf{R}_{12} = -x' \hat{x} + y \hat{y}, \quad R_{12} = \sqrt{x'^2 + y^2}$$

prim koord = källpkt

$$d\mathbf{l}_1 \times \mathbf{R}_{12} = (-dx' \hat{x}) \times (-x' \hat{x} + y \hat{y}) = -dx' y \hat{z}$$

$$\mathbf{B}_1 = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{x'=0}^{\infty} \frac{-dx' y \hat{z}}{(y^2 + x'^2)^{3/2}} = -\frac{\mu_0 I y}{4\pi} \hat{z} \left[\frac{x'}{y^2 \sqrt{x'^2 + y^2}} \right]_0^{\infty} = -\frac{\mu_0 I \hat{z}}{4\pi y}$$

$\rightarrow \frac{1}{y^2}, x' \rightarrow \infty$

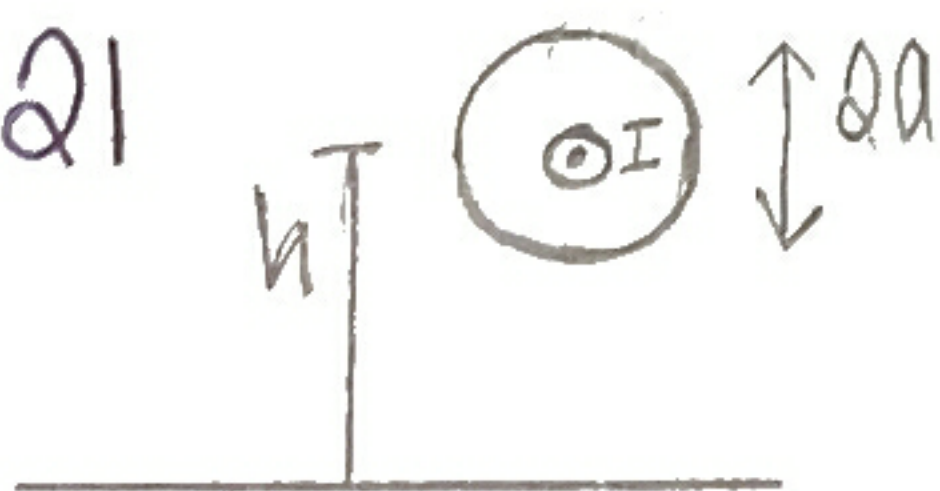
för (2)

$$\mathbf{B}_2 = \frac{\mu_0 I}{4\pi(y-d)} \hat{z} = -\frac{\mu_0 I}{4\pi(d-y)} \hat{z}$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2 = -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{d-y} \right) \hat{z}$$

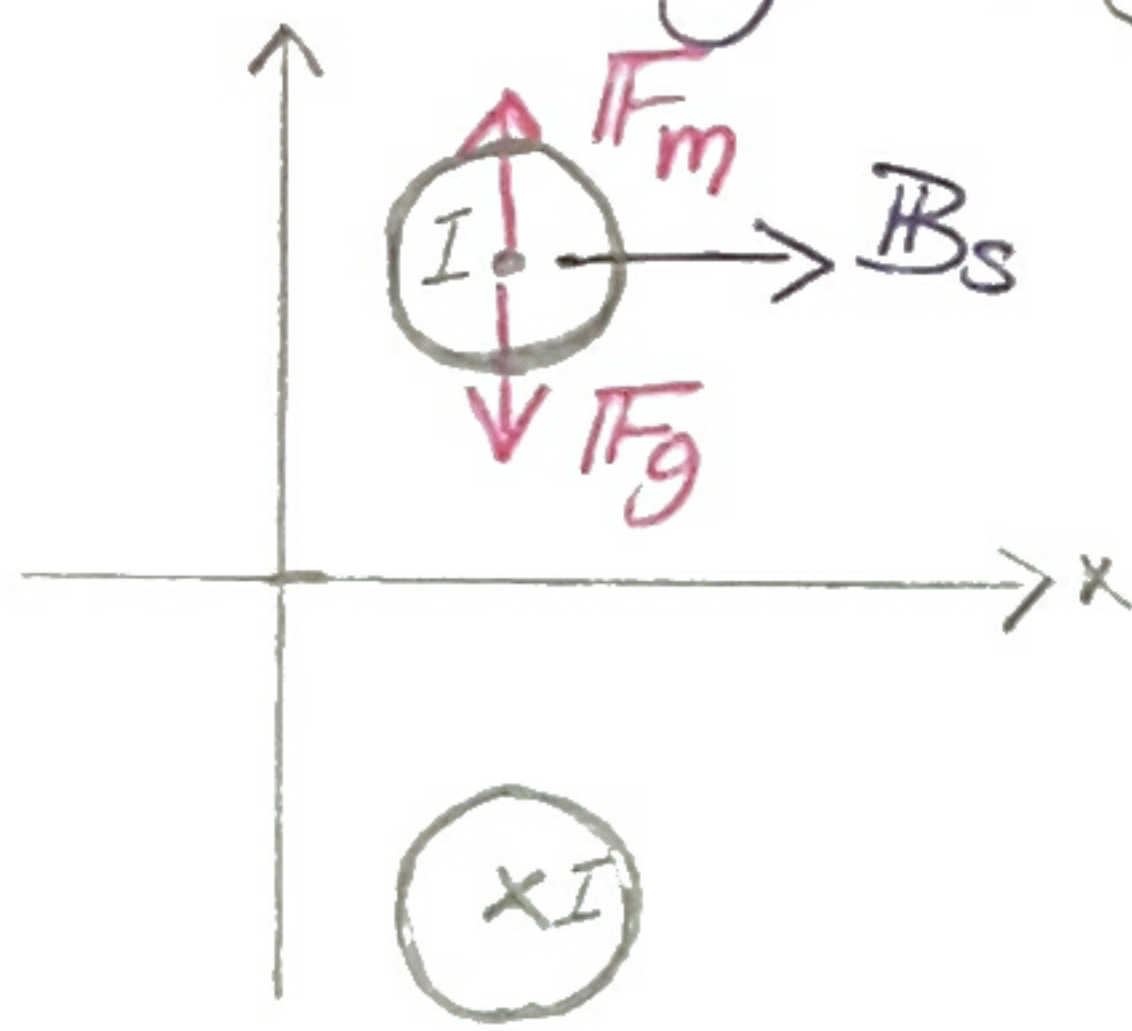
$$\begin{aligned} \mathbf{F}_m &= \int_C I d\mathbf{l} \times \mathbf{B} = \int_C I dy \hat{y} \times \left(-\frac{\mu_0 I}{4\pi} \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{d-y} \right) \hat{z} \right) = -\frac{\mu_0 I^2}{4\pi} \hat{x} \int_{y=b}^{y=d-b} \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{d-y} \right) dy = \\ &= -\frac{\mu_0 I^2}{4\pi} \hat{x} \left[\ln y - \ln(d-y) \right]_b^{d-b} = -\frac{\mu_0 I^2}{4\pi} \hat{x} \ln \left(\frac{(d-b)^2}{b^2} \right) = -\frac{\mu_0 I^2}{2\pi} \ln \left(\frac{d-b}{b} \right) \hat{x} \end{aligned}$$

7-21



en rak, strömförande ledare med cirkulärt tvärsnitt, svävar utan mekaniskt stöd parallellt över ett stort, horisontellt, supraledande plan. Beräkna höjden över planet, om ledarens masstäthet är η , radie a & strömstyrka I

Lösning speglarplanet



$$B_s = \frac{\mu_0 I}{2\pi h}$$

$$2h = R_{10}$$

$$F_m = \int_{z=-L/2}^{L/2} I dz \hat{z} \times \frac{\mu_0 I}{4\pi h} \hat{x} = \frac{\mu_0 I}{4\pi h} \hat{y} \int_{-L/2}^{L/2} dz =$$

$$= \frac{\mu_0 I L}{4\pi h} \hat{y} \quad \text{magnetiska kraften på en bit av ledaren m. längd } L.$$

Då ledarna svävar: $F_m = -F_g$

$$F_g = -mg\hat{y} = -\eta L g \hat{y} = -\eta L \pi a^2 g \hat{y}$$

gravitationskraften på en bit av ledaren m. längd L .

$$\Rightarrow \frac{\mu_0 I L}{4\pi h} = \eta L \pi a^2 g \Rightarrow h = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi \eta a^2 g}$$

Storgruppsövning 1/12

Maxwells ekv. $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$ Gauss lag

$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ Faradays lag

$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ Lagen om avsaknad av magnetiska laddningar

$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ Ampères lag

Faradays lag

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \int_S (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{S} = -\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}, \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t}$$

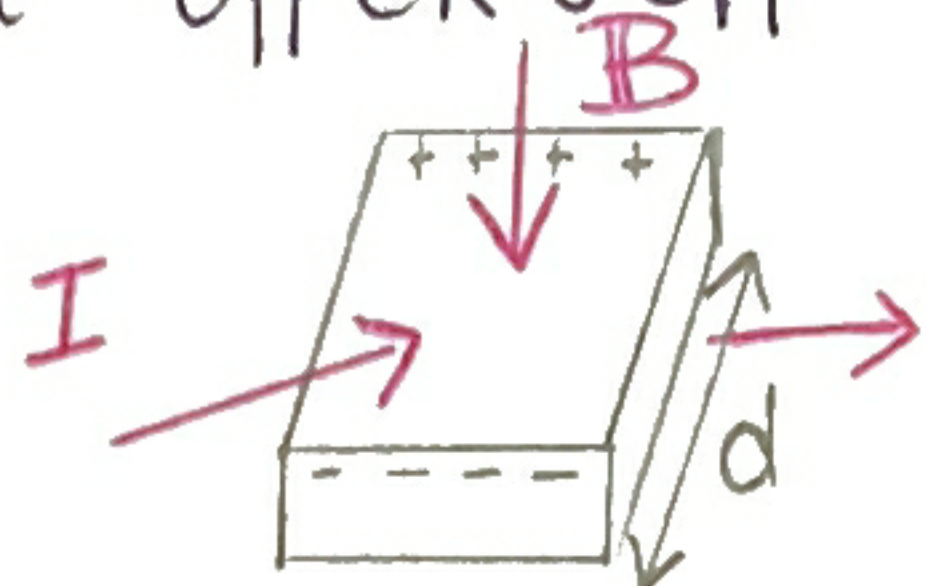
$$\Rightarrow V_{\text{ind}} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t}$$

Induktans

egeninduktans $L_1 = \frac{N_1 \Phi_1}{I_1}$

ömsesidig induktans $M_{12} = \frac{N_2 \Phi_{12}}{I_1}$

Hall-effekten



$$\mathbf{F}_m = q\mathbf{u} \times \mathbf{B}$$

Kraft från \mathbf{B} : $q\mathbf{u}\mathbf{B}$

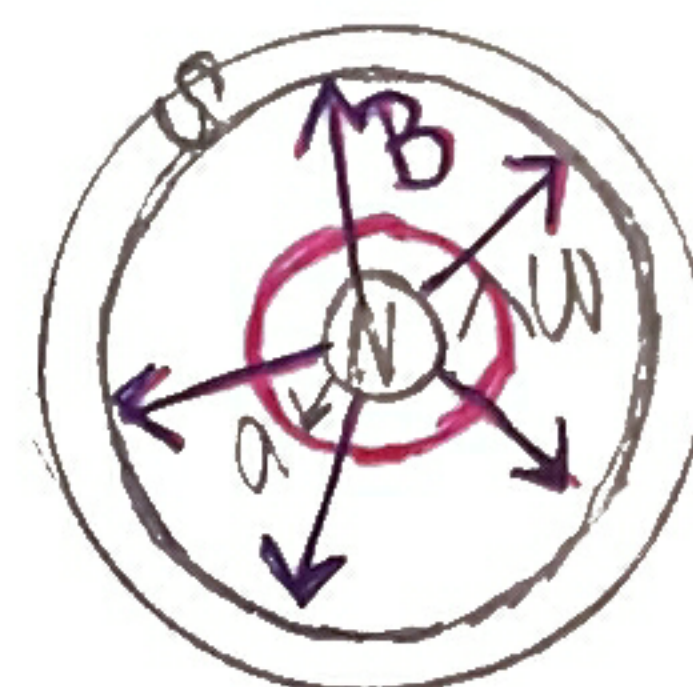
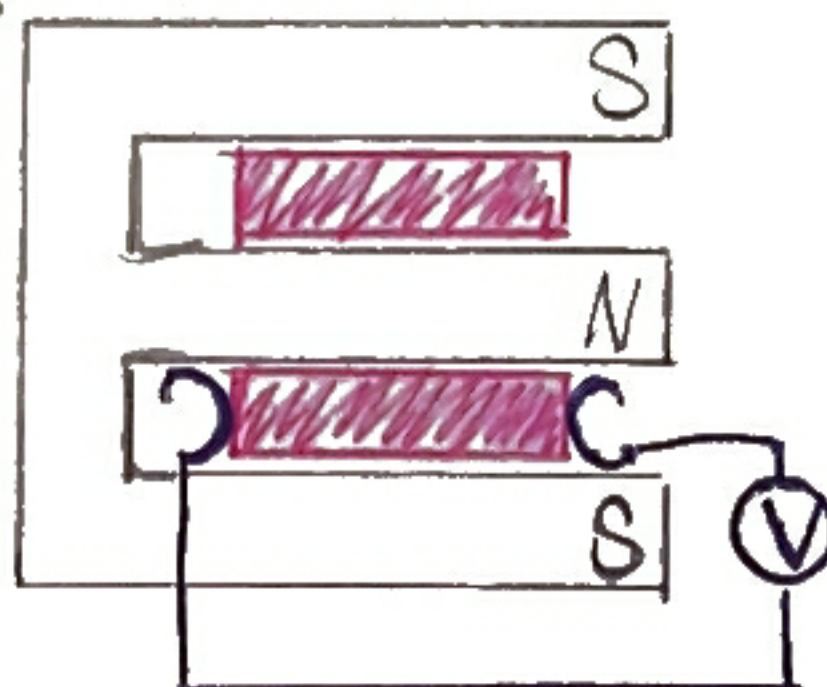
Kraft från inducerade \mathbf{E} : $\frac{V_h}{d} q$

Jämnikt: $d \cdot B \cdot u = V_h$

10-4 I en unipolarmaskin är magnetpolerna utbildade till koaxiala järncyklindrar, mellan vilka ett kopparrör roterar. Flödet mellan polerna är $\Phi = 0,85 \text{ Wb}$.

Vilken vinkelhastighet ska röret ha för att inducera

$U = 10 \text{ V}$ mellan ändarna?



Lösning när cylindern roterar rör sig e^- genom magnetfältet,

$$\begin{cases} \mathbf{F} = q \mathbf{u} \times \mathbf{B} \\ \mathbf{u} = a\omega \hat{\phi} \\ \mathbf{B}(r=a) = \frac{\Phi}{2\pi a L} \hat{r} \end{cases} \Rightarrow \mathbf{F} = -\frac{q\Phi\omega}{2\pi L} \hat{z}$$

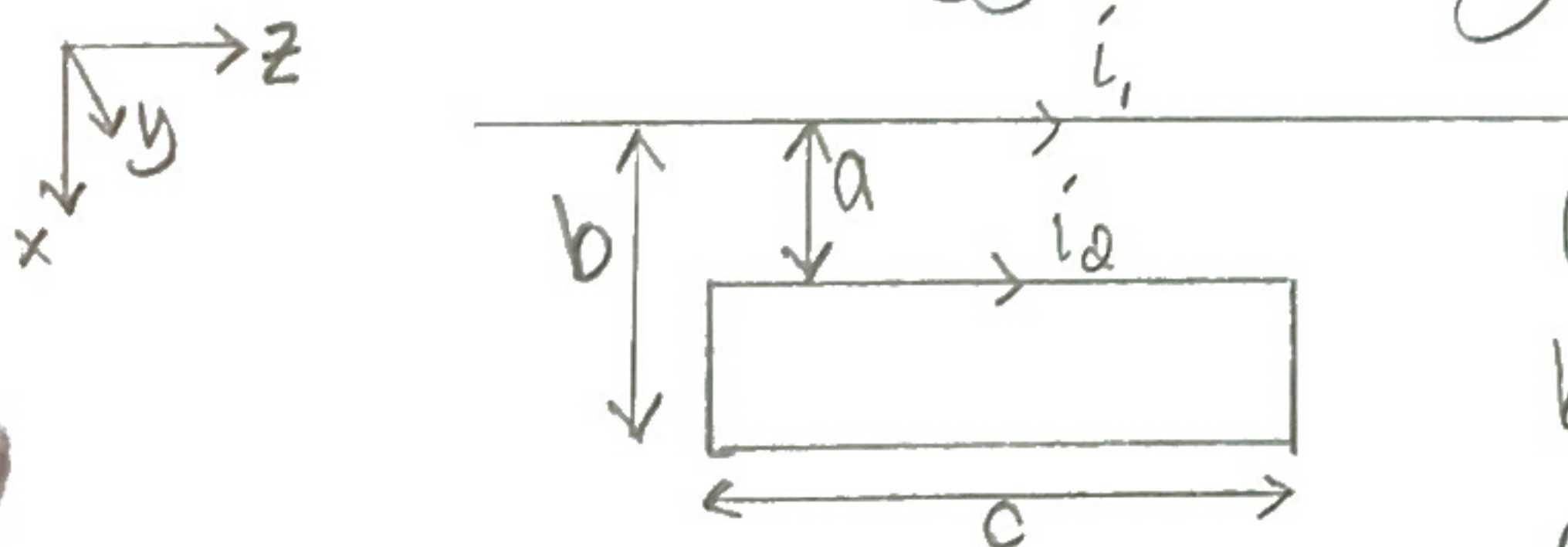
\Rightarrow de negativa e^- trycks mot cylinderns högra sida.

Laddningsskillnaden ger upphov till en motriktad kraft, som vid jämvikt har samma belopp:

$$U = \int_0^L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{z} = \int_0^L -\frac{F_e}{q} dz = \frac{\Phi\omega}{2\pi}$$

$$\Rightarrow \omega = \frac{2\pi U}{\Phi} \text{ [rad/s]} \Rightarrow \frac{\omega}{2\pi} \cdot 60 \text{ s/min} = 2400 \text{ [varv/min]}$$

10-6 Rektangulär trådslinga, med resistans R & själv-induktans L , ligger en lång, rak ledare med ström $i_1 = I_0 \cos(\omega t)$



Beräkna...

- ömsesidiga induktansen
- strömmen i_2
- magnetiska kraften på slingan
- tidsmedelvärdet på kraften

Lösning

a) ömsesidig induktans $M_{12} = \frac{N_1 \Phi_{12}}{i_1}$

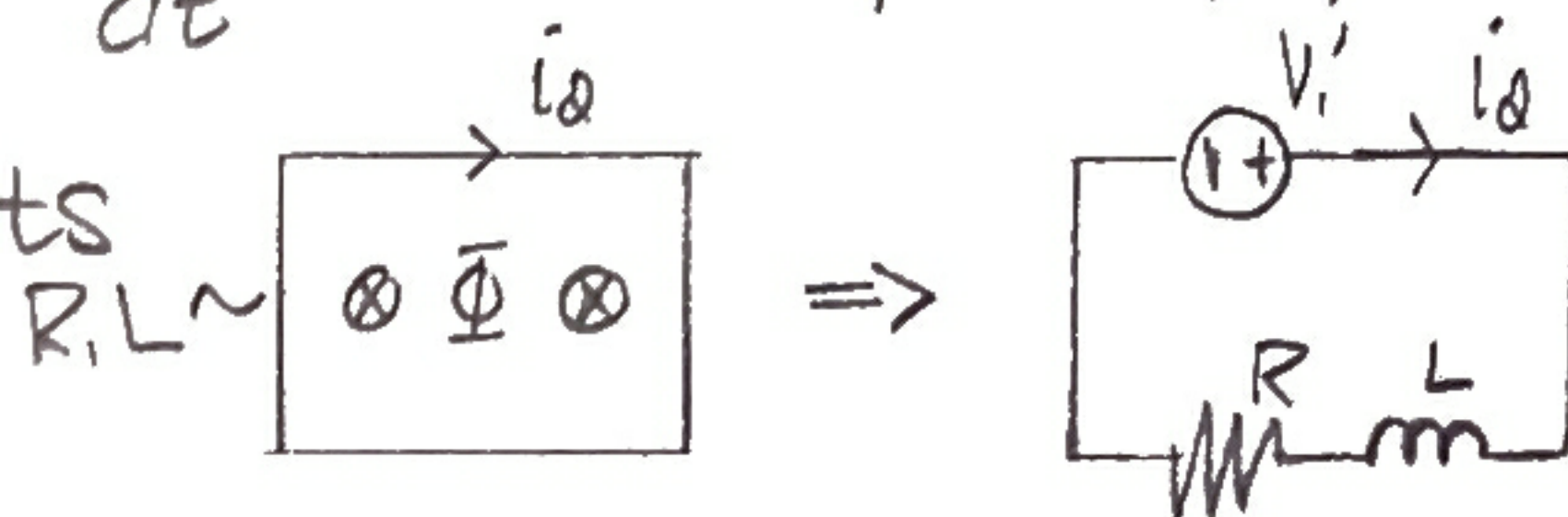
beräkna \mathbf{B} : $\mathbf{B} = \frac{\mu_0 i_1}{2\pi r} \hat{\phi} = \frac{\mu_0 i_1}{2\pi x} \hat{y}$ genom slingan

$$\text{flödet } \Phi_{12} = \int_0^c dz \int_a^b dx \frac{\mu_0 i_1}{2\pi x} = \frac{\mu_0 i_1 c}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$$

$$\Rightarrow M = \frac{\mu_0 c}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$$

b) Faradays lag $V_{\text{ind}} = -\frac{d\Phi}{dt} \Rightarrow V_{\text{ind}} = -j\omega \Phi_{12} = -j\omega M I_0$

Se slingan som en krets



$$\bar{i}_2 = \frac{V_{ind}}{R + j\omega L} = \frac{R - j\omega L}{R^2 + (\omega L)^2} (-j\omega M I_0) = \frac{-j\omega M I_0 R - \omega^2 L M I_0}{R^2 + (\omega L)^2}$$

tidsuttryck $i_2(t) = \text{Re}\{\bar{i}_2 e^{j\omega t}\}$

$$\Rightarrow i_2(t) = \frac{M I_0 \omega}{R^2 + (\omega L)^2} (-\omega L \cos(\omega t) + R \sin(\omega t))$$

c) $F = \oint_C i dl \times B$

$$F = \int_0^c i_2(t) dz (\hat{z} \times \hat{y}) \frac{\mu_0 i_1(t)}{2\pi a} + \int_0^c -i_2(t) dz (\hat{z} \times \hat{y}) \frac{\mu_0 i_1(t)}{2\pi b} =$$

$$= i_2(t) \frac{\mu_0 c}{2\pi} \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right) i_1(t)$$

d) $\langle F_z \rangle = \frac{1}{T} \int_{t=0}^T F_z(t) dt$, $T = \frac{2\pi}{\omega}$, $\langle F_z \rangle \sim \langle i_1(t) \cdot i_2(t) \rangle$

$$\langle i_1(t) \cdot i_2(t) \rangle = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} dt \frac{M I_0^2 \omega}{R^2 + (\omega L)^2} (-\omega L \cos^2(\omega t) + R \sin(\omega t) \cos(\omega t)) =$$

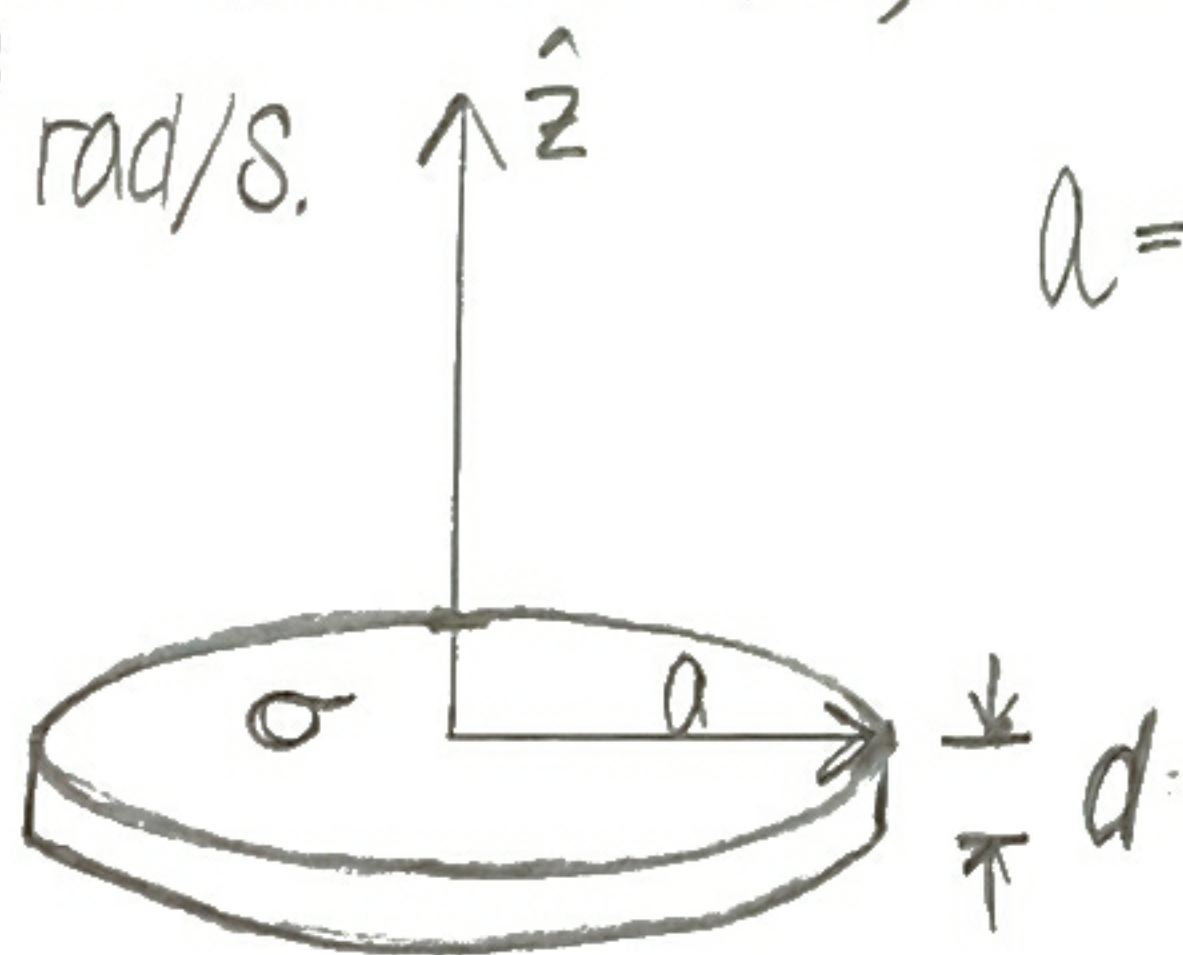
$$= \left\{ \cos^2(\omega t) = \frac{1 + \cos(2\omega t)}{2}, \sin(\omega t) \cos(\omega t) = \frac{\sin(2\omega t)}{2} \right\}$$

$$\Rightarrow \langle F_z \rangle = \frac{\mu_0 c}{4\pi} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) \frac{M I_0^2 \omega^2 L}{R^2 + (\omega L)^2}$$

12:22 tunn metallskiva, enl. bild, i magnetfält $B(t) = \hat{z} B_0 \cos(\omega t)$,

$$\omega = 2\pi \cdot 10^3 \text{ rad/s.}$$

$$a = 3 \text{ cm, } d = 0,1 \text{ mm, } \sigma = 10^7 \text{ S/m}$$



a) Beräkna de inducerade virvelströmmarna (försumma inducerade magnetfält).

$$E\text{-fält på avstånd } r: \nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t} \Rightarrow \oint_C E \cdot dl = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S B \cdot dS$$

$$\Rightarrow E \cdot 2\pi r = -\frac{\partial}{\partial t} B_0 \pi r^2 \cos(\omega t)$$

$$\Rightarrow \underline{E} = \frac{B_0 \omega r}{2\pi} \sin(\omega t) \hat{\varphi}, \quad \underline{J} = \sigma \underline{E} = \frac{B_0 \omega r \sigma}{2\pi} \sin(\omega t) \hat{\varphi}$$

b) Beräkna strömmarnas magnetfält, $\underline{B}_{\text{ eget}}(0, t)$, i centrum av skivan.

Def. strömrör



ström i ett strömrör

$$d\vec{i} = \underline{J}(r) d \cdot dr = \frac{B_0 \omega r \sigma}{2} d \cdot dr$$

B-fält från slinga (i slingans centrum)

$$d\underline{B} = \hat{z} \frac{\mu_0}{2r} d\vec{i}$$

$$\Rightarrow \underline{B}_{\text{ eget}} = \int d\underline{B} = \int_0^a \frac{B_0 \mu_0 \omega r \sigma}{4r} \sin(\omega t) r dr \hat{z} =$$

$$= \frac{B_0 \mu_0 \omega \sigma a}{4} \sin(\omega t) \hat{z} = 0,0592 B_0 \sin(\omega t) \hat{z}$$

c) Rimligt antagande?

Svar: Ja, om vi godtar en avvikelse på några procent.

5/10 Rättelse från V10

$$Z_1 = \frac{j\omega\mu}{\gamma}, \quad \gamma = \sqrt{j\omega\mu(j\omega\epsilon + \sigma)}, \quad \eta \text{ i boken.}$$

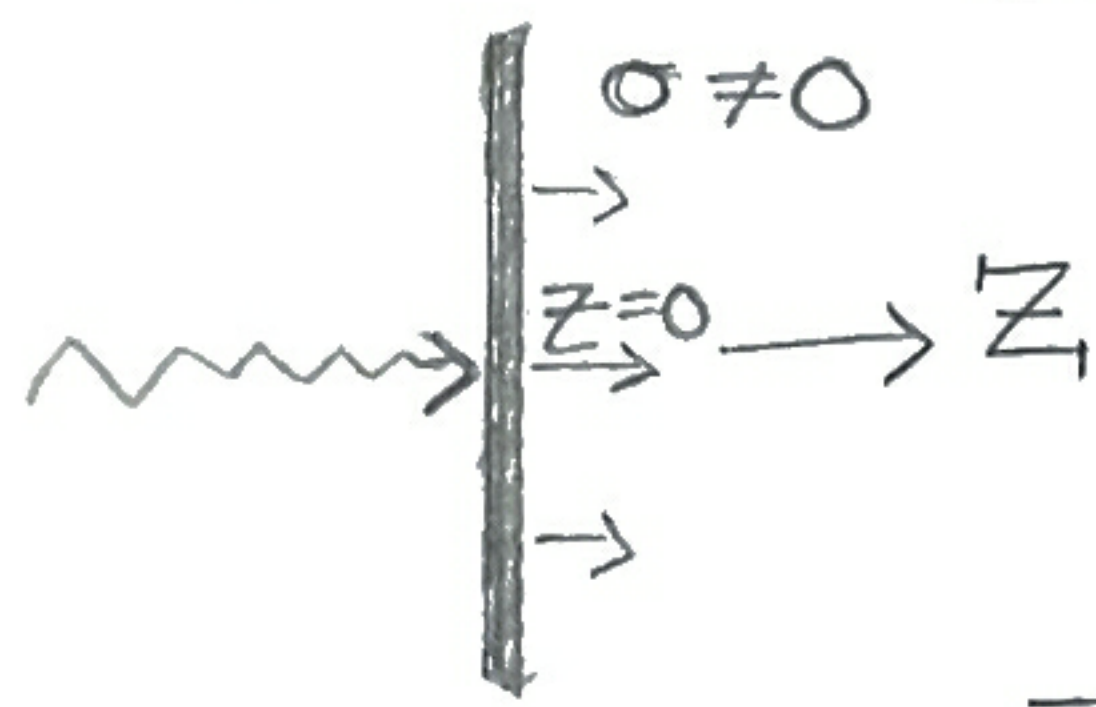
Polarisation, 8-2.3

$$\mathbf{E} = \hat{x} E_{x0} \cos(\omega t - \beta z) + \hat{y} E_{y0} \cos(\omega t - \beta z + \varphi),$$

1. linjärpolariserad om $\varphi = \pm k\pi$
2. cirkulärpolariserad om $E_{x0} = E_{y0}$ & $\varphi = \pm (k + 1/2)\pi$
3. Annars elliptiskt polariserad.

Skinneffekt, 8-3

E-fältet tränger in i ledande halvplan ($z > 0$)



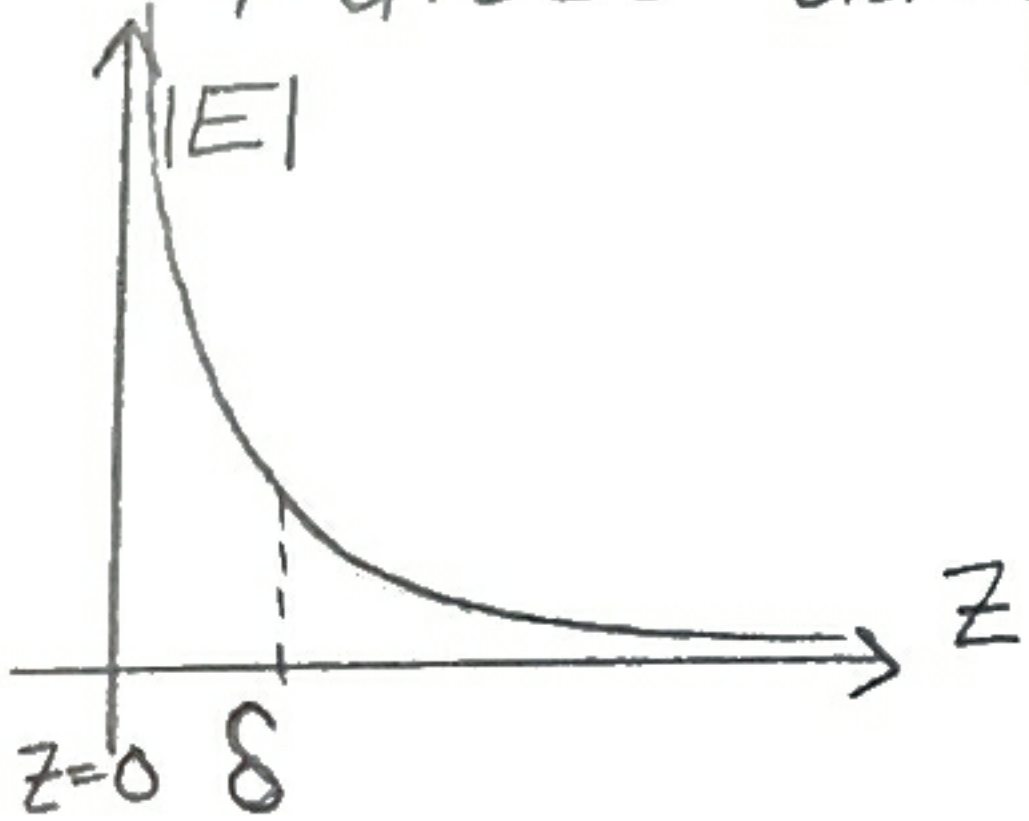
$$\bar{\mathbf{E}}(z) = \hat{x} \bar{E}_x^+(0) e^{-\gamma z} = \hat{x} E_x^+(0) e^{j\theta^+} e^{-\alpha z} e^{-j\beta z}$$

Reell form

$$\Rightarrow \mathbf{E}(z, t) = \hat{x} E_0^+(0) e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z + \theta^+)$$

Fältet dämpas med faktorn $e^{-\alpha z}$

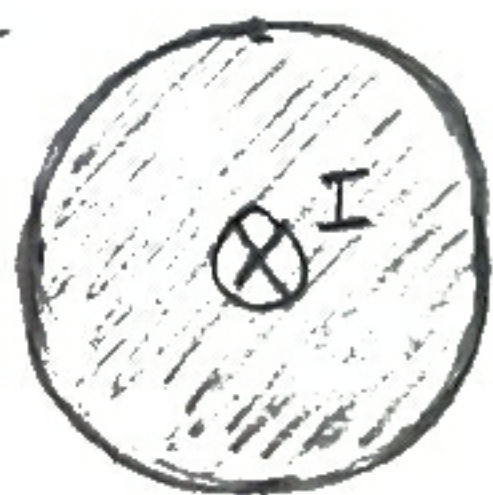
på djupet $\delta = \frac{1}{\alpha}$ är dämptermen $e^{-1} \approx 37\%$
 $\delta =$ inträngningsdjup.



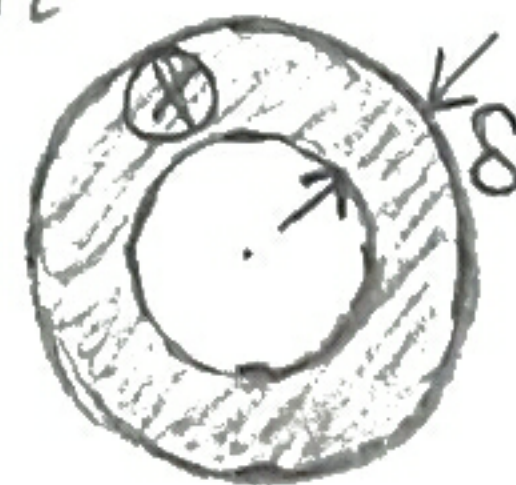
För metall $\delta = \frac{1}{\alpha} = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}}$

ex. 8-4 hemma!

I statiken



I dynamiken



ström på ytan
(pga. ω)

Poyntingvektorn, 8-5

$$\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \mathbf{H} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) - \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) = \mathbf{H} \cdot \left(-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\right) - \mathbf{E} \cdot \left(\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\right) =$$

$$= -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{H} \cdot \mathbf{B}) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}) - \mathbf{J} \cdot \mathbf{J}$$

Integrera över volym

$$\int_{V'} \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) dV' + \frac{\partial}{\partial t} (W_e + W_m) + \int_{V'} \frac{\mathbf{J} \cdot \mathbf{J}}{\sigma} dV' = 0$$

$$\underbrace{\int_{S'} \mathbf{E} \times \mathbf{H} dS'}_{\text{Effekt in elr ut}} + \frac{\partial}{\partial t} (W_e + W_m) + \underbrace{\int_{V'} \frac{\mathbf{J} \cdot \mathbf{J}}{\sigma} dV'}_{\text{Joules lag}} = 0 \quad \text{ändring i statisk energi}$$

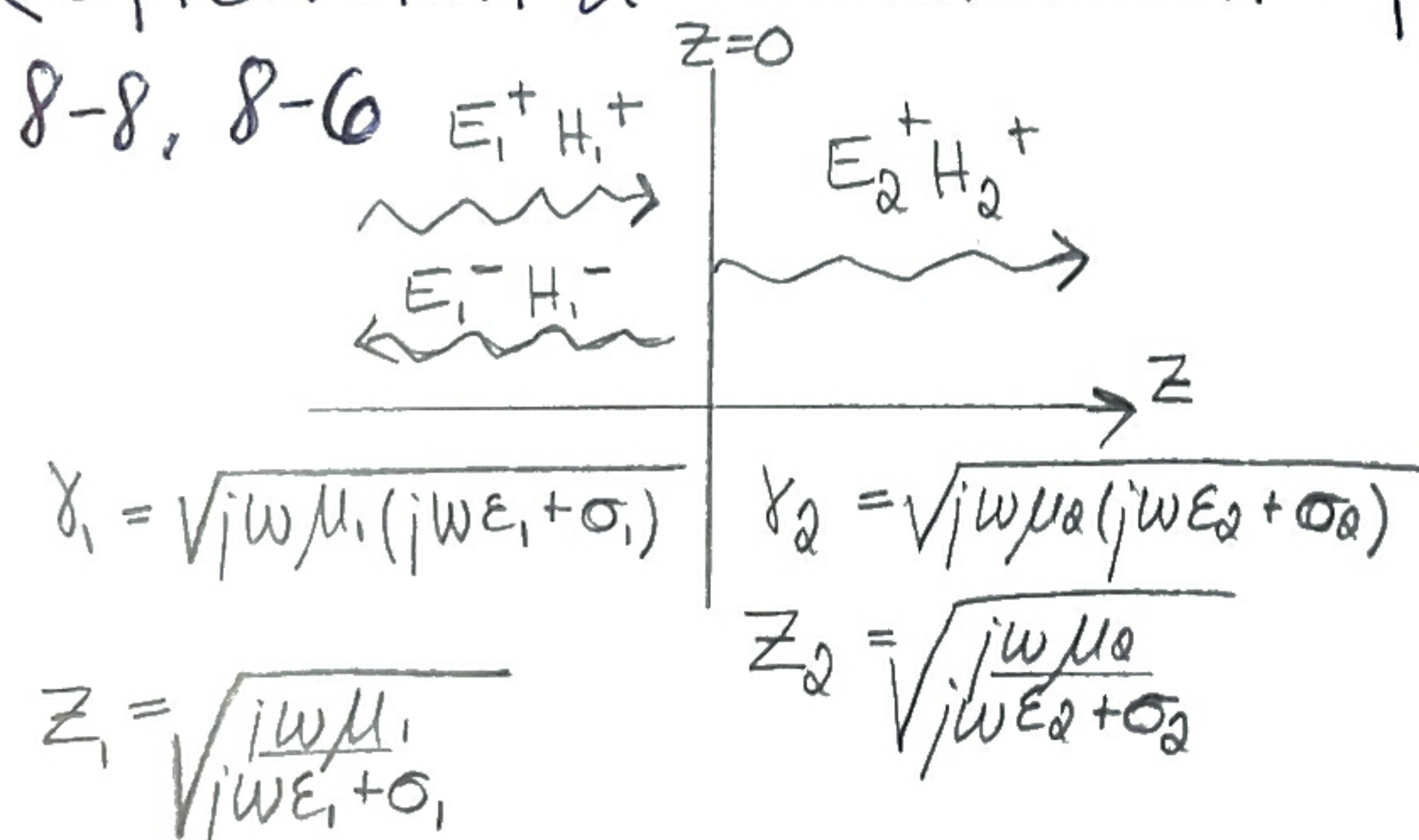
$\mathcal{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$ Poyntingvektorn, $[\mathcal{S}] = \text{W/m}^2$ ex 8-7 hemma

Komplexa poyntingvektorn

Tidsmedelvärde är ofta av intresse, $\mathcal{S}_{\text{av}} = \frac{1}{T} \int_0^T \mathcal{S} dt$

Komplexa fallet $\mathcal{S}_{\text{av}} = \frac{1}{2} \text{Re}(\bar{\mathbf{E}} \times \mathbf{H}^*)$

Reflektion & transmission i plan dielektrisk gränssyta,



Ansätt plana vågor

$$\bar{\mathbf{E}}_1^+ = \hat{x} \bar{E}_{10}^+ e^{-\gamma_1 z}$$

$$\bar{\mathbf{E}}_1^- = \hat{x} \bar{E}_{10}^- e^{\gamma_1 z}$$

$$\bar{\mathbf{E}}_2^+ = \hat{x} \bar{E}_{20}^+ e^{-\gamma_2 z}$$

$$\bar{\mathbf{H}}_1^+ = \hat{y} \frac{\bar{E}_{10}^+}{Z_1} e^{-\gamma_1 z}$$

$$\bar{\mathbf{H}}_1^- = -\hat{y} \frac{\bar{E}_{10}^-}{Z_1} e^{\gamma_1 z}$$

$$\bar{\mathbf{H}}_2^+ = \hat{y} \frac{\bar{E}_{20}^+}{Z_2} e^{-\gamma_2 z}$$

Randvillkoren ska vara uppfyllda i gränssytan

$$\left\{ \begin{array}{l} E_{\text{tang}} = E_{\text{tang}} \\ H_{\text{tang}} = H_{\text{tang}} \end{array} \right. \text{ om inga fria ytströmmar}$$

$\Rightarrow \bar{E}_{10}^+ + \bar{E}_{10}^- = \bar{E}_{20}^+ \quad \& \quad \frac{\bar{E}_{10}^+}{Z_1} - \frac{\bar{E}_{10}^-}{Z_1} = \frac{\bar{E}_{20}^+}{Z_2}$

Eliminera $\bar{E}_{10}^- = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1} \bar{E}_{10}^+$, $\bar{E}_{20}^+ = \frac{2Z_2}{Z_2 + Z_1} \bar{E}_{10}^+$

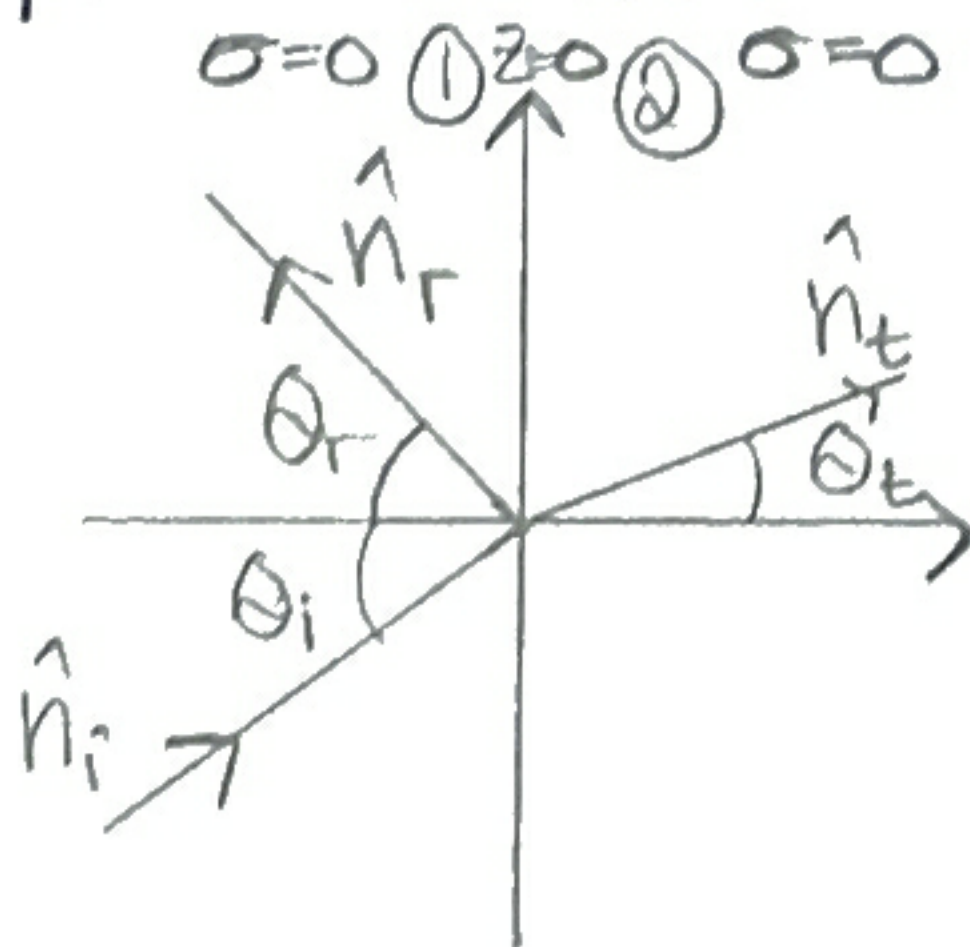
Man kan visa $1 + \Gamma = \frac{1}{T}$

För effekt: reflektion $R = \frac{|S_r|}{|S_i|} = \frac{|E_r|^2}{|E_i|^2} = |\Gamma|^2$

transmission $T = \frac{|S_t|}{|S_i|} = \frac{|S_i - S_r|}{|S_i|} = 1 - \frac{|S_r|}{|S_i|} = 1 - R$

$\Rightarrow T + R = 1$

Reflektion & brytning i plan yta, 8-10



$$\bar{E}_i(R) = \bar{E}_{i0} e^{-j\beta_1 \hat{n}_i \cdot \mathbf{R}}$$

$$\bar{E}_r(R) = \bar{E}_{r0} e^{-j\beta_1 \hat{n}_r \cdot \mathbf{R}}$$

$$\bar{E}_t(R) = \bar{E}_{t0} e^{-j\beta_2 \hat{n}_t \cdot \mathbf{R}}$$

$$\hat{n}_i = (\sin \theta_i, 0, \cos \theta_i)$$

$$\hat{n}_r = (\sin \theta_r, 0, \cos \theta_r)$$

$$\hat{n}_t = (\sin \theta_t, 0, \cos \theta_t)$$

$$\Rightarrow \hat{n}_i \cdot \mathbf{R} = x \sin \theta_i + z \cos \theta_i$$

$$\hat{n}_r \cdot \mathbf{R} = x \sin \theta_r + z \cos \theta_r$$

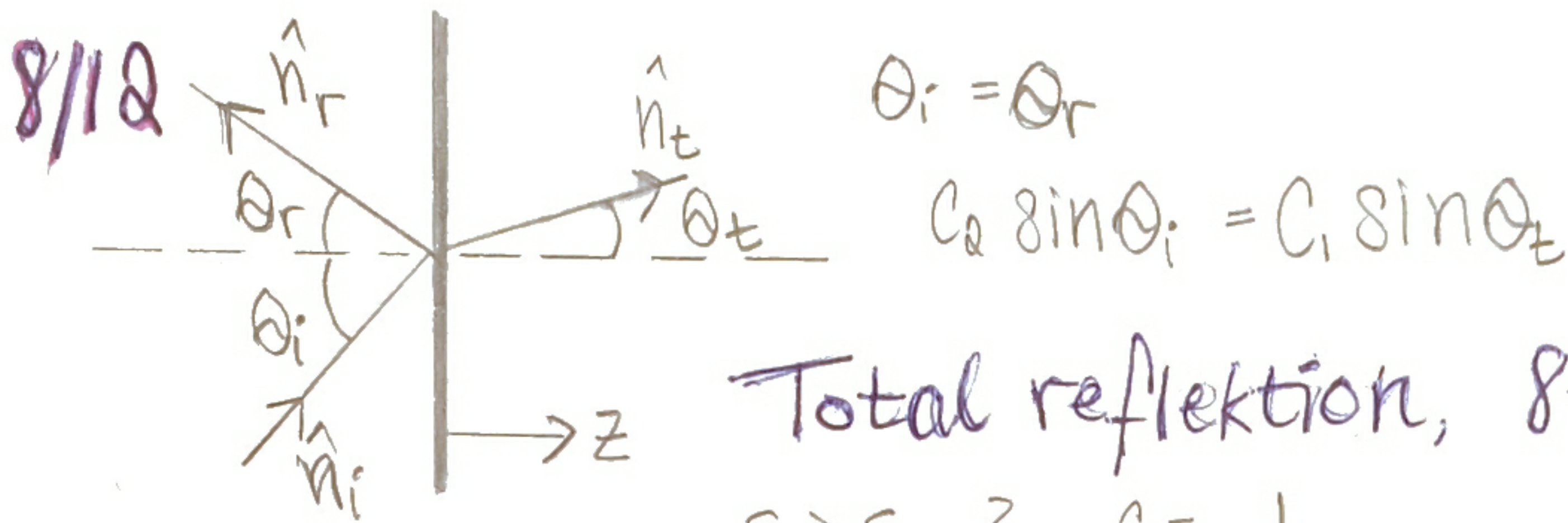
$$\hat{n}_t \cdot \mathbf{R} = x \sin \theta_t + z \cos \theta_t$$

Randvillkoren ($z=0$)

$$\bar{E}_{i0 \text{ tang}} e^{-j\beta_1 x \sin \theta_i} + \bar{E}_{r0} e^{-j\beta_1 x \sin \theta_r} = \bar{E}_{t0} e^{-j\beta_2 x \sin \theta_t}$$

Uppfyllt $\forall x$ då $\beta_1 \sin \theta_i = \beta_1 \sin \theta_r = \beta_2 \sin \theta_t \Rightarrow \theta_i = \theta_r$

$$\beta = \frac{\omega}{c} \Rightarrow c_0 \sin \theta_i = c_1 \sin \theta_t$$



Total reflektion, 8-10.1

$\epsilon_1 > \epsilon_2$? $C = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu}}$

antag $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$

Snells lag $\sin \theta_t = \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}} \sin \theta_i$

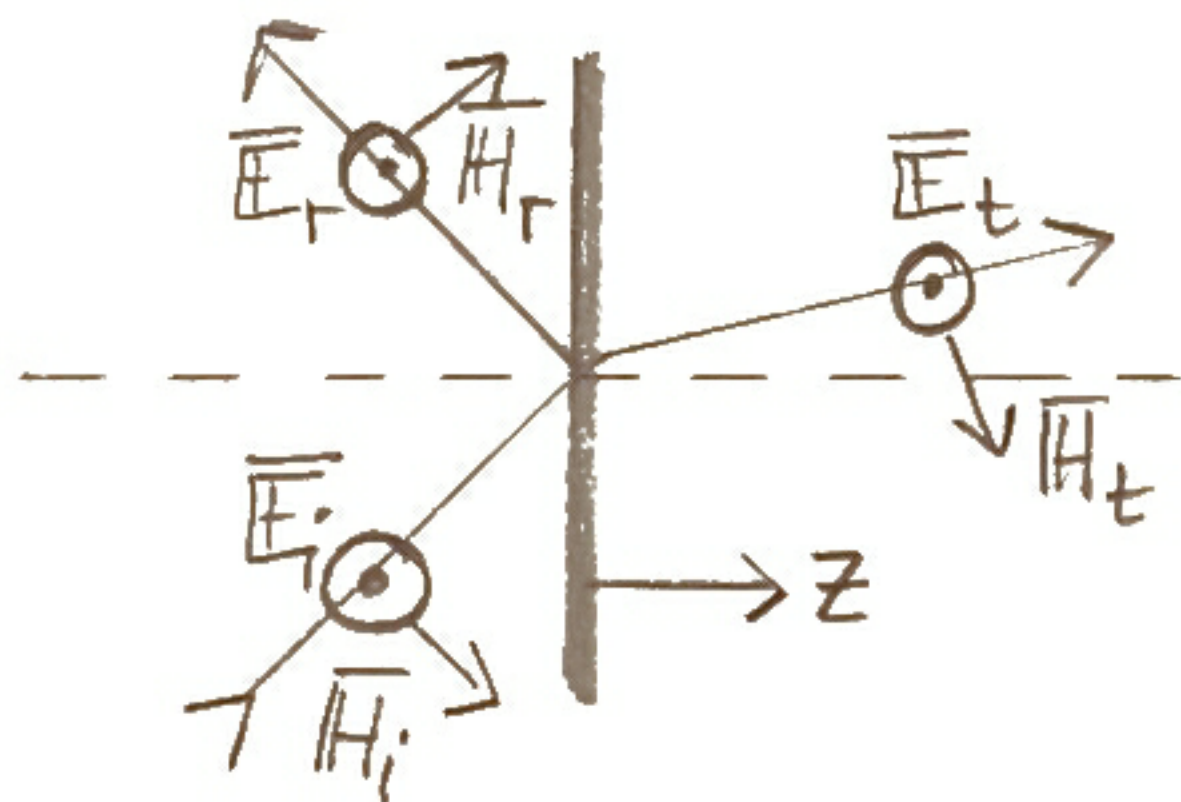
fallet $\theta_t = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \theta_i = \arcsin \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}} \equiv \theta_{\text{kritisk vinkel}}$

för $\theta_i > \theta_{\text{krit.}} \Rightarrow \sin \theta_k = \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}} \sin \theta_i > 1$, ingen reell lösning,

vi får ingen transmitterad våg, utan en ytvåg



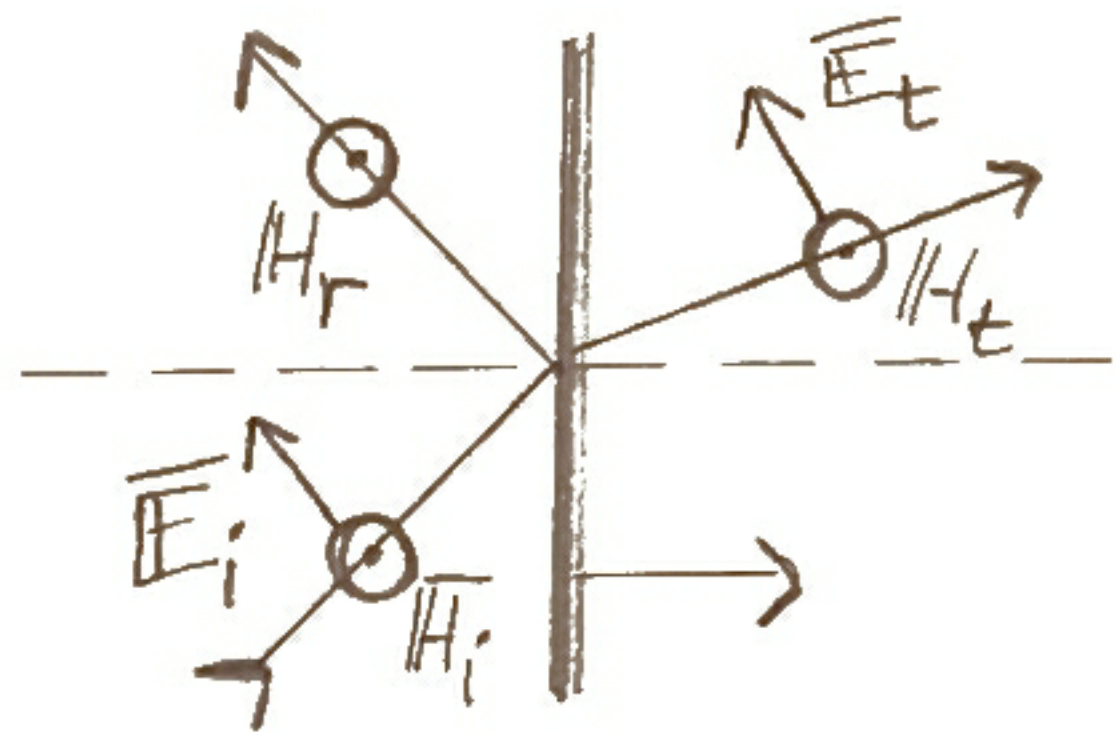
Fresnells ekvationer, 8-10.2, 8-10.3



E-fältet vinkelrätt mot infallsplanen
 Dessa 3 \vec{v} spänner upp infallsplanet

$$\Gamma_{\perp} = \left(\frac{E_{r0}}{E_{i0}} \right)_{\perp} = \frac{\frac{1}{Z_1} \cos \theta_i - \frac{1}{Z_2} \cos \theta_t}{\frac{1}{Z_1} \cos \theta_i + \frac{1}{Z_2} \cos \theta_t}$$

$$\tau_{\perp} = \left(\frac{E_{t0}}{E_{i0}} \right)_{\perp} = \frac{\frac{2}{Z_2} \cos \theta_i}{\frac{1}{Z_1} \cos \theta_i + \frac{1}{Z_2} \cos \theta_t}$$



E-fältet parallellt

$$\Gamma_{\parallel} = \frac{-Z_2 \cos \theta_i + Z_1 \cos \theta_t}{Z_1 \cos \theta_i + Z_2 \cos \theta_t}$$

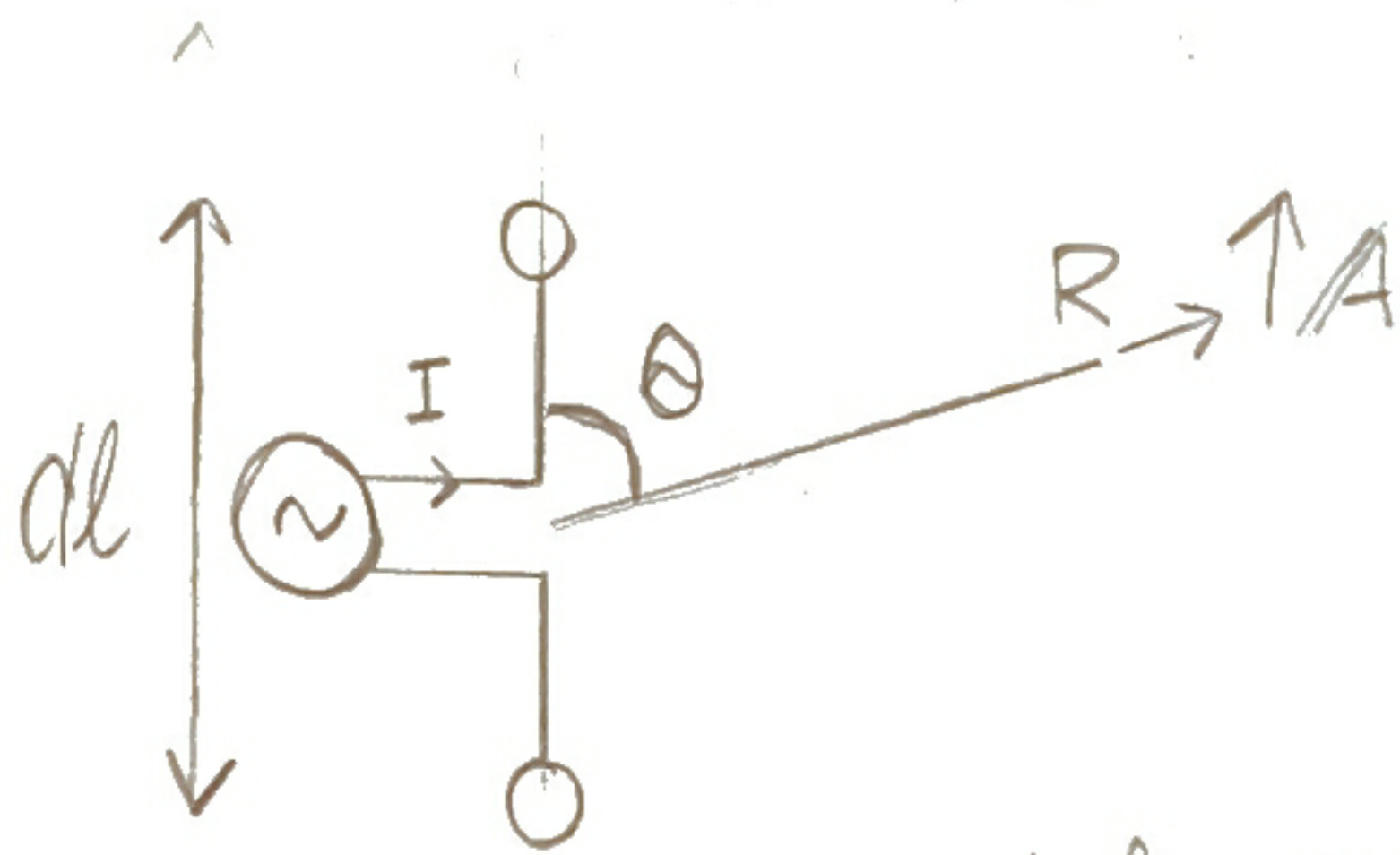
$$\tau_{\parallel} = \frac{2Z_2 \cos \theta_i}{Z_1 \cos \theta_i + Z_2 \cos \theta_t}$$

Brewstervinkel

Om $Z_2 \cos \theta_t = Z_1 \cos \theta_i \Rightarrow \Gamma_{\parallel} = 0$ (vanligt fall)

$\Gamma_{\perp} = 0$ (ovanligt)

Hertzdipolen, 11-1, 11-2



Lösning mha. retarderade potentialer

$$\bar{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\bar{J} e^{-\beta R}}{R} dV \quad \beta = k = \frac{\omega}{c}$$

Låt nu $dl \ll \lambda$, $dl \ll R$.

Med I_0 konstant längs antennen fås

$$\bar{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \hat{z} \frac{I dl e^{-i\beta R}}{R}$$

Sfäriska koord.

$$\hat{z} = \hat{r} \cos \theta + \hat{\theta} \sin \theta \Rightarrow A_r = A_z \cos \theta = \frac{\mu_0 I dl}{4\pi R} e^{-i\beta R} \cos \theta$$

$$A_\theta = -A_z \sin \theta = -\frac{\mu_0 I dl e^{-i\beta R}}{4\pi R} \sin \theta$$

$$A_\phi = 0$$

$$\bar{H} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \bar{A} = \hat{\phi} \frac{1}{\mu_0 R} \left(\frac{\partial}{\partial R} (R A_\theta) - \frac{\partial}{\partial \theta} A_r \right) = -\hat{\phi} \frac{I dl}{4\pi} \beta^2 \sin \theta \left(\frac{1}{i\beta R} + \frac{1}{(i\beta R)^2} \right) e^{-i\beta R}$$

$$\bar{E} = \frac{1}{j\omega \epsilon_0} \nabla \times \bar{H} = \frac{1}{j\omega \epsilon_0} \left(\hat{R} \frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (H_\phi \sin \theta) - \hat{\theta} \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} (R H_\phi) \right) =$$

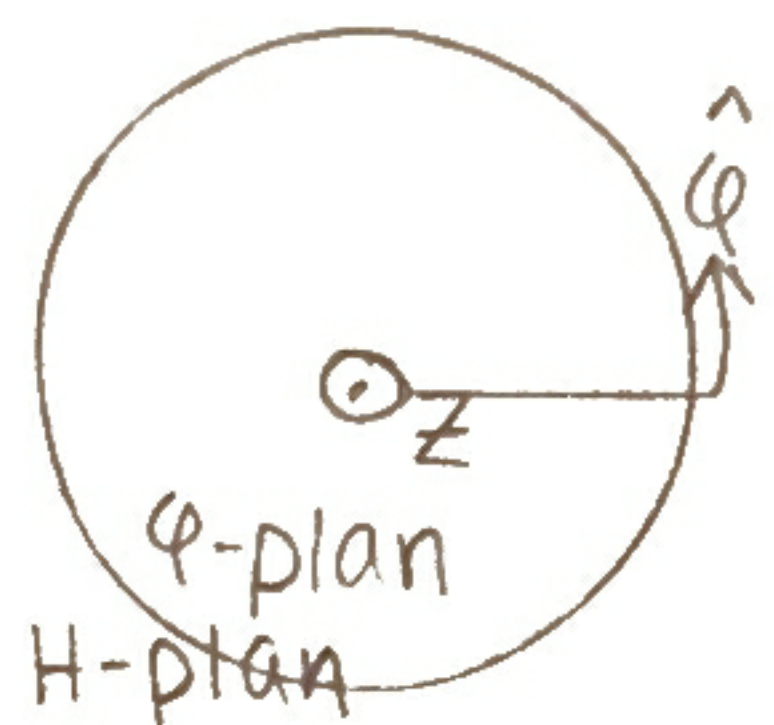
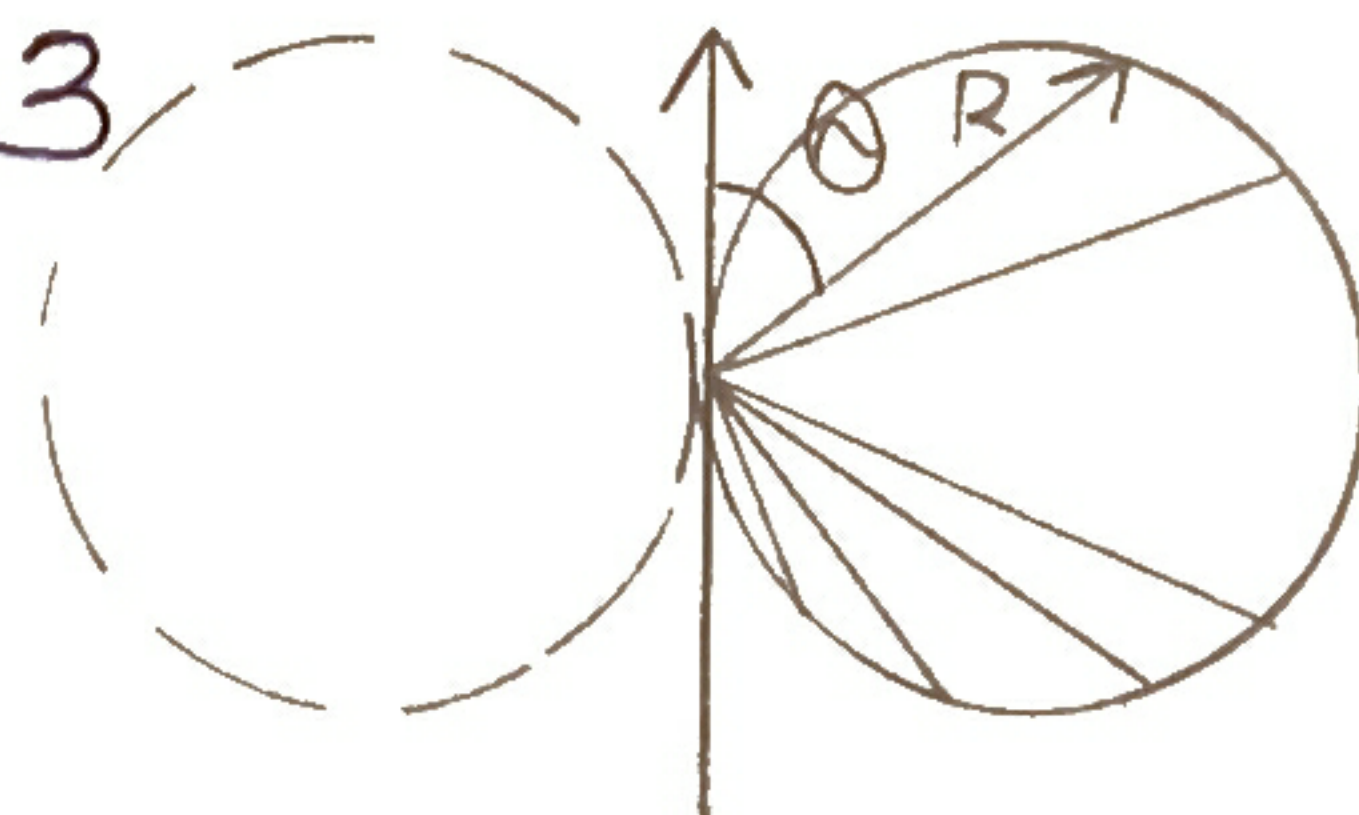
$$= -\frac{I dl}{4\pi} z_0 \beta^2 \left(\hat{R} \left(\frac{\partial}{(i\beta R)^3} + \frac{1}{(i\beta R)^2} \right) \cos \theta + \hat{\theta} \left(\frac{1}{(i\beta R)^3} + \frac{1}{(i\beta R)^2} + \frac{1}{i\beta R} \right) \sin \theta \right) e^{-i\beta R}$$

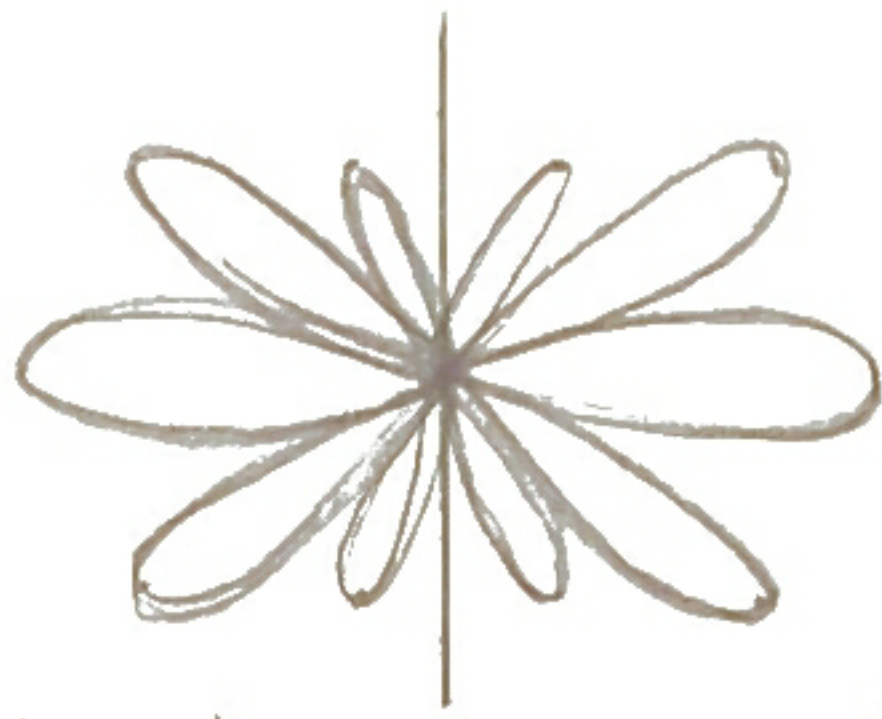
Fjärrfältet $R \gg \frac{1}{\beta} = \frac{\lambda}{2\pi} \gg dl$

$$\bar{E}_\theta = j \frac{I dl e^{-i\beta R}}{4\pi R} z_0 \beta \sin \theta \quad \bar{H}_\phi = j \frac{I dl e^{-i\beta R}}{4\pi R} \beta \sin \theta$$

Strålningsdiagram, 11-3

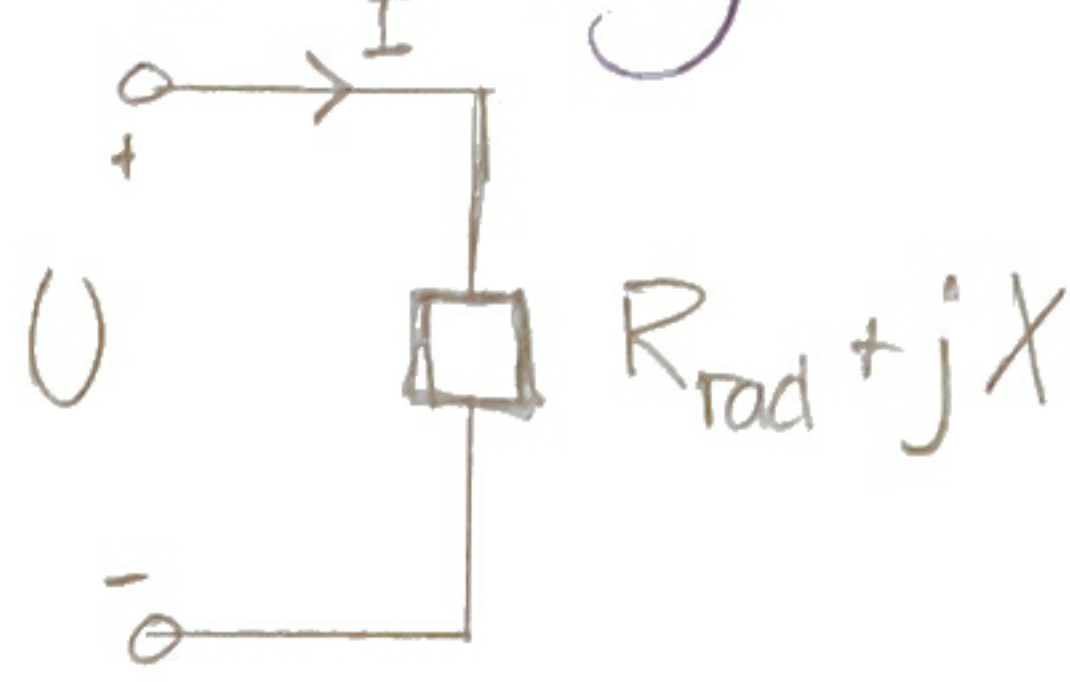
θ -plan
E-plan





Praktiskt exempel, E-plan

Strålningsresistans, 11-3



$$S_{av} = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\vec{E} \times \vec{H}^*)$$

Total strålad effekt (integrera över sfär som innesluter antennen). $P_r = \int_A S_{av} dA = R_{rad} I_{eff}^2$

$$P_r = R_{rad} I_{eff}^2 \Rightarrow \text{för Hertzdipol } R_{rad} = 80\pi^2 \left(\frac{dl}{\lambda}\right)^2$$

med $dl = 0,01\lambda$ & $R_{rad} = 0,08\Omega$

Störgruppsövning 5/12

Komplex notation vid fält som varierar sinusformat i tiden

Ursprungligt tidsvarierande fält:

$$E(\mathbb{R}, t) = E_0(\mathbb{R}) \cos(\omega t + \theta(\mathbb{R}))$$

Motsvarande komplexa fält:

$$\bar{E}(\mathbb{R}) = E_0(\mathbb{R}) e^{-j\theta(\mathbb{R})}$$

Övergång till tidsuttryck

$$E(\mathbb{R}, t) = \text{Re}(\bar{E}(\mathbb{R}) e^{j\omega t})$$

Maxwells ekv. komplex form

$$\nabla \times \bar{E} = -j\omega \bar{B} \quad \nabla \cdot \bar{D} = \bar{\rho} \quad \nabla \times \bar{H} = \bar{J} + j\omega \bar{D} \quad \nabla \cdot \bar{B} = 0$$

11.2 Utgå från Ohms lag & Maxwells ekv. för $\nabla \cdot \bar{D}$ & $\nabla \times \bar{H}$ & härled diff. ekv. för $\rho(t)$, lös sedan ekvationen.

Lösning

1 $\nabla \cdot \bar{D} = \bar{\rho}$

Divergens av \bar{D} ger

2 $\nabla \times \bar{H} = \bar{J} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t}$

V.L. $\nabla \cdot (\nabla \times \bar{H}) = 0$

3 $\bar{J} = \sigma \bar{E}$

H.L. $\nabla \cdot (\bar{J} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t}) = \nabla \cdot \bar{J} + \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \bar{D}) =$

$$= \nabla \cdot (\sigma \bar{E}) + \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} = \nabla \cdot \left(\frac{\sigma}{\epsilon} \bar{D} \right) + \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} = \frac{\sigma}{\epsilon} \bar{\rho} + \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t}$$

V.L. = H.L. $\Rightarrow \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\sigma}{\epsilon} \bar{\rho} = 0$

Ansätt $\bar{\rho} = \rho_0 e^{ct}$ & stoppa in i diff. ekv. $\Rightarrow c \rho_0 e^{ct} + \frac{\sigma}{\epsilon} \rho_0 e^{ct} = 0$
 $\Rightarrow c = -\frac{\sigma}{\epsilon} \Rightarrow \rho(t) = \rho_0 e^{-\frac{\sigma}{\epsilon} t}$

Tolkning: metall $\sigma \gg \epsilon$, $\rho \rightarrow 0$ snabbt (laddning 0)
isolator $\sigma \ll \epsilon$, $\rho \approx \rho_0$ länge (laddning konstant)

12-3 en elektromagnetisk våg i vakuum med vinkelfrekvens ω har det komplexa, elektriska fältet $\bar{\mathbf{E}} = \hat{y} E_0 e^{-\alpha z} e^{-j\beta x}$

- a) beräkna tillhörande $\bar{\mathbf{H}}$ -fält samt $\mathbf{E}(z,t)$ & $\mathbf{H}(z,t)$
 b) vilket samband mellan α, β & ω behövs för att vågekv. ska vara uppfyllt?

a) $\nabla \times \bar{\mathbf{E}} = -j\omega \bar{\mathbf{B}} = -j\omega \mu \bar{\mathbf{H}}$

$$\nabla \times \bar{\mathbf{E}} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ 0 & \bar{E}_y & 0 \end{vmatrix} = -\hat{x} \frac{\partial}{\partial z} \bar{E}_y + \hat{z} \frac{\partial}{\partial x} \bar{E}_y = -\hat{x}(-\alpha) \bar{E}_y + \hat{z}(j\beta) \bar{E}_y =$$

$$= E_0 (\alpha \hat{x} - j\beta \hat{z}) e^{-\alpha z - j\beta x}$$

$$\bar{\mathbf{H}} = \frac{-\nabla \times \bar{\mathbf{E}}}{j\omega \mu} = \frac{E_0}{\omega \mu} (\alpha \hat{x} + \beta \hat{z}) e^{-\alpha z - j\beta x}$$

Reell form (tidsvarierande)

$$E_y(t) = \text{Re}(\bar{E}_y e^{j\omega t}) = \text{Re}(E_0 e^{-\alpha z} e^{-j(\beta x - \omega t)}) =$$

$$= \text{Re}(E_0 e^{-\alpha z} (\cos(\omega t - \beta x) + j \sin(\omega t - \beta x))) = E_0 e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta x)$$

$$H_x(t) = \text{Re}(\bar{H}_x e^{j\omega t}) = \text{Re}\left(\frac{E_0 \alpha}{\omega \mu} j e^{-\alpha z - j\beta x + j\omega t}\right) = \frac{E_0 \alpha}{\mu \omega} e^{-\alpha z} \sin(\omega t - \beta x)$$

$$H_z(t) = \text{Re}(\bar{H}_z e^{j\omega t}) = \frac{E_0 \beta}{\omega \mu} e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta x)$$

- b) Steg 1: härled vågekv. för \mathbf{E} i vakuum, antag inga laddning/ström källor.

Maxwells

1	$\nabla \times \bar{\mathbf{E}} = -j\omega \bar{\mathbf{B}}$	3	$\nabla \cdot \bar{\mathbf{D}} = 0$
2	$\nabla \times \bar{\mathbf{H}} = j\omega \bar{\mathbf{D}}$	4	$\nabla \cdot \bar{\mathbf{B}} = 0$

Rotationen av **1**

$$\text{V.L. } \nabla \times (\nabla \times \bar{E}) = \nabla(\underbrace{\nabla \cdot \bar{E}}_{=0}) - \nabla^2 \bar{E} = -\nabla^2 \bar{E}$$

$$\text{H.L. } \nabla \times (-j\omega \bar{B}) = -j\omega \mu_0 (\nabla \times \bar{H}) \stackrel{2}{=} -j\omega \mu_0 j\omega \bar{D} = \omega^2 \mu \epsilon \bar{E} = \frac{\omega^2}{c^2} \bar{E}$$

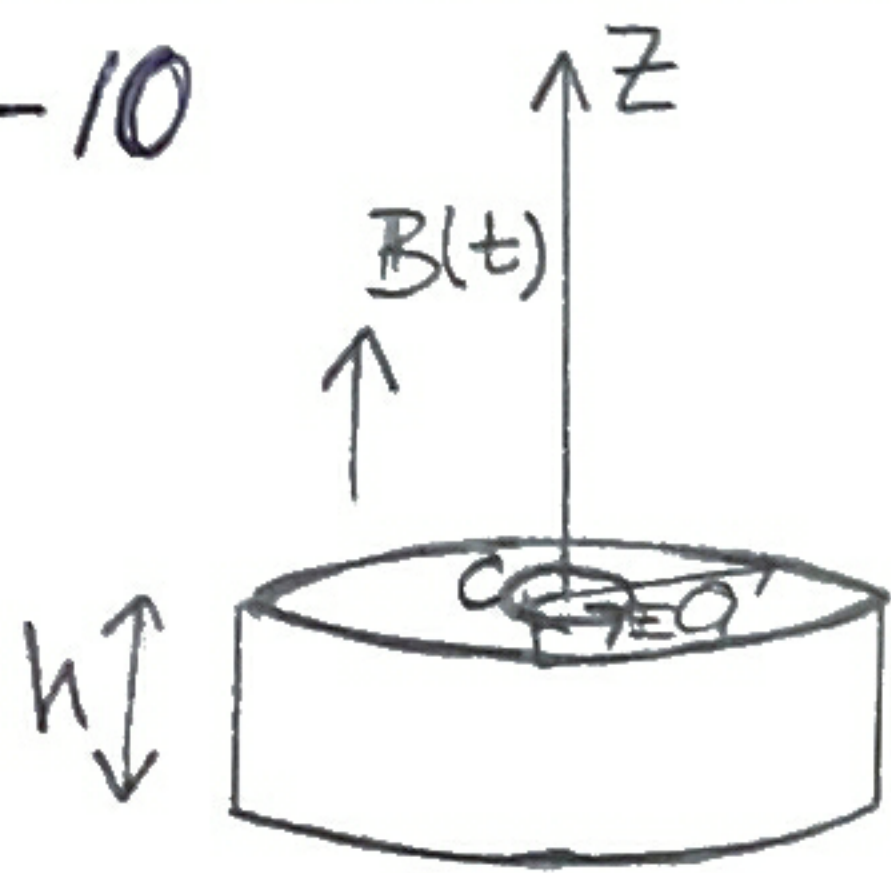
$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} \quad \text{V.L.} = \text{H.L.} \Rightarrow \nabla^2 \bar{E} + \frac{\omega^2}{c^2} \bar{E} = 0$$

Steg 2: stoppa in uttryck för \bar{E}

$$\nabla^2 \bar{E} = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \hat{y} E_0 e^{-\alpha z - j\beta x} = \left((-j\beta)^2 + (-\alpha)^2 \right) \bar{E} = (\alpha^2 - \beta^2) \bar{E}$$

$$\Rightarrow (\alpha^2 - \beta^2) \bar{E} + \frac{\omega^2}{c^2} \bar{E} = 0 \Rightarrow \alpha^2 - \beta^2 - \frac{\omega^2}{c^2} = 0$$

10-10



tunn skiva enl. fig. befinner sig i tidsvarierande

B-fält $B(t) = B_0 \cos(\omega t) \hat{z}$.

Beräkna medeleffekten i skivan (B-fält från inducerade strömmar försummas)

Lösning Faradays lag $\nabla \times \bar{E} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} \Rightarrow \int_S \nabla \times \bar{E} \, d\mathcal{S} = -\int_S \frac{\partial \bar{B}}{\partial t} \, d\mathcal{S}$

Stokes $\Rightarrow \oint_C \bar{E} \, d\mathbf{l} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t} \quad (1)$

Det elektriska fältet som driver de inducerade strömmarna är riktat i $\hat{\varphi}$ -led. $\bar{E}(\mathbf{r}) = E_\varphi(\mathbf{r}) \hat{\varphi}$

V.L. av (1)

$$\oint_C \bar{E} \, d\mathbf{l} = \oint_C E_\varphi(\mathbf{r}) \hat{\varphi} \, d\mathbf{l} = \int_{\varphi=0}^{2\pi} E_\varphi(\mathbf{r}) \hat{\varphi} \, r \, d\varphi \hat{\varphi} = E_\varphi r \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi r E_\varphi(\mathbf{r})$$

H.L. av (1)

$$-\frac{\partial \Phi}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S \bar{B} \, d\mathcal{S} = -\frac{\partial}{\partial t} (B_0 \cos(\omega t) \int_S d\mathcal{S}) = B_0 \pi r^2 \omega \sin(\omega t)$$

$$V.L. = H.L. \Rightarrow E_{\varphi}(r) = \frac{B_0 \omega \pi r^2}{2\pi r} \sin(\omega t) = \frac{B_0 \omega r}{2} \sin(\omega t)$$

Utv. effekt, Joules lag

$$P = \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} \, dV = \int_{r=0}^a dr \int_{\varphi=0}^{2\pi} d\varphi \int_{z=0}^h dz (\sigma E_{\varphi}^2 r) = 2\pi h \int_0^a \left(\frac{B_0 \omega r}{2} \sin(\omega t) \right)^2 r \, dr =$$

$$= \frac{\pi B_0^2 \omega^2 h \sigma}{2} \sin^2(\omega t) \int_0^a r^3 \, dr = \frac{\pi B_0^2 \omega^2 h \sigma a^4}{8} \sin^2(\omega t)$$

Tidsmedelvärdet av P

$$\langle P \rangle = \frac{1}{T} \int_{t=0}^T P \, dt = \frac{1}{T} \frac{\pi B_0^2 \omega^2 h \sigma a^4}{8} \underbrace{\int_0^T \sin^2(\omega t) \, dt}_{T/2} = \frac{\pi B_0^2 \omega^2 h \sigma a^4}{16}$$

$\leftarrow T = \frac{2\pi}{\omega}$

Storgruppsövning 6/12

Polarisation & propagation

$$\vec{E} = \hat{n} E \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{R})$$

polarisation propagationsriktning

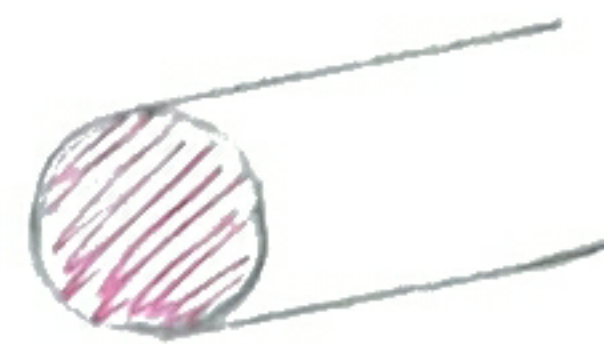
$$\vec{E} = \hat{n} E e^{-i\vec{k} \cdot \vec{R}} = \hat{n} E e^{-i\hat{k} \cdot \vec{R}}$$

Komplex permittivitet

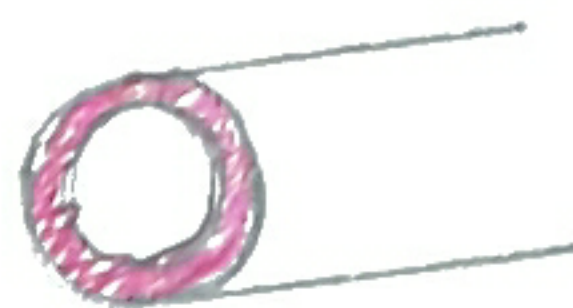
Utgå från Ampères lag $\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + j\omega \vec{D} = \sigma \vec{E} + j\omega \epsilon \vec{E} = j\omega \vec{E} (\epsilon - j\frac{\sigma}{\omega})$
där $\epsilon_c = \epsilon - j\frac{\sigma}{\omega}$ är komplex permittivitet

Inträngningsdjup

Likström: uniformt fördelad ström



Växelström: längs ytan, djup δ



11-8 Det magnetiska fältet i en plan, sinusformad våg i vakuum ges av:

$$H_x = A \cos[\omega(t - \frac{1}{c}(y \sin \alpha + z \cos \alpha))]$$

$$H_y = H_z = 0$$

Vi ser direkt att \vec{E} & prop. riktningen ligger i yz -planet
Om vi kan bestämma prop. rikt. \hat{k} ges \vec{E} -fältet av

$$\vec{E}^+(\vec{R}) = Z_0 \vec{H}^+(\vec{R}) \times \hat{k}$$

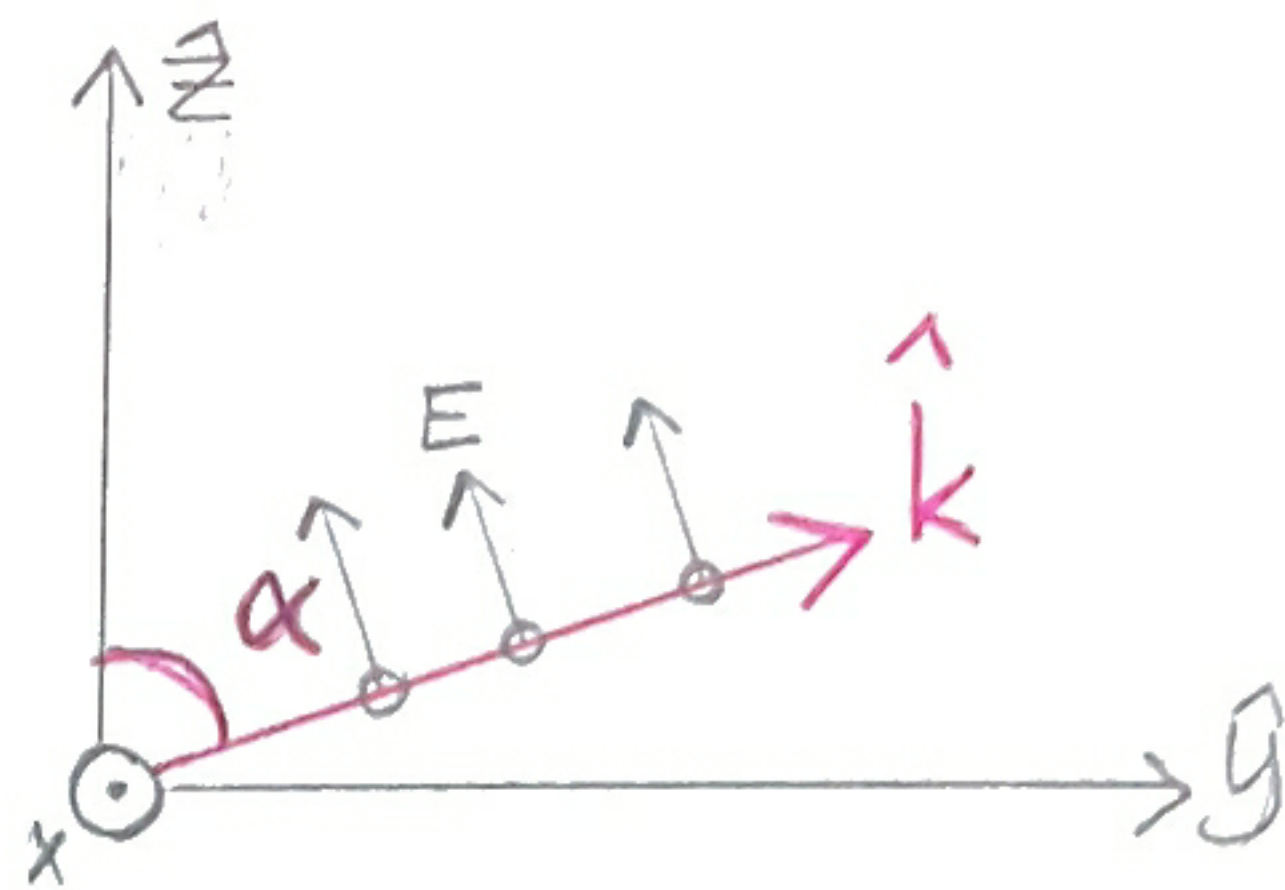
där $Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \approx 377 \Omega$ i vakuum.

Jmf. ekv. i uppgiften med $H = A \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{R})$.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\omega}{c} (y \sin \alpha + z \cos \alpha) = \vec{k} \cdot \vec{R} \\ \vec{R} = y\hat{y} + z\hat{z} \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \mathbf{k} = \frac{\omega}{c} (\sin \alpha \hat{y} + \cos \alpha \hat{z})$$

$$\Rightarrow \hat{\mathbf{k}} = \sin \alpha \hat{y} + \cos \alpha \hat{z}$$



H-fältet på komplex form

$$\bar{H}^+ = A e^{-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \hat{x}$$

Var på E-fältet blir

$$\bar{E}^+ = Z_0 A e^{-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \hat{x} \times (\sin \alpha \hat{y} + \cos \alpha \hat{z}) = Z_0 A e^{-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} (\sin \alpha \hat{z} - \cos \alpha \hat{y})$$

& tidsuttrycket blir

$$E = \text{Re}(\bar{E} e^{j\omega t}) = Z_0 A \cos(\omega t - \frac{\omega}{c}(y \sin \alpha + z \cos \alpha)) (\sin \alpha \hat{z} - \cos \alpha \hat{y})$$

12-7 Beräkna α , β & Z_1 för en metall med relativ permeabilitet μ_r om $\sigma \gg \omega \epsilon_0 \mu_r$.

Inför Z_0 i uttrycket för Z_1

Def. den komplexa permittiviteten $\epsilon_c = \epsilon - j \frac{\sigma}{\omega}$.

Vi bildar en vågekv. för en plan våg i materialet. (se boken)

$$\nabla^2 \bar{E} - \gamma^2 \bar{E} = 0$$

$$\text{där } \gamma = jk_c = j\omega \sqrt{\mu \epsilon_c} = \alpha + j\beta$$

$$\Rightarrow \gamma = j\omega \sqrt{\mu(\epsilon_0 - j \frac{\sigma}{\omega})} = j\omega \sqrt{\mu \epsilon_0 \left(1 - j \frac{\sigma}{\omega \epsilon_0}\right)} \approx \sqrt{j \mu \omega \sigma} = \frac{1+j}{\sqrt{2}} \sqrt{\mu \omega \sigma}$$

$$\Rightarrow \alpha = \beta = \sqrt{\frac{\mu \omega \sigma}{2}}$$

$$Z_1 = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon_c}} = \sqrt{\frac{\mu_0 \mu_r}{\epsilon_0 \left(1 - j \frac{\sigma}{\omega \epsilon_0}\right)}} = Z_0 \sqrt{\frac{\mu_r}{1 - j \frac{\sigma}{\omega \epsilon_0}}} \approx Z_0 \sqrt{j \frac{\mu_r \omega \epsilon_0}{\sigma}} = Z_0 (1+j) \sqrt{\frac{\mu_r \omega \epsilon_0}{2\sigma}}$$

~~12-11~~ Komplexa storheter

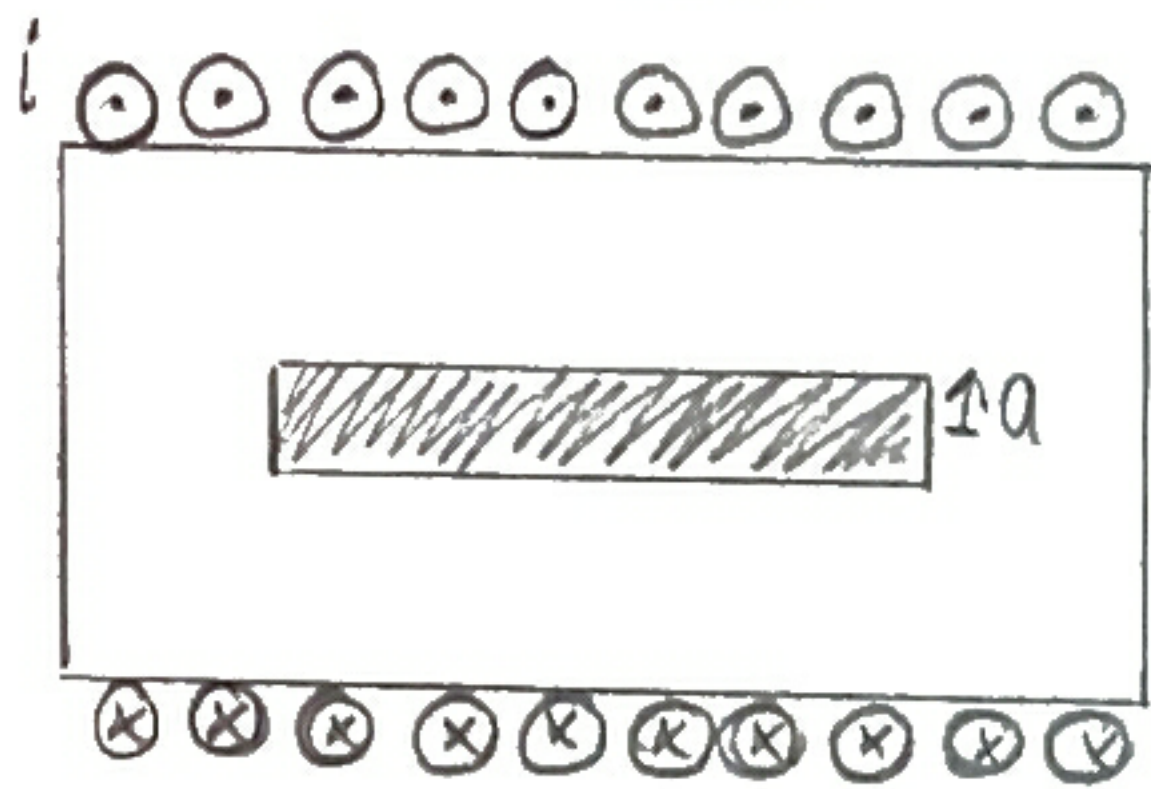
$$E(t) = E \cos(\omega t - kz) = \text{Re}(E e^{j(\omega t - kz)}) = \text{Re}(E e^{-jkz} e^{j\omega t})$$

$$I(t) = \text{Re}(\bar{I} e^{j\omega t})$$

$\underbrace{E}_{\mathbf{E}}$

12-11 Lång, rund, omagnetiserad metallstav med radie $a = 10 \text{ cm}$ & $\sigma = 10^7 \text{ S/m}$ i lång, tät-lindad solenoid med $n = 10^4$ varv/m.

Solenoiden leder en ström på $i = 3 \cos(2\pi \cdot 400t) \text{ A}$.
Beräkna värmeeffekten per längdenhet i stängeln.

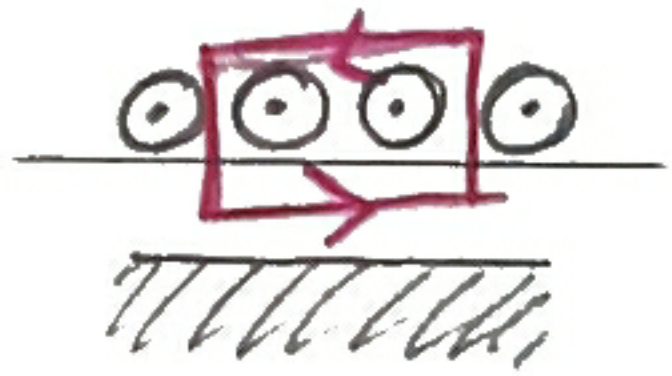


komplex form $\bar{i} = 3 \text{ A}$

inträngningsdjupet $\delta = \sqrt{\frac{\sigma}{\omega \mu}} = \frac{1}{40\pi} \approx 8 \cdot 10^{-3} \text{ m}$
för god ledare

notera $\delta \ll a \Rightarrow$ väsentligen all ström går längs ytskiktet; fälten inuti är små.

Bestäm H-fälten mha. Ampèreslinga.



$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \bar{I}_{\text{inne}}$$

$$H_{\text{luft}} l = \bar{i} n l \hat{z} \Rightarrow H_{\text{luft}} = \bar{i} n \hat{z}$$

Propagationskonstanten i metallen

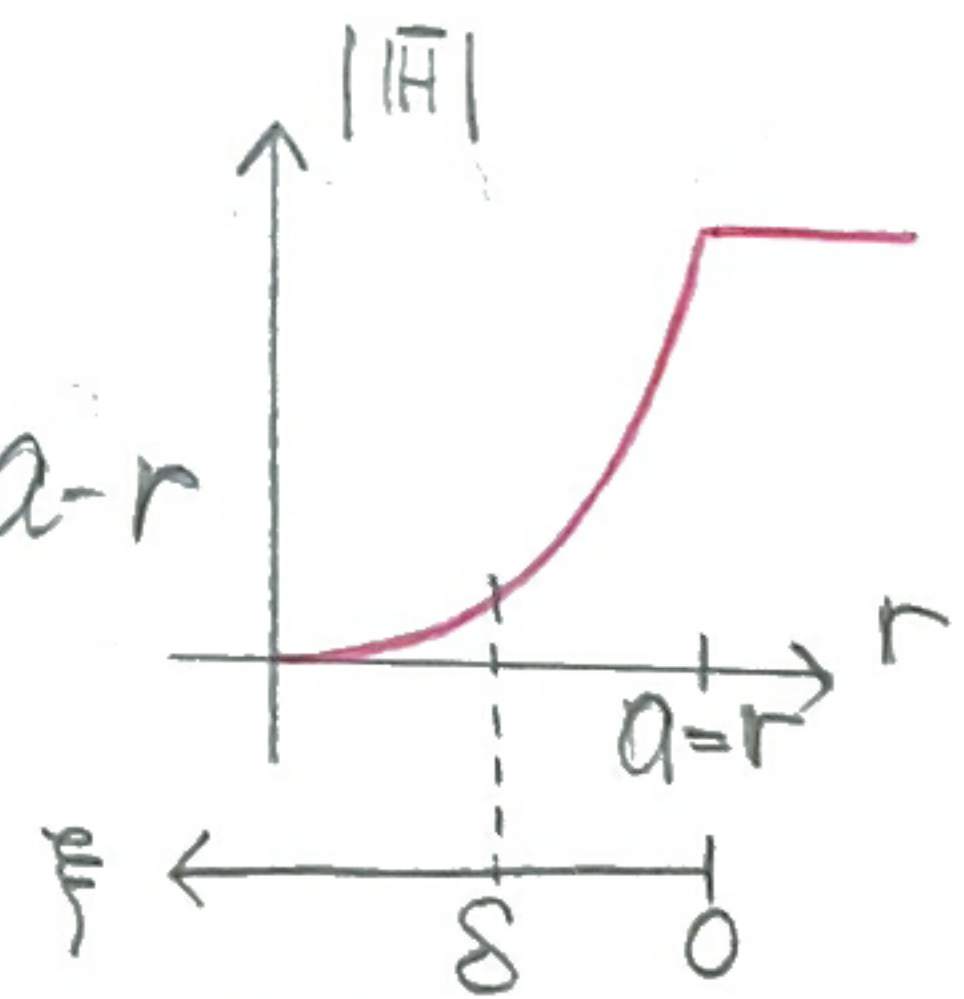
$$\gamma = \alpha + j\beta = (1+j)/\delta$$

In för avståndet från stavens rand: $\xi = a - r$

$$\Rightarrow \vec{H}_{\text{metall}} = n \bar{i} e^{-\gamma \xi} \hat{z}$$

$$\Rightarrow \vec{E}_{\text{metall}} = -Z_{ic} \hat{k} \times \vec{H}_{\text{metall}} =$$

$$= -\sqrt{\frac{\omega \mu}{2\sigma}} (1+j) (-\hat{r} \times (n \bar{i} e^{-\gamma \xi} \hat{z})) = -\frac{1+j}{\delta \sigma} n \bar{i} e^{-\gamma \xi} \hat{\phi}$$



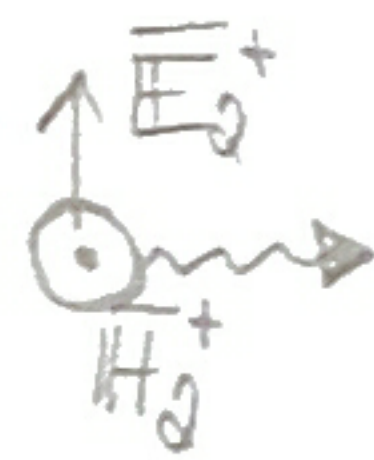
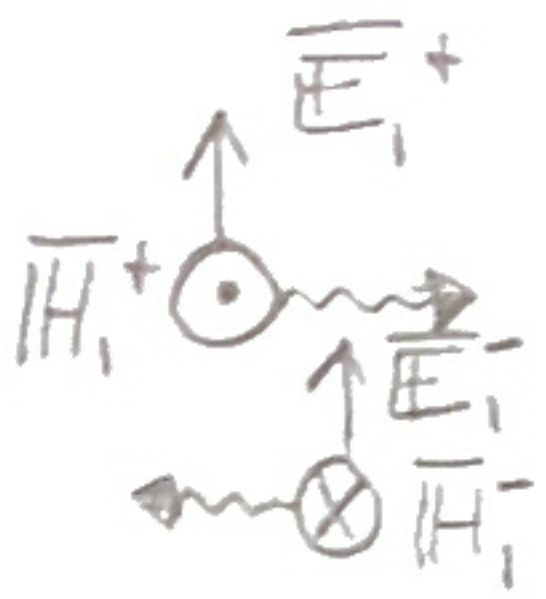
Effektutv. $P = \frac{1}{2} \int_V \vec{E} \cdot \vec{J}^* dV = \frac{\sigma}{2} \int_V |\vec{E}|^2 dV = \frac{\sigma n^2 |\bar{i}|^2}{2(\delta \sigma)^2} 2\pi a l \int_0^\infty e^{-2\alpha \xi} d\xi \approx$
 $\approx \frac{\pi a l n^2 |\bar{i}|^2}{\delta \sigma}$

$$\Rightarrow \frac{P}{l} = 3550 \text{ W/m}$$

Storgruppsövning 8/12

E- & H-fält vid infall av plan våg mot vinkelrät yta.

① $\epsilon_1, \mu_1, \sigma_1$ | ② $\epsilon_2, \mu_2, \sigma_2$



infallande våg $\vec{E}_1^+(z) = \vec{E}_{10}^+ e^{-\gamma_1 z}$
 reflekterad våg $\vec{E}_1^-(z) = \vec{E}_{10}^- e^{\gamma_1 z}$
 transmitterad våg $\vec{E}_2^+(z) = \vec{E}_{20}^+ e^{-\gamma_2 z}$

tillhörande magnetfält $\vec{H} = \frac{1}{Z} \hat{k} \times \vec{E}$

$$\vec{H}_1^+ = \frac{\vec{E}_{10}^+}{Z_1} e^{-\gamma_1 z}$$

$$\vec{H}_1^- = \frac{\vec{E}_{10}^-}{Z_1} e^{\gamma_1 z}$$

$$\vec{H}_2^+ = \frac{\vec{E}_{20}^+}{Z_2} e^{-\gamma_2 z}$$

tangentiella komponenter till E- & H-fälten är kontinuerliga vid gränsen

$$\Rightarrow \vec{E}_{10}^+ + \vec{E}_{10}^- = \vec{E}_{20}^+$$

$$\frac{\vec{E}_{10}^+}{Z_1} - \frac{\vec{E}_{10}^-}{Z_1} = \frac{\vec{E}_{20}^+}{Z_2}$$

$$Z = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma + j\omega\epsilon}}$$

$$\Rightarrow \frac{\vec{E}_{10}^-}{\vec{E}_{10}^+} = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1} = r \text{ reflexionskoeff.}$$

$$\frac{\vec{E}_{20}^+}{\vec{E}_{10}^+} = \frac{2Z_2}{Z_1 + Z_2} = t \text{ transmissionskoeff.}$$

Poyntingvektor

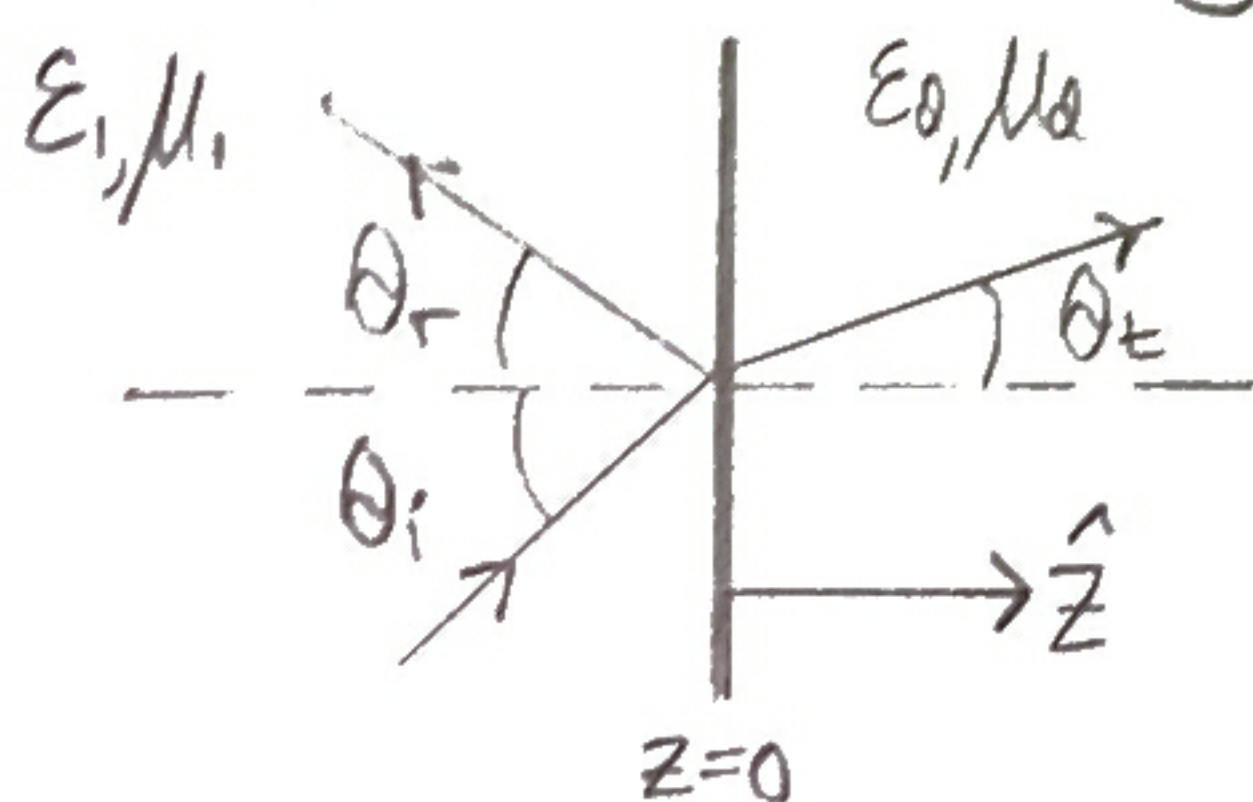
beskriver effekt per ytenhet överförd av vågen.

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} \text{ [W/m}^2\text{]}$$

medel-effekt av periodisk våg:

$$\vec{S}_{med}(z) = \frac{1}{T} \int_0^T \vec{S}(z, t) dt, \quad \vec{S}_{med} = \frac{1}{2} \text{Re}(\vec{E}(z) \times \vec{H}(z)^*)$$

Reflektion & brytning vid snett infall



(förlustfria material $\sigma = 0$)

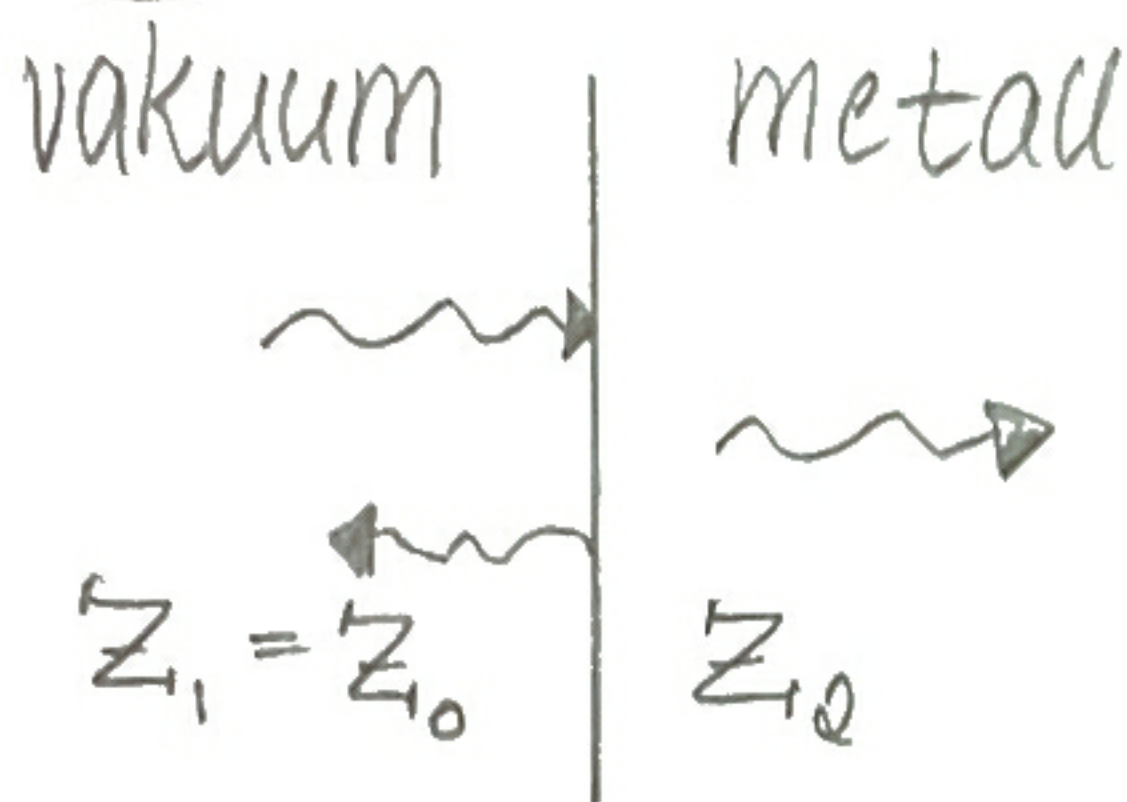
Inför brytningsindex

$$n = \frac{c_0}{c} = \frac{\sqrt{\mu\epsilon}}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}} = \sqrt{\mu_r \epsilon_r}$$

Brytningslagen: $n_1 \sin \theta_i = n_2 \sin \theta_t$, $\theta_i = \theta_r$
 Totalreflektion: ingen transmitterad våg sker
 då $n_1 > n_2$, sätt $\theta_t = \frac{\pi}{2} \rightarrow \sin \theta_t = \frac{n_2}{n_1}$

13-3 Plan E.M. våg i vakuum infaller vinkelrätt mot en metallplatta, inträngningsdjup $\delta = 1 \text{ mm}$ i plattan. Vid gränssytan är den infallande vågen $E = 100\sqrt{2} \sin \omega t$, $\frac{\mu\text{V}}{\text{m}}$. 99% av vågens energi reflekteras.

Bestäm elektriska fältstyrkan i plattan.



Lösning

99% av energin reflekteras, $|\Gamma|^2 = 0,99$
 infallande vågen på komplex form

$$\vec{E}_i(z=0) = 100\sqrt{2} (-j) \cdot 10^{-6} \hat{x} = \vec{E}_{i,0}$$

$$\vec{E}_t = t \vec{E}_{i,0} e^{-\gamma_2 z}$$

$$\gamma_2 \text{ för metallen: } \gamma = \frac{1+j}{\delta}$$

$$\text{vågimpedans i metall: } Z_2 = (1+j) \sqrt{\frac{\omega \mu_r \epsilon_0}{2\sigma}} \quad Z_1 = (1+j) a Z_2, \quad a \ll 1$$

$$|\Gamma|^2 = \left| \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1} \right|^2 = \left| \frac{(1+j)aZ_2 - Z_2}{(1+j)aZ_2 + Z_2} \right|^2 = \frac{1(a-1) + aj}{1(a+1) + aj} \approx \frac{a^2 - 2a + 1 + a^2}{a^2 + 2a + 1 + a^2} \quad a \neq 0$$

$$\approx \frac{1-2a}{1+2a} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Taylorutv. nämnaren} \\ \frac{1}{1+2a} = 1 - 2a + (2a)^2 + \dots \end{array} \right\} = (1-2a)(1-2a+\dots) \approx (1-2a)^2 =$$

$$= 1 - 4a + 4a^2 \approx 1 - 4a \quad a \neq 0$$

$$|\Gamma|^2 \approx 1 - 4a \approx 0,99 \Rightarrow a \approx \frac{1}{400}$$

Använd a för att bestämma t

$$t = \frac{2Z_0}{Z_1 + Z_0} = \frac{2(1+j)aZ_0}{Z_0((1+j)a+1)} = \frac{2a(1+j)}{(1+j)a+1} \approx 2(1+j)a =$$

$$= 2\sqrt{a} e^{j\pi/4} a = \frac{1}{\sqrt{2}} 10^{-2} e^{j\pi/4}$$

Har t & γ

$$\overline{E}_t(z) = t \overline{E}_{i,0} e^{-\gamma_0 z} = \frac{1}{\sqrt{2}} 10^{-2} e^{j\pi/4} \cdot 100\sqrt{2} (j) 10^{-6} e^{-\frac{1+j}{10^{-3}} z} x^1 =$$

$$= \frac{1}{10^6} e^{j\pi/4} e^{-\frac{1+j}{10^{-3}} z} x^1 \quad (?)$$

13-5 En plan, linjärt polariserad våg med $l=30$ cm i vakuum infaller vinkelrätt mot en vattenyta.

$\sigma = 5$ S/m, $\epsilon_r = 80$, bestäm $|r|^2$

Lösning kan $Z_{1,2}$ approximeras?

$\sigma \gg \omega\epsilon$ bra ledare uppskatta kvoten

$\sigma \gg \omega\epsilon$ små förluster $\frac{\sigma}{\omega\epsilon} = \frac{5}{2\pi \cdot 10^9 \cdot 80 \cdot \frac{1 \cdot 10^{-9}}{360\pi}} \approx 1,12 \because \sigma \approx \omega\epsilon$
kan ej approx.

$$Z_{1,2} = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma + j\omega\epsilon}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \sqrt{\frac{j\omega\mu_r}{\sigma/\epsilon_0 + j\omega\epsilon_r}} \quad \mu_r = 1$$

$$= Z_0 \sqrt{\frac{1}{\frac{\sigma}{j\omega\epsilon_0} + \epsilon_r}} = Z_0 \sqrt{\frac{1}{\frac{j \cdot 5}{2\pi \cdot 10^9 \cdot \frac{1 \cdot 10^{-9}}{360\pi}} + 80}}$$

$$= Z_0 \sqrt{\frac{1}{80 - 90j}}$$

$$\Gamma = \frac{Z_0 - Z_1}{Z_0 + Z_1} = \frac{\sqrt{\frac{1}{80 - 90j}} - 1}{\sqrt{\frac{1}{80 - 90j}} + 1} \Rightarrow |\Gamma| \approx 0,847 \Rightarrow |\Gamma|^2 \approx 0,717$$

11-10 en plan, linjärt polariserad, sinusformad, E.M.-våg rör sig genom ett oledande medium med $\epsilon_r = 2,5$ & $\mu_r = 1$.

Den överför effekten $0,2$ W/m².

Beräkna toppvärdena av elektriska & magnetiska fältstyrkan.

Lösning överförd effekt $S_{med} = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\bar{E} \times \bar{H}^*)$.

ansätt elektriskt fält $\bar{E} = \hat{x} E_0 e^{-jkz}$, $E_0 =$ toppvärde
 $\bar{H} = \frac{1}{Z} \hat{k} \times \bar{E} = \frac{1}{Z} \hat{z} \times \hat{x} E_0 e^{-jkz} = \hat{y} \frac{E_0}{Z} e^{-jkz}$.

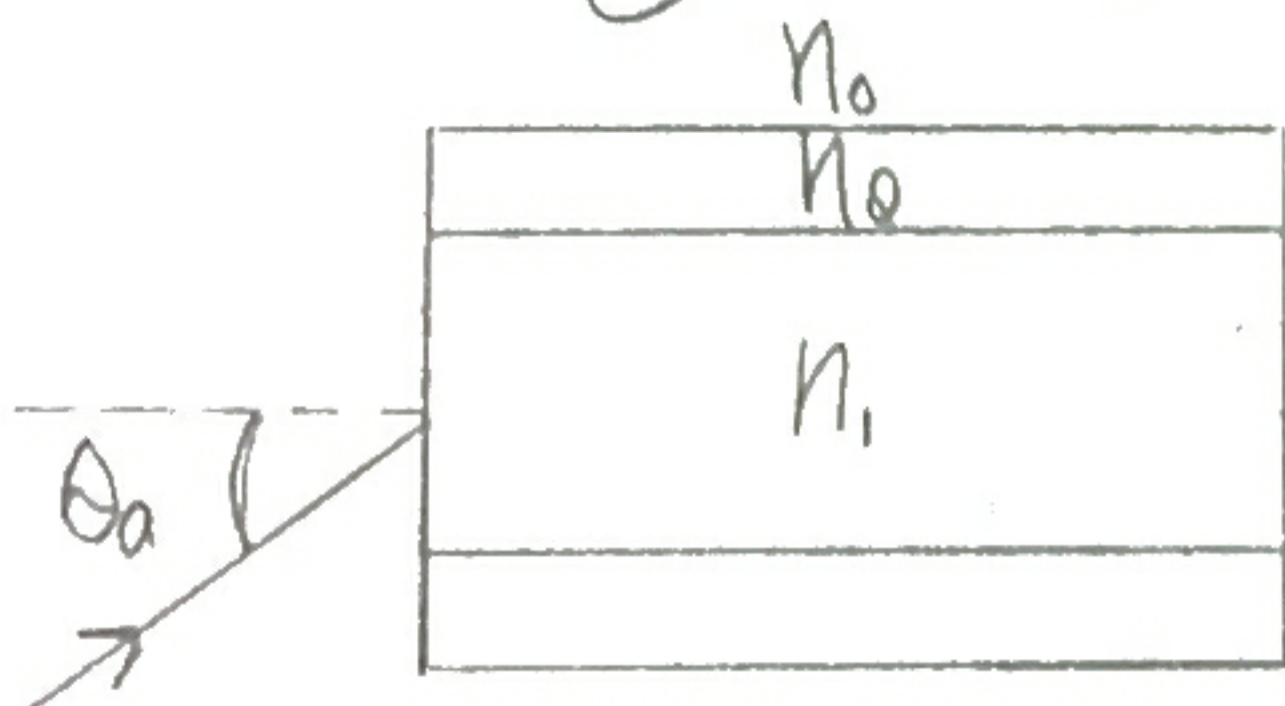
Beräkna Z för materialet

$$Z = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma + j\omega\epsilon}} \stackrel{\sigma=0}{=} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \sqrt{\frac{\mu_r}{\epsilon_r}} = Z_0 \sqrt{\frac{\mu_r}{\epsilon_r}} = \sqrt{\frac{1}{0,5}} \cdot 180\pi.$$

$$S_{med} = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\hat{x} E_0 e^{-jkz} \times \hat{y} \frac{E_0}{Z} e^{jkz}) = \hat{z} \frac{1}{2} \frac{E_0^2}{Z} = 0,2 \text{ enl. uppg.}$$

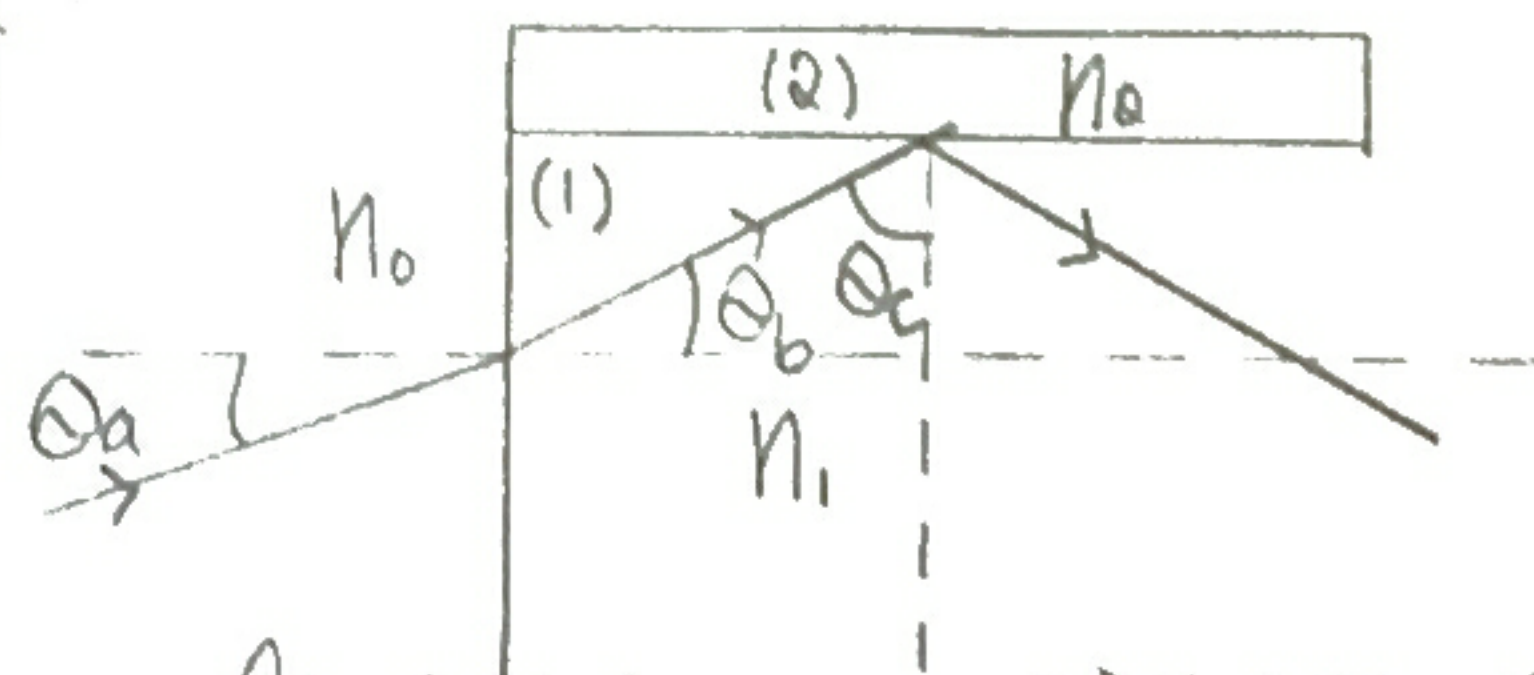
$$\Rightarrow E_0 = 9,77 \text{ V/m} \quad \& \quad H_0 = \frac{E_0}{Z}$$

P 8-41 För att undvika interferens av vågor i närliggande fiberledningar, omges de av ett material med lägre brytningsindex ($n_0 < n_1$)



Lösning

a) hitta maximala θ_a s.a. vågorna aldrig lämnar innersta materialet



Vi behöver totalreflektionen vid (2), θ_c kritiska vinkeln, vid (1): $n_0 \sin \theta_a = n_1 \sin \theta_b$ brytningslagen

vid (2): $n_1 \sin(\theta_b) = n_0 \sin \frac{\pi}{2}$ kritiska vinkel $n_1 \sin \theta_c = \frac{n_0}{n_1}$

$$\Rightarrow \sin(\frac{\pi}{2} - \theta_b) = \cos \theta_b = \frac{n_0}{n_1} \Rightarrow \sin \theta_b = \sqrt{1 - \cos^2 \theta_b} = \sqrt{1 - (\frac{n_0}{n_1})^2}$$

insättning i (1) ger $n_0 \sin \theta_a = n_1 \sqrt{1 - (\frac{n_0}{n_1})^2} = \sqrt{n_1^2 - n_0^2}$

$$\Rightarrow \theta_a = \arcsin\left(\frac{1}{n_0} \sqrt{n_1^2 - n_0^2}\right), \quad \theta_{in} < \theta_a$$

12/12 Antennförstärkning, 11-3

$$G_D(\theta, \varphi) = \frac{S(\theta, \varphi)}{S_{\text{isotrop}}} = \frac{S(\theta, \varphi)}{\frac{P_r}{4\pi R^2}} \quad \text{där}$$

$$P_r = \int_{\text{area}} S(\theta, \varphi) d\Omega \quad \text{poyntingvektorn}$$

För Hertz-dipol $G_D = \frac{3}{2} \sin^2 \theta$

Direktivitet $D = \text{Max}(G_D)$, för Hertz-dipol, $D = 1,5$

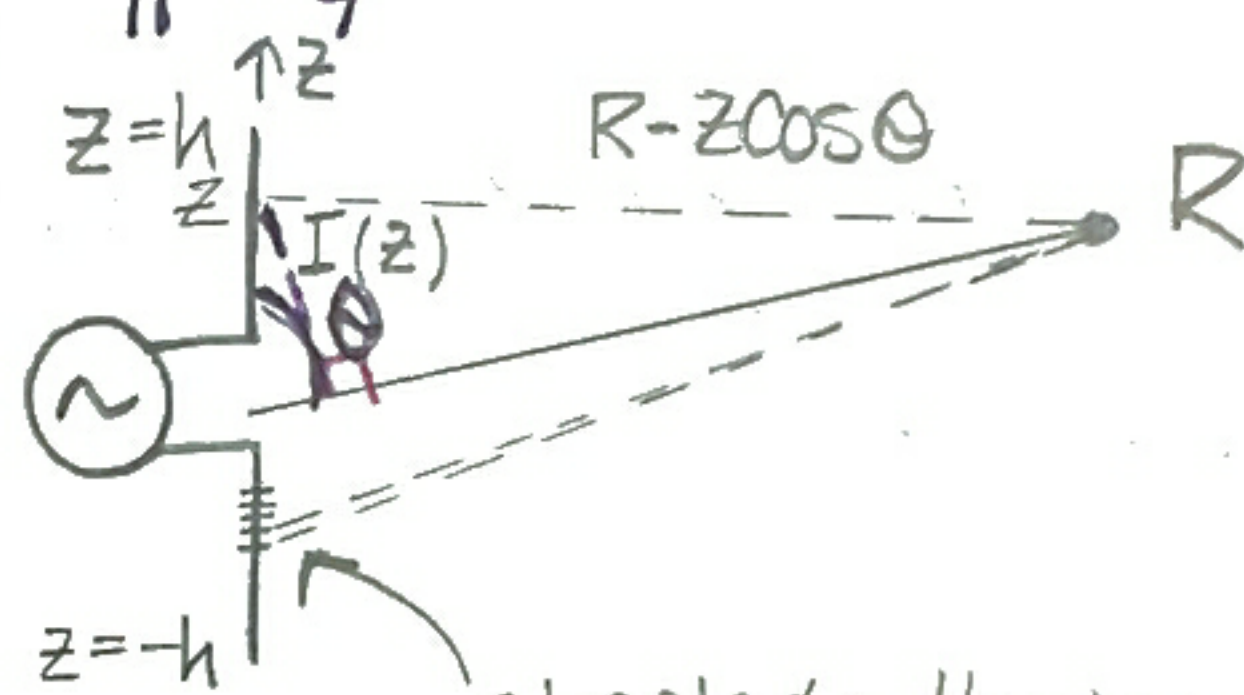
Dipolantenn, 11-4

Antennlängd $l \sim \lambda$

Antag $R \gg l$

Hertz-dipoler

$$d\vec{E} = \hat{\theta} \frac{i\omega dz \vec{I}(z) \sin \theta}{4\pi c R} e^{-i\beta(R-z\cos\theta)}$$



staplade Hertz-dipoler

Antag $\vec{I}(z) = \vec{I}_0 \sin(\beta|h-z|)$

Dipolantenn

$$\vec{E} = \int_{z=-h}^h d\vec{E}$$

Halvvägsdipol, 11-4.1

$$\vec{E}_\theta = Z_0 \vec{H}_\varphi = \dots = j \frac{60 \vec{I}_0}{R} e^{-i\beta R} \frac{\cos(\frac{\pi}{2} \cos \theta)}{\sin \theta}$$

$$S_{av} = \frac{1}{2} \text{Re}(\vec{E} \times \vec{H}^*) = \dots = \frac{15 |\vec{I}_0|^2}{\pi R^2} \left(\frac{\cos(\frac{\pi}{2} \cos \theta)}{\sin \theta} \right)^2$$

$$P_r = \int_A S_{av} dA = R_{\text{rad}} \frac{I_0^2}{2} = 36,5 I_0^2$$

För halvvägsdipol:

* Strålningsresistans $R_{\text{rad}} = 73,1 \Omega$

* Direktivitet $D = 1,64$

Andreas: "Antenner viktigt på tentan, sammanfattar kursen bra!"

Storgruppsövning 12/12

Antenner

Kom ihåg elektrisk dipol: $d \uparrow \cdot Q$ $p = \hat{z} Qd$
 $\downarrow \cdot -Q$

Antag en växelström $i(t) = I \cos(\omega t) \Rightarrow \bar{i} = I$

$$i(t) = \pm \frac{dq(t)}{dt} \Rightarrow \bar{i} = \pm j\omega \bar{q}$$

som innan $p = \hat{z} Qd$ **Hertz-dipol** $q(t) = Q \cos(\omega t) \Rightarrow \bar{q} = Q = \pm \frac{I}{j\omega}$

När-fält: $\beta R = 2\pi \frac{R}{\lambda} \ll 1$

Fjärr-fält: $\beta R = 2\pi \frac{R}{\lambda} \gg 1$

10-1 En elektrisk dipol i vakuum, svänger med frekvens ω .

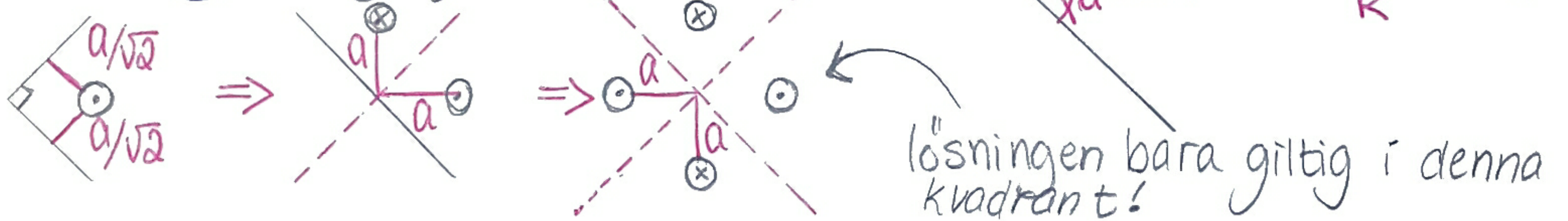
E-fältet observeras på ett avstånd R , vid $\theta = \frac{\pi}{2}$.

Två stora, oändligt gott ledande plan placeras enl. fig.

Beräkna avståndet a s.a. fältet i observationspunkten

blir så starkt som möjligt.

Lösning speglingsmetoden



Komplexa fältet från en Hertz-dipol i origo

$$\bar{E}(R, \theta, \varphi) = \hat{\theta} Z_0 \frac{j\omega I \sin\theta}{4\pi c R} e^{-j\omega R/c}$$

Våra avstånd är: $R_I = R$, $R_{II} = R_{III} = \sqrt{(R+a)^2 + a^2} \approx R+a$ & $R_{IV} = R+2a$

$$\Rightarrow \bar{E}(A) = -\hat{z} Z_0 \underbrace{\frac{j\omega I}{4\pi c}}_C \left(\frac{e^{-j\omega R/c}}{R} - \frac{2e^{-j\omega(R+a)/c}}{R+a} + \frac{e^{-j\omega(R+2a)/c}}{R+2a} \right) =$$

$$= -\hat{z} C \frac{e^{-j\omega(R+a)/c}}{R} (e^{j\omega a/c} - 2 + e^{-j\omega a/c}) =$$

$$= -\hat{z} C \frac{e^{-j\omega(R+a)/c}}{R} (e^{j\frac{\omega a}{2c}} - e^{-j\frac{\omega a}{2c}})^2 =$$

$$= \hat{z} C \frac{4 e^{-j\omega(R+a)/c}}{R} \sin^2\left(\frac{\omega a}{2c}\right)$$

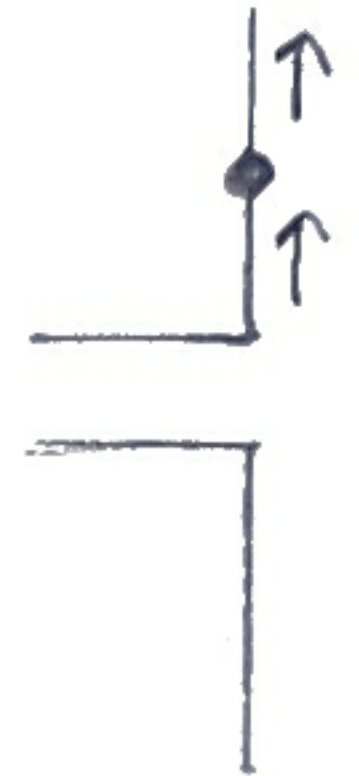
$$= \frac{1}{R} \cdot \left| \sin^2\left(\frac{\omega a}{2c}\right) \right|$$

$$|\bar{E}| \sim \left| \frac{e^{-j\omega(R+a)/c}}{R} \right| \cdot \left| \sin^2\left(\frac{\omega a}{2c}\right) \right| \Rightarrow \frac{\pi}{2} + n\pi = \frac{\omega a}{2c} = \frac{\pi a}{\lambda} \Rightarrow a = \left(\frac{1}{2} + n\right) \lambda$$

P11-5a En tunn centermatad halv vågs antenn längs z-axeln leder strömfördelningen $\bar{I}(z) = I_0 \cos(\beta z)$, $\beta = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}$

Hitta laddningsfördelningen längs antennen.

Lösning utgå från kontinuitetsekv. $\nabla \cdot \bar{J} = \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t}$
 $\Rightarrow \nabla \cdot \bar{J} = j\omega \bar{\rho}$, $\frac{\partial \bar{J}}{\partial z} = j\omega \bar{\rho}$



Antag att ledarna har en radie $a \Rightarrow \bar{J} = \frac{I_0}{\pi a^2} \cos(\beta z)$

$$\& \bar{\rho} = \frac{\bar{\rho}_r}{\pi a^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial z} (I_0 \cos(\beta z)) = j\omega \bar{\rho}_r, \quad \bar{\rho}_r = j \frac{I_0 \beta}{\omega} \sin(\beta z) = j \frac{I_0}{c} \sin(\beta z)$$

Repetition Dynamik

Maxwells ekv. $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

Kont. ekv. $\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$

Kraft $\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$

Självinduktans $\Phi = Li$

Ömsesidig induktans $\Phi_{12} = \int_{\mathcal{S}_2} \mathbf{B}_1 \cdot d\mathcal{S} = L_{12} i_1$

~~Induktion~~ Självinduktans, kretsekv. $\mathcal{E}_{\text{ind}} = -L \frac{\partial i}{\partial t}$

Beräkningsgång

1) antag i_1 , 2) beräkna \mathbf{B}_1 , 3) beräkna Φ_{12}

4) beräkna L_{12} 5) bilda $L_{12} = \frac{\Lambda_{12}}{i_1}$

~~Induktans~~ Induktion

$$V_{\text{ind}} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t}$$

Lentz lag inducerade spänningar motverkar förändringar i pålagda fält.

Retarderade potentialer

$$A = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V_1} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{R}_1, t - \frac{R_{12}}{c})}{R_{12}} dV_1$$

konceptuella förståelsen viktig

Komplexa fält $\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow j\omega$

Komplexa Maxwell

$$\nabla \times \bar{\mathbf{E}} = -j\omega \bar{\mathbf{B}} \quad \nabla \cdot \bar{\mathbf{D}} = \bar{\rho}$$

$$\nabla \times \bar{\mathbf{H}} = \bar{\mathbf{J}} + j\omega \bar{\mathbf{D}} \quad \nabla \cdot \bar{\mathbf{B}} = 0$$

$$\mathbf{E} = \text{Re}(\bar{\mathbf{E}} e^{j\omega t})$$

Komplexa vågekvationen $\nabla^2 \bar{E} - \gamma^2 \bar{E} = 0$

$$\gamma = \alpha + j\beta = \sqrt{j\omega\mu(j\omega\epsilon + \sigma)}$$

Specialfall: $\frac{\sigma}{\omega\epsilon} \gg 1$ resp. $\frac{\sigma}{\omega\epsilon} \ll 1$

Plan våg $\bar{E} = \bar{E}(0) e^{-\gamma \hat{k} \cdot \mathbf{R}}$
 $\bar{H} = \hat{k} \times \frac{\bar{E}}{Z}$

Vågimpedans $Z = \frac{j\omega\mu}{\gamma}$

Fas hastighet $v_{\text{fas}} = \frac{\omega}{\beta}$

Grupphastighet $v_{\text{grupp}} = \frac{1}{\partial\beta/\partial\omega}$

Poyntingvektorn $\mathcal{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$

Tidsmedelvärde $\mathcal{S}_{\text{av}} = \frac{1}{2} \text{Re}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*)$

Reflektion & transmission

Vinkelrätt infall $\Gamma = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1}$, $\tau = \frac{2Z_2}{Z_2 + Z_1}$

Snells lag $\theta_i = \theta_r$, $C_2 \sin \theta_i = C_1 \sin \theta_t$

Totalreflektion $\theta_{\text{kritisk vinkel}} = \arcsin\left(\frac{C_1}{C_2}\right)$

Fresnells ekv. $\Gamma_{\perp} = \frac{\frac{1}{Z_1} \cos \theta_i - \frac{1}{Z_2} \cos \theta_t}{\frac{1}{Z_2} \cos \theta_i + \frac{1}{Z_1} \cos \theta_t}$, $\tau_{\perp} = \frac{\frac{2}{Z_2} \cos \theta_i}{\frac{1}{Z_2} \cos \theta_i + \frac{1}{Z_1} \cos \theta_t}$

$\Gamma_{\parallel} = \frac{-Z_1 \cos \theta_i + Z_2 \cos \theta_t}{Z_1 \cos \theta_i + Z_2 \cos \theta_t}$, $\tau_{\parallel} = \frac{2Z_2 \cos \theta_i}{Z_1 \cos \theta_i + Z_2 \cos \theta_t}$

Hertz-dipol $\bar{E}_{\text{rad}} = \frac{\hat{\theta} Z_0 j\omega dl I \sin \theta}{4\pi c R} e^{-j\beta R}$, $\bar{H} = \frac{\hat{\phi} j\omega dl I \sin \theta}{4\pi c R} e^{-j\beta R}$

Dipolantenner $E = \int_{-h}^h dE_{\text{rad}}$

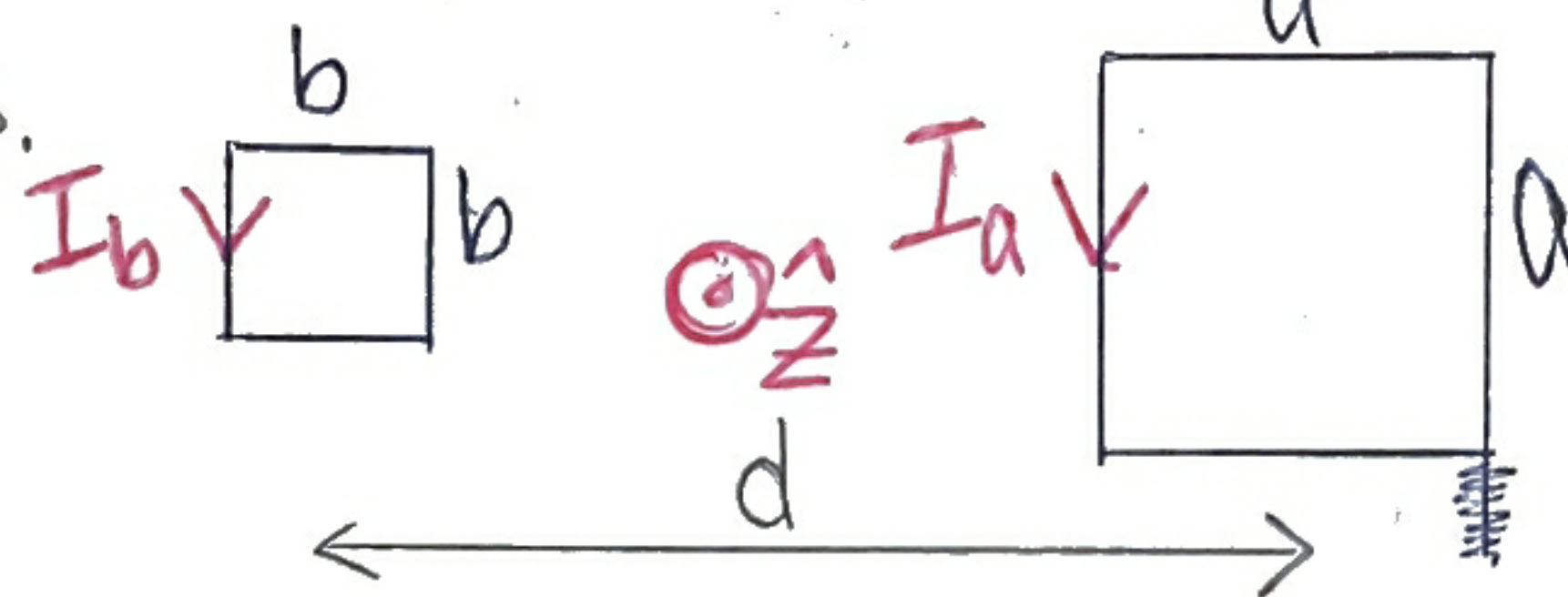
Begrepp strålningsdiagram, strålningsresistans, antennförst. & direktivitet

Tenta 2017-04-11

3. Två kvadratiska strömslingor med sidor a resp. b , ligger i samma plan på ett avstånd d , $d \gg a$, $d \gg b$.

a) Beräkna ömsesidiga induktansen.

b) Beräkna kraften om vi har strömmarna I_a & I_b motsols.



Lösning a) $L_{ab} = \frac{\Phi_{ab}}{I_b} = \frac{\Phi_{ba}}{I_a}$

Φ_{xy} x = flöde genom y = skapar flöde

$$\Phi_{ba} = \int_{S_b} \mathbf{B}_a \cdot d\mathbf{S}_b = B_a S_b$$

Magnetisk dipol: $m_a = I_a a^2 \hat{z}$

Fält från magnetisk dipol: $B_a = -\frac{\mu_0 m_a}{4\pi d^3} \hat{z}$

Flödet blir då $\Phi_{ba} = \frac{\mu_0 I_a a^2 b^2}{4\pi d^3}$

Dividera med I_a ger ömsesidiga induktansen $L_{ab} = \frac{\mu_0 a^2 b^2}{4\pi d^3}$

b) Skiss: $F = BIL$

4. För en våg som färdas i ett medium med ϵ & μ ges komplexa E-fältet av $\vec{E} = (-6x\hat{x} + 3y\hat{y}) e^{-j(2x+4y)}$ V/m

a) propagationsriktning?

b) plan våg?

c) bestäm vågens H-fält.

Lösning a) vågens färdriktning bestäms av \hat{k} , $e^{-j\beta\hat{k}\cdot\mathbf{r}}$
dvs. $\beta\hat{k}\cdot\mathbf{r} = 2x + 4y$

$$\mathbf{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z} \quad \& \quad \beta\hat{k} = 2\hat{x} + 4\hat{y}$$

normering ger $\beta = \sqrt{2^2 + 4^2} = 2\sqrt{5}$

$$\Rightarrow \hat{k} = \frac{1}{2\sqrt{5}} (2\hat{x} + 4\hat{y}) = \frac{1}{\sqrt{5}} (\hat{x} + 2\hat{y})$$

b) plan våg kräver att $\mathbf{E} \perp \hat{k}$:

$$\mathbf{E} \cdot \hat{k} = (-6\hat{x} + 3\hat{y}) \cdot (\hat{x} + 2\hat{y}) = 0 \Rightarrow \text{plan våg.}$$

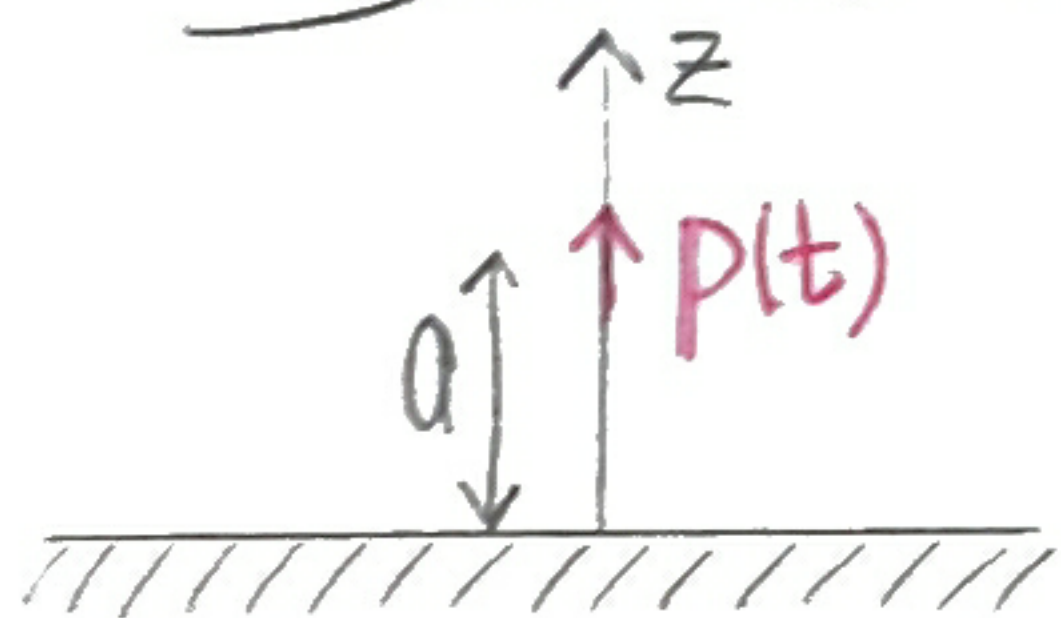
$$c) \bar{\mathbf{H}} = \frac{1}{Z} \hat{k} \times \bar{\mathbf{E}} = \frac{1}{Z} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \hat{z} (-6 \cdot 2 + 1 \cdot 3) e^{-i\beta\hat{k} \cdot \mathbf{r}} = -\frac{3}{Z\sqrt{5}} e^{-i\beta\hat{k} \cdot \mathbf{r}} \hat{z}$$

$$\gamma = \alpha + j\beta \Rightarrow \alpha = 0, \quad Z = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$$

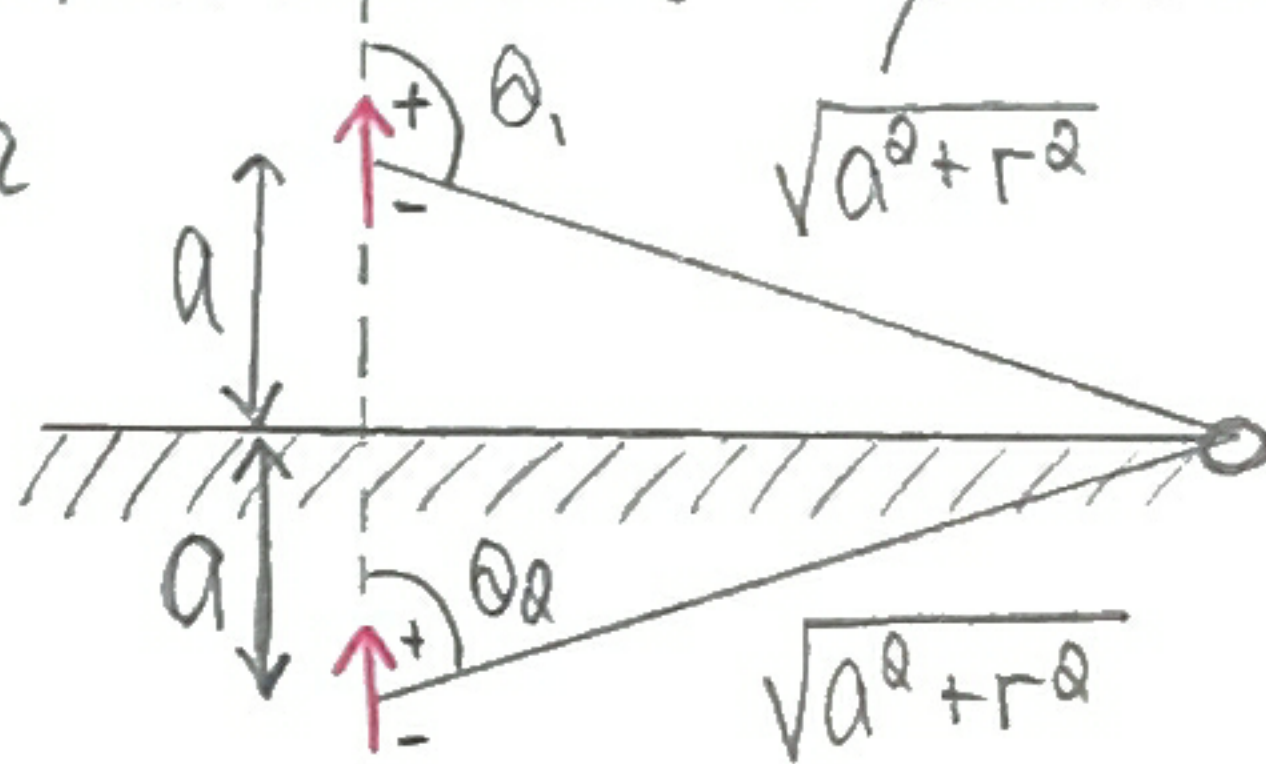
$$\bar{\mathbf{H}} = -\frac{\sqrt{\epsilon}}{\sqrt{\mu}} \frac{3}{\sqrt{5}} e^{-j(2x+4y)} \hat{z}$$

5. En hertz-dipol, med $p(t) = \hat{z} p_0 \cos(\omega t)$, befinner sig i punkten $(0, 0, a)$. I xy -planet har vi ett stort, gott ledande plan. Planet befinner sig i strålningszonen. (Hjällrfältet)

Beräkna inducerade ytströmtätheten i planet.



Lösning spegla



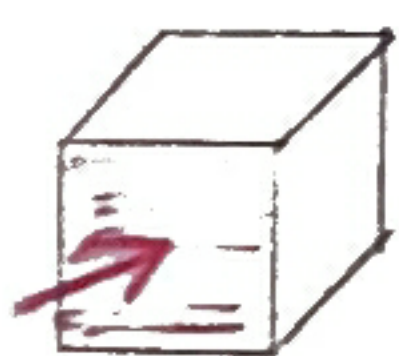
p.g.a. speglingen

$$\bar{\mathbf{H}}(r, \theta, \varphi) = \hat{\varphi} \frac{1}{4\pi c} \frac{-\omega^2 p_0}{\sqrt{a^2 + r^2}} e^{-j\omega \sqrt{a^2 + r^2} / c}, \quad \bar{p}_0 = \frac{li_0}{j\omega} \text{ dipolmoment, komplex form.}$$

$$\begin{cases} \bar{\mathbf{J}}_s = \hat{n}_a \times (\bar{\mathbf{H}}_1 - \bar{\mathbf{H}}_2) \\ \bar{\mathbf{H}}_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \bar{\mathbf{J}}_s = \hat{z} \times \hat{\varphi} (lm) \quad \& \quad \mathbf{J}_s = \text{Re}(\bar{\mathbf{J}}_s e^{j\omega t})$$

$$\Rightarrow \mathbf{J}_s(t) = \hat{r} \frac{\omega^2 p_0 r}{2\pi c (a^2 + r^2)} \cos(\omega t - \frac{\omega}{c} \sqrt{a^2 + r^2}) \text{ A/m}$$

extra:



$$[\mathbf{I}] = \text{A}$$

$$[\mathbf{J}] = \text{A/m}^2$$



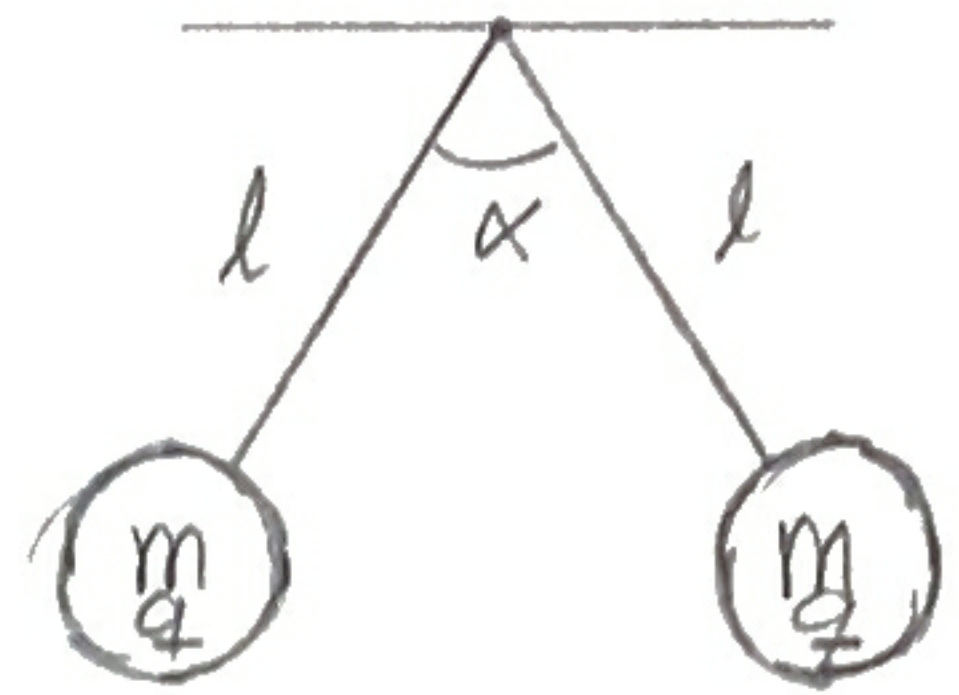
$$[\mathbf{I}] = \text{A}$$

$$[\mathbf{J}] = \text{A/m}$$

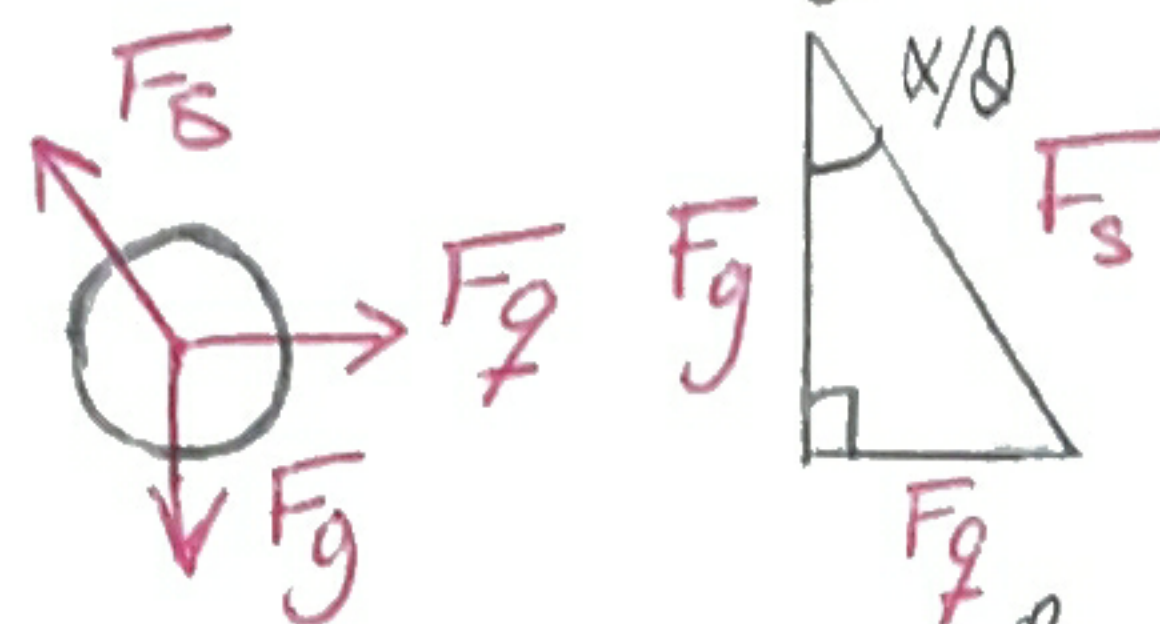
1. Två identiska kulor med massa m & snörledning l hänger från samma punkt. Båda kulorna bär laddning q & repellerar därför.

a) ge ett uttryck för vinkeln α

b) beräkna α om $m=1\text{ kg}$, $l=1\text{ m}$ & $q=3\mu\text{C}$.



Lösning frilägg



$$F_q = F_g \tan \frac{\alpha}{2}, \quad F_g = mg \quad \& \quad F_q = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 d^2} \quad \text{där } d = 2l \sin \frac{\alpha}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{q^2}{16\pi\epsilon_0 l^2 mg} = \frac{\sin^3 \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}}$$

b) antag liten vinkel, $\sin \frac{\alpha}{2} \approx \frac{\alpha}{2}$, $\cos \frac{\alpha}{2} \approx 1$

$$\Rightarrow \alpha \approx 2 \left(\frac{q^2}{16\pi\epsilon_0 l^2 mg} \right)^{1/3} = 0,255 = 14,6^\circ$$

Kontroll: $\sin \frac{0,255}{2} = \sin 0,127 = 0,127$ nice, approxen ovan ok!

Elektromagnetiska fält i sammandrag

Kursbok Cheng: Field and wave electromagnetics

(alt. Cheng: Fundamentals of engineering electromagnetics = Lilla Cheng)

©Eva Palmberg

Institutionen för Signaler och system
Chalmers tekniska högskola

2011

Innehåll

1	Vektoranalys	1
1.1	Skalär- och vektorprodukt	1
1.1.1	Skalärprodukt	1
1.1.2	Vektorprodukt	1
1.2	Längd-, yt-, och volymelement	2
1.3	Gradient, divergens, rotation	2
1.3.1	Gradient, deloperator	2
1.3.2	Divergens	3
1.3.3	Rotation	3
1.4	Divergensteoremet, Stokes teorem mm	4
1.4.1	Divergensteoremt	4
1.4.2	Stokes teorem	4
1.4.3	Indentiteter	4
1.4.4	Helmholtz teorem	4
2	Elektrostatik i vakuum	5
2.1	Laddning, laddningstäthet	5
2.2	Coulombs lag	5
2.3	Definition av E-fält	6
2.4	Postulat	6
2.5	E-fält genom superposition	6
2.6	Gauss lag	8
2.7	Potential	9
2.8	Potential genom superposition	10
2.9	Potential via E-fält	11
2.10	Linjeladdningar och referenser	12
2.11	Ledare i elektrostatiskt fält	13
3	Dielektriska material	14
3.1	Dipolen	14
3.2	Polarisation	15
3.3	D-fältet	15
3.4	Randvillkor	16
3.5	Kapacitans	17
3.6	Elektrostatisk energi och kraft	17
3.6.1	Elektrostatisk energi för punktladdningar	17
3.6.2	Energi för laddningsfördelning	18
3.6.3	Elektrostatisk energi uttryckt medfälten	18
3.6.4	Kraft på punktladdning i E-fält	18
3.6.5	Elektrostatisk kraft på ett föremål	18
3.6.6	Kraft, vridande moment och energi för dipol	20
4	Lösningsmetoder	21
4.1	Poissons och Laplaces ekvationer	21
4.2	Laplace-operatorn	21
4.3	Analytisk lösning	21
4.4	Numerisk lösning	21
4.5	Speglingmetoden	23
4.5.1	Spegling i metallplan	23
4.5.2	Cylinderspegling	24
5	Strömning	28
5.1	Strömtäthet	28
5.2	Resistans	29
5.3	Spänningskällor	29
5.4	Kirchhoffs spänningslag	30
5.5	Kontinuitetsekvationen. Kirchhoffs strömlag	31
5.6	Effektutveckling. Joules lag	31
5.7	Randvillkor	31
5.8	Spegling	31
5.9	Resistansberäkning direkt	32
5.10	Ytströmtäthet, ytresistans	33
5.11	Tvådimensionell strömning	34
5.12	Numerisk resistansberäkning	34

6 Magnetostatik i vakuum	35
6.1 Lorentzkraft	35
6.2 Postulat	36
6.3 Amperes lag	36
6.4 Magnetiskt flöde	37
6.5 Vektorpotential	38
6.6 Biot-Savarts lag	38
6.7 Kraft på ledare i B-fält	39
6.8 Magnetisk dipol	39
7 Magnetostatik med magnetiska material	40
7.1 Magnetisering	40
7.2 H-fältet	41
7.3 Magnetkretsar	41
7.4 Randvillkor	43
7.5 Induktans	43
7.6 Magnetisk energi och kraft	44
7.6.1 Energi för strömfördelning	44
7.6.2 Energi uttryckt med fälten	44
7.6.3 Kraft på strömslinga	45
7.6.4 Kraft på föremål	45
8 Induktion	46
8.1 Faradays lag	46
8.2 Transformatorn	47
9 Elektromagnetiska fält	49
9.1 Förskjutningsströmmen	49
9.2 Maxwells ekvationer	49
9.3 Retarderade potentialer	50
9.4 Vågor i vakuum	51
9.5 Poyntingvektorn	52
10 Komplexa fält	53
10.1 Inledande exempel	53
10.2 Komplexa fält	54
10.2.1 Polarisationstyp mm	54
10.2.2 Vågekvationen	55
10.2.3 Samband E H	55
10.2.4 Skiss av E och H för plan våg	56
10.2.5 Beräkning av γ och Z	56
10.2.6 Fashastighet, våglängd	58
10.2.7 Skineffekt, plan våg	58
10.2.8 Ytströmtäthet, ytimpedans	58
10.2.9 Skineffekt, rund tråd	59
10.2.10 Poyntingvektorn, plan våg	60
10.2.11 Poyntingvektorn, effekt, energi komplext	60
10.2.12 Plan våg i godtycklig riktning	61
10.2.13 Fashastighet och grupphastighet	61
10.2.14 Icke-plana vågor	61
11 Reflexion, transmission	62
11.1 Reflexion, vinkelrätt infall	62
11.1.1 E och H, infall mot en gränssyta	62
11.1.2 Beräkning av r och t	64
11.1.3 Poyntingvektorn	64
11.1.4 Infall mot planparallell platta	65
11.2 Reflexion och brytning, snett infall	67
11.2.1 Uttryck för förlustfria material	68
11.2.2 Material med förluster	69
11.2.3 Poyntingvektorn	69

Innehåll	v
12 Antenner	70
12.1 Hertzdipol	70
12.1.1 Strålningsdiagram	71
12.2 Sprötantenner	72
12.3 Strålningsresistans	72
12.4 Antennförluster	73
12.5 Antennförstärkning mm	73
12.5.1 Sändarantenner	73
Index	74

Kapitel 1

Vektoranalys

Inledning

Elektromagnetiska fält orsakas av laddningar i vila och i rörelse. En del storheter är skalärer - t.ex. laddning och ström. Andra är vektorer, dvs. har storlek och riktning - elektriskt fält, magnetiskt fält...

Vi behöver beskriva hur storheterna varierar i tid och rum. Fysikaliska lagar gäller oberoende av koordinatsystem. Därför skriver man lagarna, Maxwells ekvationer, i koordinatoberoende form. För en viss geometri på ett problem, t.ex. cylindrisk är det enklast med cylinderkoordinater. Vi använder kartesiska, cylindriska och sfäriska koordinatsystem i kursen.

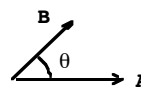
Vi måste också kunna addera, multiplicera och derivera våra storheter. Därför behöver man vektoranalys!!!

1.1 Multiplikation av vektorer.

- Skalärprodukt och vektorprodukt

1.1.1 Skalärprodukt

Skalärprodukten av två vektorer \mathbf{A} och \mathbf{B} definieras som $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = |\mathbf{A}| |\mathbf{B}| \cos \theta$, där $|\mathbf{A}|$ är beloppet (längden) av vektorn \mathbf{A} och θ vinkeln mellan vektorerna. Resultatet blir en skalär storhet.



Viktiga resultat:

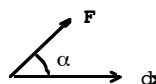
$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 0$ om $\mathbf{A} \perp \mathbf{B}$

$\mathbf{A} \cdot \hat{x} = (A_x \hat{x} + A_y \hat{y} + A_z \hat{z}) \cdot \hat{x} = A_x$, d.v.s. komponenten av \mathbf{A} i x-led A_x

$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = |\mathbf{A}|^2 = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2$, där $|\mathbf{A}|$ är beloppet av vektorn.

Exempel: Arbete utfört av en kraft F att flytta ett föremål sträckan dx , se fig., blir

$dW = F dx \cos \alpha = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x}$

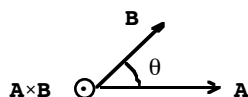


1.1.2 Vektorprodukt

Vektorprodukten (kryssprodukten) av två vektorer \mathbf{A} och \mathbf{B} definieras som

$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \hat{n} |\mathbf{A}| |\mathbf{B}| \sin \theta$, där $|\mathbf{A}|$ är beloppet av vektorn \mathbf{A} , θ vinkeln mellan vektorerna och \hat{n} en enhetsvektor vinkelrät mot planet innehållande \mathbf{A} och \mathbf{B} . Resultatet blir alltså en **vektor**, som är vinkelrät mot både \mathbf{A} och \mathbf{B} .

Högerhandsregeln ger riktningen: Man roterar första vektorn, \mathbf{A} , kortaste vägen mot \mathbf{B} med högra handens fingrar. Höger tumme ger riktningen.



\mathbf{A} och \mathbf{B} ligger i papperets plan

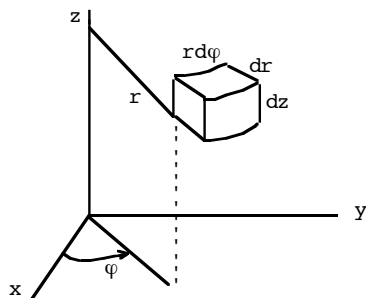
$\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ vinkelrätt mot detta plan

Viktiga resultat:

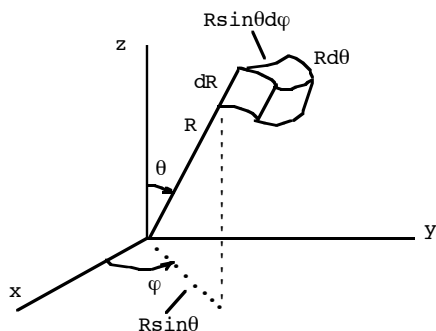
$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = 0$ för $\theta = 0, \pi$, d.v.s. då \mathbf{A} och \mathbf{B} är parallella.

Exempel: Vridande momentet \mathbf{T} skrivs med kryssprodukt som $\mathbf{T} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$, där \mathbf{r} är momentarmen och \mathbf{F} är kraften.

1.2 Längd-, yt-, och volymelement i olika koordinatsystem



Volymelement i
cylindriska koordinater



Volymelement i
sfäriska koordinater

Längdelement $d\mathbf{l}$

$$d\mathbf{l} = (dx, dy, dz) = \hat{x} dx + \hat{y} dy + \hat{z} dz$$

$$d\mathbf{l} = (dr, r d\varphi, dz) = \hat{r} dr + \hat{\varphi} r d\varphi + \hat{z} dz$$

$$d\mathbf{l} = (dR, R d\theta, R \sin\theta d\varphi) = \hat{R} dR + \hat{\theta} R d\theta + \hat{\varphi} R \sin\theta d\varphi$$

i rektangulära, cylindriska resp. sfäriska koordinater

Ytelement ds och volymelement dv tecknas med komponenter av längdelementen.

1.3 Rumsderivator: gradient, divergens, rotation

Storheter som varierar i rummet kallas för **fält**. De kan variera i tiden också. Exempel: temperaturfält $T(x,y,z)$ – ett skalärt fält; elektriskt fält $\mathbf{E}(x,y,z)$ – ett vektorfält.

Vi behöver **rumsderivator** av de elektromagnetiska fälten! **Gradient** är rumsderivata av en skalär storhet. **Divergens** och **rotation** är rumsderivator av en vektor. Här kommer de **koordinatberoende definitionerna!**

1.3.1 Gradient, deloperator

Gradienten ∇V till en skalär funktion V :

Den vektor som anger storlek och riktning i en viss **punkt** hos maximala rumsderivatan av V .

Gradientens komponent i riktningen $d\mathbf{l}$: $\nabla_{\mathbf{l}} V = \partial V / \partial l$

$$dV = \nabla V \cdot d\mathbf{l}$$

$$\text{grad } V = \nabla V = \hat{n} dV / dn$$

$$\nabla V = \hat{x} \frac{\partial V}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial V}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial V}{\partial z}$$

i rektangulära koordinater

Deloperatorn $\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z)$ i rektangulära koordinater.

Uttryck för gradienten i olika koordinatsystem finns i Cheng (insidan av pärnarna, i Beta och i Physics Handbook.

1.3.2 Divergens

Flöde av en vektor \mathbf{A} genom en yta S : $\int_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s}$

$\nabla \cdot \mathbf{A}$, **divergensen** hos ett vektorfält \mathbf{A} i en **punkt**: Nettoflöde av vektorn \mathbf{A} ut från en volym runt punkten, dividerad med volymen, då volymen går mot noll.

$$\text{div} \mathbf{A} = \nabla \cdot \mathbf{A} = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s}}{\Delta v}$$

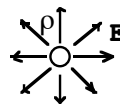


$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

i rektangulära koordinater

Fysikalisk tolkning: $\text{div} \mathbf{A}$ är ett mått på den inneslutna källan. Om $\nabla \cdot \mathbf{A} \neq 0$ har vi en källa i punkten.

Ekvationen $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0$ säger att (laddningstätheten) ρ är en källa för (det elektriska fältet) \mathbf{E} .



Om $\text{div} \mathbf{A} = 0$, så är \mathbf{A} källfritt

1.3.3 Rotation

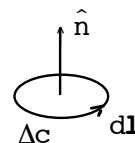
$\nabla \times \mathbf{A}$, **rotationen** hos ett vektorfält \mathbf{A} i en viss punkt, definieras så här:

Placera i "punkten" ett litet stelt ytelement Δs med randkurva Δc och normalriktning \hat{n} enligt högerhandsregeln (skruvregeln), se fig.! Bilda för alla tänkbara normalriktningar \hat{n} den slutna kurvintegralen $\oint_{\Delta c} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$ längs randkurvan Δc . Välj den maximala kurvintegralen och tillhörande \hat{n} . Bilda

$$\hat{n} \frac{1}{\Delta s} \oint_{\Delta c} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$$

och låt ytelementets storlek gå mot noll.

$$\text{rot} \mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{A} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta s} \left[\hat{n} \oint_{\Delta c} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} \right]_{\max}$$



$$\text{I rektangulära koordinater } \nabla \times \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$$

Fysikalisk tolkning: I en vattenvirvel har man rotation. $\nabla \times \mathbf{v} \neq 0$ i en virvel, där \mathbf{v} är vattnets hastighet. Virvel = curl på engelska.



Om $\text{rot} \mathbf{A} = 0$ är \mathbf{A} **virvelfritt** eller **rotationsfritt**

irrotational, conservative på engelska.

Uttryck för grad, div och rot i olika koordinatsystem finns i Cheng (insidan av bakre pärmen), Physics Handbook (ej rot) och i Beta.

1.4 Divergensteoremet. Stokes teorem mm

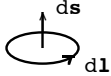
1.4.1 Divergensteoremt

Samband mellan volymintegralen av $\text{div } \mathbf{A}$ och vektorn \mathbf{A} integrerad över den slutna ytan S till volymen.

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{A} dv = \oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s}$$

1.4.2 Stokes teorem

Samband mellan ytintegralen av rot \mathbf{A} och linjeintegralen av \mathbf{A} integrerad runt omkretsen C till ytan S .

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{s} = \oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$$


Högerhandsregeln ger samband mellan $d\mathbf{l}$ och $d\mathbf{s}$: Fingrarna i $d\mathbf{l}$ -riktningen medför $d\mathbf{s}$ i tummens riktning, se fig.!

1.4.3 Identiteter

1/ Rotationen av grad V är identiskt lika med noll

$$\nabla \times (\nabla V) \equiv 0$$

Följd: Om $\nabla \times \mathbf{E} = 0$, kan man sätta $\mathbf{E} = -\nabla V$, där V är skalär (potential) - Se elektrostatiken!

2/ Divergensen av rot \mathbf{A} är identiskt lika med noll:

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) \equiv 0$$

Följd: Om $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, kan man sätta $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$, där \mathbf{A} är vektorpotential. Se magnetostatiken!

1.4.4 Helmholtz teorem

Om man känner $\nabla \cdot \mathbf{A}$ och $\nabla \times \mathbf{A}$ (i hela rummet), så känner man vektorn \mathbf{A} . Se not i Cheng s. 65.

Maxwells ekvationer i elektromagnetismen ger oss just divergens och rotation för det elektriska fältet och för det magnetiska fältet !!!

VIKTIGT !!!

Sätt ut vektorbeteckning på alla vektorer! – Fetstil i Cheng och i detta häfte.

Sätt ut skalärpricken ordentligt i alla skalärprodukter!

Sätt ut kryssset vid vektorprodukt!

Det blir meningslösa uttryck annars!

Kapitel 2

Elektrostatik i vakuum

Elektrostatik = elektriskt fält från laddning i vila. – Fälten ändras ej i tiden.

I detta kapitel behandlas laddningstäthet, Coulombs lag, E-fält, Gauss lag, potential, linjeladdningar

2.1 Laddning, laddningstäthet

Mikroskopisk laddning: atomär laddning, t.ex. elektronens laddning e .

Makroskopisk laddning: volym med många atomära laddningar.

Välj en makroskopiskt sett liten volym Δv , men så stor att den innehåller ett stort antal atomer – en kub med sidan 10^{-6} m innehåller 10^{11} atomer.

Punktladdning q . Vi betraktar laddningen på så stort avstånd att laddningens utbredning är försumbar i förhållande till avståndet till den. Dimensionen för q , $[q] = \text{As}$ (ampere-sekund) = C (coulomb).

Laddningstätheter:

Om ett stort antal laddningar q_i finns i en volym v , kan man införa en **volymladdningstäthet** definierad genom

$$\rho = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\sum q_i}{\Delta v} \quad [\rho] = \text{As/m}^3$$

På motsvarande sätt definieras **ytladdningstäthet** ρ_s

$$\rho_s = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\sum q_i}{\Delta s} \quad [\rho_s] = \text{As/m}^2$$

och **linjeladdningstäthet** ρ_l eller λ

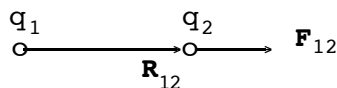
$$\rho_l = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\sum q_i}{\Delta l} \quad [\rho_l] = \text{As/m}$$

2.2 Coulombs lag

Kraft på punktladdning q_2 (testladdning) p.g.a. punktladdningen q_1 (källa - orsak till kraften):

$$\mathbf{F}_{12} = \hat{\mathbf{R}}_{12} \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 R_{12}^2}$$

$[\mathbf{F}] = \text{N}$ (newton)



\mathbf{R}_{12} : vektor från 1 till 2

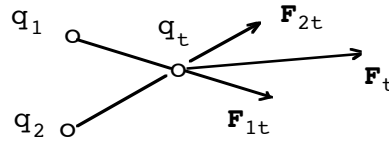
där $\epsilon_0 = \frac{10^{-9}}{36\pi} = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ As/Vm}$

dielektricitetskonstanten
(**permittiviteten**) för
vakuum

Observera att kraften på q_1 , $\mathbf{F}_{21} = -\mathbf{F}_{12}$!

Superpositionsprincipen gäller:
Kraft på q_t pga två punktladdningar q_1 och q_2

$\mathbf{F}_t = \mathbf{F}_{1t} + \mathbf{F}_{2t}$ vektoraddition!



2.3 Definition av E-fält

$$\mathbf{E} = \lim_{q_2 \rightarrow 0} \frac{\mathbf{F}_{12}}{q_2}$$

definition av **elektrisk fältstyrka** \mathbf{E}
("kraft på positiv enhetsladdning")
[\mathbf{E}] = N/As = V/m

2.4 Postulat

För elektostatik i vakuum gäller för E-fältet:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho / \epsilon_0$$

eller

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = Q / \epsilon_0$$

Gauss lag i punktform
resp. integralform för
vakuum

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0$$

eller

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

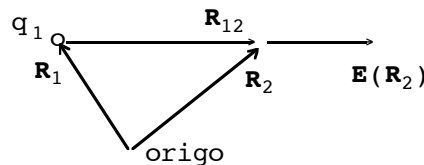
det elektostatiska
fältet är rotations-
fritt

2.5 E-fält genom superposition

a/ E-fält från punktladdning

För en punktladdning q_1 med koordinaten \mathbf{R}_1 (källpunkten) får vi från Coulombs lag i en punkt \mathbf{R}_2 (fältpunkten)

$$\mathbf{E}(\mathbf{R}_2) = \hat{\mathbf{R}}_{12} \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 R_{12}^2}$$



\mathbf{R}_{12} är en vektor från källpunkten till fältpunkten! Om vektorerna \mathbf{R}_1 och \mathbf{R}_2 är givna blir \mathbf{R}_{12} , se fig.,

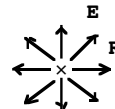
$$\mathbf{R}_{12} = \mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1 \text{ och } R_{12} = |\mathbf{R}_{12}| = |\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1|$$

Exempel: En punktladdning q ligger i origo i ett sfäriskt koordinatsystem. Beräkna $\mathbf{E}(\mathbf{R})$!

$$\mathbf{R}_1 = (0, 0, 0), \quad \mathbf{R}_2 = \mathbf{R} \Rightarrow \mathbf{R}_{12} = \mathbf{R}$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{R}) = \hat{\mathbf{R}} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2}$$

E-fält från en punkt-
laddning q i origo
- radiellt ut från q

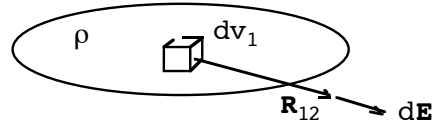


b/ E-fält från laddningsfördelningar

I volymen v finns en **volymladdningstäthet** ρ . Beräkna \mathbf{E} !

Metod: Välj ett litet volymelement dv_1 och **betrakta $dq_1 = \rho dv_1$ som en punktladdning!** dq_1 ger bidraget $d\mathbf{E}$, se fig.! Vi får

$$d\mathbf{E} = \hat{\mathbf{R}}_{12} \frac{\rho dv_1}{4\pi\epsilon_0 R_{12}^2}$$



Vektoraddera alla bidrag $d\mathbf{E}$, d.v.s. integrera över volymen v !

$$\mathbf{E} = \int_v d\mathbf{E} . \quad \text{Dela först upp } d\mathbf{E} \text{ i komponenter och integrera sedan!}$$

OBS! Att direktintegrera \mathbf{E} på detta sätt är oftast mycket **jobbigare än du tror!**

Kolla först om det är symmetri, så att du kan använda Gauss lag i stället!

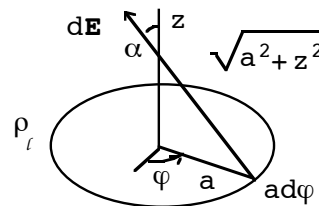
- Se nästa avsnitt 2.6!

På motsvarande sätt beräknas \mathbf{E} på grund av **ytladdningstäthet** ρ_s eller **linjeladdningstäthet** ρ_ℓ , d.v.s. $dq_1 = \rho_s ds_1$ resp. $dq_1 = \rho_\ell dl_1$.

Exempel: Laddningen q finns jämnt fördelad på en cirkulär slinga med radien a . Beräkna \mathbf{E} -fältet på slingans axel!

Laddning per längdenhet på slingan $\rho_\ell = q/2\pi a$. Välj ett laddningselement med längden $a d\varphi$ och laddningen $dq = \rho_\ell a d\varphi$.

Denna laddning ger ett \mathbf{E} -fält på z -axeln



$$d\mathbf{E} = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 (a^2+z^2)} \quad \text{med riktning enligt figuren}$$

Projicera på z -axeln och integrera över laddningsfördelningen, d.v.s. runt slingan.

$$dE_z = dE \cos \alpha = dE \frac{z}{(a^2+z^2)^{1/2}}$$

$$E_z = \int_0^{2\pi} \frac{q a z d\varphi}{8\pi^2 \epsilon_0 a (a^2+z^2)^{3/2}} = \frac{qz}{4\pi\epsilon_0 (a^2+z^2)^{3/2}} \quad \mathbf{E} = \hat{\mathbf{z}} E_z$$

På grund av symmetri får \mathbf{E} -fältet på z -axeln bara komponent i z -riktningen.

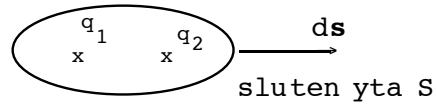
2.6 Gauss lag

Samband mellan ytintegral av E-fältet och innesluten laddning. I volymen v finns laddningar q_1, q_2, \dots

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_v \rho \, dv = \frac{1}{\epsilon_0} q_{\text{innesluten}}$$

Gauss lag i integralform

$$d\mathbf{s} = \hat{n} \, ds \quad \text{ut från volymen}$$



$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho / \epsilon_0 \quad \text{Gauss lag i differentialform}$$

Differentialformen (punktformen) av Gauss lag lämpar sig för beräkning av laddningsfördelningen, $\rho(R)$, när man känner $\mathbf{E}(R)$. Se uppgift 2-5 och 2-15 i Exempelsamlingen!

Integralformen ger $\mathbf{E}(R)$, när laddningsfördelningen är känd. Kräver dock symmetri för att vara praktiskt användbart. Se exemplen nedan!

Med Gauss lag får man enkelt lösningar till viktiga elektrostatiska problem med symmetri! Vi måste ha symmetri, så att vi vet tillräckligt mycket om E-fältet, t.ex. att $\mathbf{E} = \hat{R} E(R)$ i exemplen nedan!

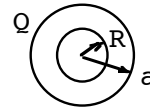
Tillräcklig symmetri har vi i fallen sfäriskt symmetrisk laddningsfördelning, oändligt lång cylindrisk laddningsfördelning, laddning på oändligt stort plan.

Vidare använder man Gauss lag vid studium av allmänna egenskaper hos elektrostatiska fält, t.ex. **metall i E-fält**. Se avsnitt 2.11 på sidan 13 och 3-6.1 i Cheng - **viktigt!**

Exempel 1: Laddningen Q finns jämnt fördelad på ytan till en sfär med radien a . Beräkna E både för $R > a$ och $R < a$!

På grund av symmetri måste E vara riktad radiellt och oberoende av θ och φ .

$$\mathbf{E} = \hat{R} E(R)$$

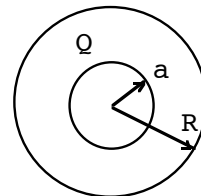


1/ För $R < a$. Lagg en integrationssfär med den godtyckliga radien R **innanför** $R=a$. Gauss lag ger nu $E_1(R)$ nedan är konstant på integrationsytan och kan flyttas utanför integralen. –

$$\begin{aligned} \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} &= \oint E_1(R) \hat{R} \cdot ds \hat{R} = E_1(R) \oint ds = E_1(R) 4\pi R^2 = \\ &= \frac{1}{\epsilon_0} q_{\text{innesluten}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{E_1(R) = 0, \quad R < a}} \end{aligned}$$

2/ För $R > a$. Lagg integrationssfären **utanför** $R=a$.

$$\begin{aligned} \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} &= E_2(R) 4\pi R^2 = \frac{1}{\epsilon_0} q_{\text{innesluten}} = Q / \epsilon_0 \\ \Rightarrow E_2(R) &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \quad R > a \\ &= = = = = = = = = = \end{aligned}$$

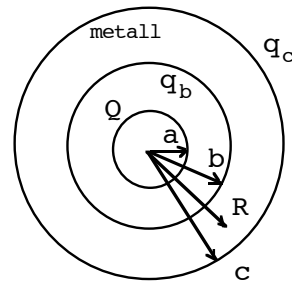


Tolkning:

Utifrån sett kan vi inte avgöra om E_2 kommer från en jämnt fördelad ytladdning, sfärisk volymladdning eller från en punktladdning Q i sfärens mitt. E_2 får samma beroende i alla dessa fall!

Exempel 2: Lagg en **oladdad metallsfär** med innerradien b och ytterradien c runt om den laddade sfären i Exempel 1. Beräkna E överallt!

I stationärtillståndet finns laddningen på ytan av metallen och $E=0$ i metallen. Antag att vi får q_b på insidan och q_c på utsidan av metallsfären. Gauss lag ger för de olika områdena:



1/ $R < a$ $E_1 = 0$ som i Exempel 1 ovan.

2/ $a < R < b$ $E_2 = \hat{R}Q/4\pi\epsilon_0R^2$ som i Exempel 1

3/ $b < R < c$, dvs i metallen. $E_3=0$ Lagg en integrationsssfär med radien R i metallen, se fig.

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = E_3 4\pi R^2 = \frac{1}{\epsilon_0} q_{\text{innesluten}} = \frac{1}{\epsilon_0} (Q + q_b) = 0$$

$$\Rightarrow q_b = -Q \quad \text{Metallsfären var oladdad dvs } q_b + q_c = 0 \Rightarrow q_c = Q$$

Laddningen på den inre sfären inducerar en laddning $-Q$ på insidan av metallen, så att $E=0$ i metallen! Eftersom metallsfären var oladdad får vi $+Q$ på utsidan av metallen.

4/ $R > c$ $\oint \mathbf{E}_4 \cdot d\mathbf{s} = \frac{1}{\epsilon_0} q_{\text{innesluten}} = \frac{1}{\epsilon_0} (Q + q_b + q_c) = Q/\epsilon_0$

$$\Rightarrow E_4 = Q/4\pi\epsilon_0R^2$$

Alla laddningar Q , q_b och q_c ligger jämnt fördelade på ytan till resp. sfär.

Se också lösta exempel i Cheng: 3-5, 3-6, 3-7; (Ex 3-4, 3-5, 3-6 i Lilla Cheng)!

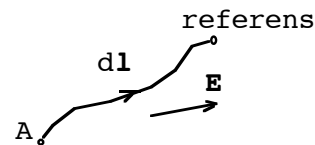
2.7 Potential

För det elektrostatiska fältet gäller $\nabla \times \mathbf{E} = 0$. Eftersom $\nabla \times (\nabla V) \equiv 0$, kan vi införa en skalär potential V definierad genom

$$\mathbf{E} = -\nabla V$$

eller omvänt för potentialen $V(A)$ i punkten A

$$V(A) - V(\text{ref}) = \int_A^{\text{ref}} \mathbf{E}(\mathbf{R}) \cdot d\mathbf{l}$$



där $V(\text{ref}) = V_{\text{ref}} =$ referenspunktens potential.
Om det är möjligt sätter vi $V_{\text{ref}} = 0$ i ∞ .

Vi får **potentialskillnaden** mellan två punkter A och B:

$$V_A - V_B = \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

Kursboken har ombytta gränser och tecken i uttrycket.

2.8 Potential genom superposition

a/ Potential från punktladdning

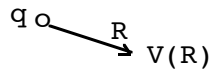
Låt punktladdningen q ligga i origo och använd E-fältet från en punktladdning i origo: $\mathbf{E}(R) = \hat{R} q/4\pi\epsilon_0 R^2$

$$V(R) - V(\infty) = \int_R^\infty \mathbf{E}(R) \cdot d\mathbf{R} = q/4\pi\epsilon_0 R$$

d.v.s. V från punktladdning q i origo

$$V(R) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R}$$

om $V_\infty = 0$



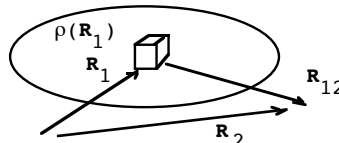
b/ Potential från laddningsfördelning

I volymen v finns en **volym-laddningstäthet** ρ . Beräkna V !

Metod: Välj ett litet volymelement dv_1 och **betrakta $dq_1 = \rho dv_1$ som en punktladdning!** dq_1 ger bidraget $dV = dq_1/4\pi\epsilon_0 R_{12}$, se fig.! Vi får

$$V(\mathbf{R}_2) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{R}_1)}{R_{12}} dv_1$$

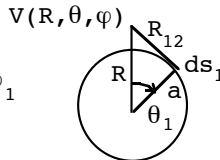
vilket förutsätter $V_\infty = 0$



På motsvarande sätt beräknas V från **ytladdningstäthet** ρ_s eller **linjeladdningstäthet** ρ_ℓ , d.v.s. $dq_1 = \rho_s ds_1$ resp. $dq_1 = \rho_\ell d\ell_1$.

Exempel: Laddningen Q finns jämnt fördelad på ytan till en sfär med radien a och medelpunkten i origo. Teckna potentialen i punkten $(R, 0, \varphi)$ för $R > a$ – sfäriska koordinater!

Välj ett ytelement på sfären vid (a, θ_1, φ_1) . Ytan $ds_1 = a d\theta_1 a \sin\theta_1 d\varphi_1$ och laddningen $dq = \rho_s ds_1$, där $\rho_s = Q/4\pi a^2$.



$$V(R, 0, \varphi) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho_s ds_1}{R_{12}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\theta_1=0}^{\pi} \int_{\varphi_1=0}^{2\pi} \frac{\rho_s a^2 \sin\theta_1 d\theta_1 d\varphi_1}{R_{12}} =$$

där $R_{12}^2 = R^2 + a^2 - 2aR \cos\theta_1$ cos-teoremet

$$= \frac{\rho_s a^2}{4\pi\epsilon_0} \int_0^\pi \frac{\sin\theta_1 d\theta_1}{\sqrt{R^2 + a^2 - 2aR \cos\theta_1}} = \frac{\rho_s a^2}{2\epsilon_0} \left[\frac{1}{aR} \sqrt{R^2 + a^2 - 2aR \cos\theta_1} \right]_0^\pi =$$

$$= \frac{\rho_s a^2}{\epsilon_0 R} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} \quad \text{för } R > a \quad (V_\infty = 0)$$

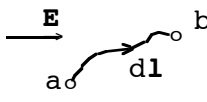
OBS! R_{12} i nämnaren är avståndet från laddningselementet till den punkt, där vi ska bestämma V ! R_{12} fås med cosinus-teoremet! Inte alls så lätt!!!

En fördel med potentialberäkning är att V är en skalär storhet. Skalärer är lättare att superponera än vektorer. Men det finns bättre metoder för problem med symmetri:

Vid symmetri: Beräkna E med Gauss lag och därefter V !!!

2.9 Potential via E-fält

Samband **E-V**:
$$V_a - V_b = \int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$



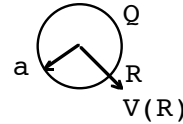
Fördel: Metoden att beräkna V via E-fältet är **lämplig, om man kan beräkna E lätt**, t.ex. med Gauss lag!

Exempel: Beräkna potentialen utanför sfären med homogen ytladdningstäthet, d.v.s. $V(R)$ för $R > a$!

Vi har tidigare beräknat E med Gauss lag, se s. 8!

$$E_2(R) = Q / 4\pi\epsilon_0 R^2 \quad \text{för } R > a$$

Vi får nu potentialen vid radien R



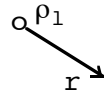
$$V(R) - V(\infty) = \int_R^\infty E_2(R) dR = \int_R^\infty \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} dR = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} \quad R > a$$

Betydligt enklare än att direktintegrera fram V enligt beräkningen ovan, se s. 10

Viktiga resultat:

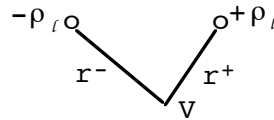
E-fältet från **en oändligt lång linjeladdning** ρ_l :

$$\mathbf{E}(r) = \hat{r} \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0 r}$$



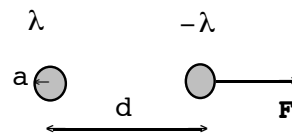
Potentialen från **två oändligt långa linjeladdningar** $\pm\rho_l$:

$$V = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r^-}{r^+}$$



Exempel: Två tunna långa parallella trådar har laddningen $\pm\lambda$ per längdenhet. Trådlängden är ℓ , radien a och axelavståndet d. Beräkna kraften mellan trådarna och potentialskillnaden!

Kraft på $-\lambda$: $F = qE_{\text{vid } -\lambda} =$
 $= (-\lambda\ell) \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 d}$
 $= = = = =$
 ($E_{\text{vid } -\lambda}$ = fältet från $+\lambda$)



Potentialen på den vänstra tråden (**tecknad på trådens yta**):

$$V_1 = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r^-}{r^+} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{d}{a}$$

Potentialen på den högra: $V_2 = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r^-}{r^+} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{a}{d}$

Potentialskillnaden mellan trådarna ΔV :
$$\Delta V = V_1 - V_2 = = \frac{\lambda}{\pi\epsilon_0} \ln \frac{d}{a}$$

Kommentar: Eftersom trådarna är tunna har vi antagit jämn laddningsfördelning på trådarnas yta. Vi kan då räkna med λ efter trådens axel. Vi har också använt **medelavståndet**, d.v.s. d, då vi tecknade potentialen.

Om trådarna inte är tunna måste vi använda speglingsmetoden (behandlas senare).

2.10 Linjeladdningar och referenser

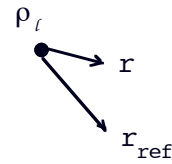
Fältet från **en** oändligt lång linjeladdning ρ_l : $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \hat{\mathbf{r}} \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0 r} \Rightarrow$

$$\text{Potentialen } V(r) - \underbrace{V_{\text{ref}}}_{=0} = \int_r^{r_{\text{ref}}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_{\text{ref}}}{r}$$

där r_{ref} är avståndet från ρ_l till referensen.

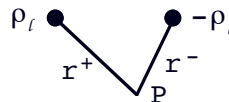
$V = \text{konst}$ är cylindrar runt om ρ_l när vi har **en** linjeladdning

Vi kan t.ex. välja referensen att ligga på avståndet C från **denna** ρ_l .



Två linjeladdningar $\pm\rho_l$:

Superposition



$$V(P) = V^+ + V^- = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_{\text{ref}}^+}{r^+} + \frac{-\rho_l}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_{\text{ref}}^-}{r^-} =$$

$$= \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0} \ln \left[\frac{r^-}{r^+} \cdot \frac{r_{\text{ref}}^+}{r_{\text{ref}}^-} \right] \quad (\text{alla } r \text{ räknade från respektive laddning})$$

Om vi nu har valt **referensen** i varje **delberäkning** att ligga på samma avstånd C från resp. linjeladdning, dvs $r_{\text{ref}}^+ = C$ och $r_{\text{ref}}^- = C$ får vi

$$V(P) = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r^-}{r^+}$$

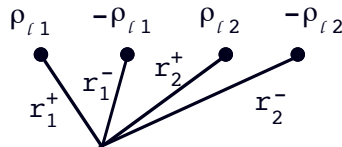
Var är $V=0$ nu? Vi får inte $V=0$ på det ställe vi valde som referens vid tidigare delberäkningar. Vi har ju superponerat potentialer från två delberäkningar.

Av det omramade uttrycket ser vi att $V=0$, där $r^+ = r^-$, d.v.s. mitt emellan $\pm\rho_l$.



Två linjeladdningspar $\pm\rho_{l1}$ och $\pm\rho_{l2}$:

$$V = \frac{\rho_{l1}}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_1^-}{r_1^+} + \frac{\rho_{l2}}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_2^-}{r_2^+}$$



Superponera: Para ihop laddningarna i $\pm\rho_l$ -par. Varje laddning ska bara vara med i **ett** par. Använd $\ln(r^-/r^+)$ för varje par.
Vid udda antal laddningar ρ_l : Använd uttrycket $\ln(C/r)$ för den laddning som "blir över"! Oftast är vi intresserade av **potentialskillnader** och referensen är ointressant. C förkortas bort.

2.11 Ledare i elektrostatiskt fält

a/ \mathbf{E} måste vara noll **inuti** ledaren. $\mathbf{E} \neq 0$ där skulle ju leda till omflyttning av de fritt rörliga laddningarna tills \mathbf{E} blev noll.

$$\Rightarrow \boxed{\mathbf{E} = 0}$$

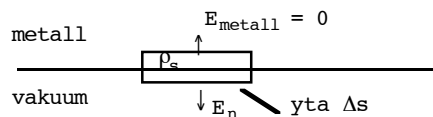
b/ Den ledande volymen måste ha den makroskopiska volym-laddningstätheten $\rho = 0$. Detta inses med hjälp av Gauss lag: Välj en **godtycklig** volym inuti det ledande området. Vi får

$$Q_{\text{innesluten}} = \int \rho \, dv = \epsilon_0 \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\rho = 0}$$

c/ Av b följer att eventuell överskottsladdning hos en ledande kropp måste ligga som en **yt-laddning** på kroppen. För att en ytladdning ska ligga stilla måste tangentialkomponenten av \mathbf{E} vara noll vid ytan.

$$\Rightarrow \boxed{E_{\text{tang}} = 0}$$

d/ Med hjälp av Gauss lag får vi ett samband mellan normalkomponenten av \mathbf{E} alldeles utanför ledaren (metallen) och ytladdningstätheten ρ_s på ytan.



$$Q_{\text{innesluten}} = \rho_s \Delta S = \epsilon_0 \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \epsilon_0 E_n \Delta S + \underbrace{\epsilon_0 E_{\text{metall}} \Delta S}_{=0}$$

$$\Rightarrow \boxed{\rho_s = \epsilon_0 E_n}$$

Kapitel 3

Elektrostatik - med dielektrikum

Elektrisk dipol, polarisation, randvillkor, kapacitans

3.1 Dipolen

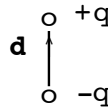
Definition: dipolmoment för en laddningsfördelning $\rho(\mathbf{r}_1)$ - moment med avseende på origo O:

$$\mathbf{p} = \int \mathbf{r}_1 \rho(\mathbf{r}_1) dv_1$$


som för punktdipolen blir

$$\mathbf{p} = q \mathbf{d}$$

oberoende av momentpunkt.

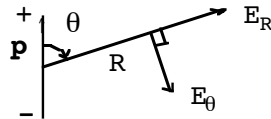


- Dipolmomentet är oberoende av momentpunkt, om totala laddningen är noll. -

Punktdipolen: Två laddningar +q respektive -q på litet avstånd d från varandra, betraktade på stort avstånd ($R \gg d$). Låt origo ligga vid dipolen (sfäriska koordinater)!

Potentialen:

$$V_{\text{dipol}} = \frac{\mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{R}}}{4\pi\epsilon_0 R^2} = \frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 R^2}$$



E-fältet:

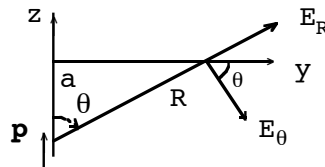
$$E_R = \frac{2p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 R^3} \quad E_\theta = \frac{p \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 R^3}$$

Exempel: En dipol med dipolmomentet $\mathbf{p} = \hat{z}p$ finns i punkten (0, 0, -a) i ett rektangulärt koordinatsystem. Beräkna E på y-axeln!

Använd formlerna för E_R och E_θ ovan ("origo vid dipolen")!

Här är $R = \sqrt{y^2 + a^2}$

$$\cos \theta = a/R, \quad \sin \theta = y/R$$



$$E_y = E_R \sin \theta + E_\theta \cos \theta = \frac{3pa y}{4\pi\epsilon_0 (y^2 + a^2)^{5/2}}$$

$$= = = = = = =$$

$$E_z = E_R \cos \theta - E_\theta \sin \theta = \frac{2pa^2 - py^2}{4\pi\epsilon_0 (y^2 + a^2)^{5/2}}$$

$$= = = = = = =$$

- Dipolmoment och moment av högre ordning ingår i termer, då man t.ex. gör en serieutveckling av potentialen från en laddningsfördelning. Man får en första term där laddningsfördelningen ses som en punktladdning. Nästa term blir en dipolterm o.s.v.

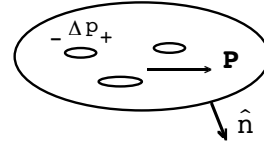
3.2 Polarisation

När ett dielektriskt material – en isolator – utsätts för ett elektriskt fält bildas det dipoler i materialet - materialet blir **polariserat**. Eftersom vi behandlar makroskopisk teori, är vi inte intresserade av varje enskild dipol och dess dipolmoment $\Delta \mathbf{p}$ (litet p).

Vi inför i stället en täthet, **dipolmoment/volymerhet** = **polarisationen** \mathbf{P} (stort P), definierad som

$$\mathbf{P} = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\sum \Delta \mathbf{p}}{\Delta v}$$

polarisationen, $[\mathbf{P}] = \text{As/m}^2$



En liten volym dv får då dipolmomentet $d\mathbf{p} = \mathbf{P}dv$. Dipolerna i materialet ger i sin tur upphov till E-fält och potential. Vi kan räkna med materialets inverkan genom att införa ekvivalenta laddningstätheter, ρ_p och ρ_{ps} , s.k. **polarisationsladdningstätheter**.

$$\rho_p = -\nabla \cdot \mathbf{P}$$

polarisationsvolymladdningstäthet (As/m^3)

$$\rho_{ps} = \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{n}}$$

polarisationsytladdningstäthet (As/m^2)

$\hat{\mathbf{n}}$ ut från materialet

Polarisationsladdningarna kallas för **bundna** laddningar. De är bundna till dipolerna och materialet av starka inre krafter. Jämför **fria** laddningar i metall! I metaller finns ett stort antal fria - löst bundna - ledningselektroner.

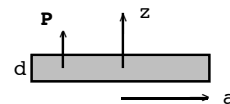
Både **fria** och **bundna** laddningar bidrar till E-fält och potential. Gauss lag för E blir t.ex.

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \frac{1}{\epsilon_0} \int (\rho_f + \rho_p) dv \quad \rho_f + \rho_p = \rho_t \text{ total laddningstäthet}$$

Exempel: En skiva med radien a och tjockleken d har homogen polarisation $\mathbf{P} = \hat{z}P$. Beräkna ρ_p och ρ_{ps} !

$$\rho_p = -\nabla \cdot \mathbf{P} = 0 \quad (\text{homogent} \Rightarrow \mathbf{P} \text{ konstant})$$

$$\rho_{ps} = \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \begin{cases} +P & \text{på ovansidan} \\ -P & \text{på undersidan} \end{cases}$$



Vi får två laddade cirkulära skivor på avståndet d från varandra. Fält från laddad skiva finns t.ex beräknat i kursbokens lösta exempel 3-9; (Ex 3-8 i Lilla Cheng).

3.3 D-fältet

Ett annat sätt att ta hänsyn till det dielektriska materialets inverkan är att införa en ny vektor **förskjutningen** \mathbf{D} , definierad av

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$$

$[\mathbf{D}] = \text{As/m}^2$

Om det är **linjärt** ($\mathbf{P} \sim \mathbf{E}$) kan man skriva

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} = \epsilon_r \epsilon_0 \mathbf{E}$$

där ϵ_r (eller κ) = dieltalet (relativa dielektricitetskonstanten)

ϵ = permittivitet

[Man kan också införa en konstant, **susceptibiliteten** χ_e , genom att sätta

$$\mathbf{P} = \chi_e \epsilon_0 \mathbf{E} = \mathbf{D} - \epsilon_0 \mathbf{E} = (\epsilon_r - 1) \epsilon_0 \mathbf{E} \Rightarrow \chi_e = \epsilon_r - 1$$

grekiska bokstäver κ = kappa och χ = chi]

Gauss lag för \mathbf{D} -fältet blir då

$$\oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} = \int \rho_f dv = \text{innesluten fri laddning}$$

eller $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_f$

Kommentar 1: En fördel med denna formulering av Gauss lag är att vi ofta känner den fria laddningen och kan **beräkna \mathbf{D}** .

Att använda Gauss lag för \mathbf{E} kräver att vi kan beräkna ρ_p och ρ_{ps} , d.v.s. den bundna laddningen. Detta kräver i sin tur att vi känner \mathbf{P} . \mathbf{P} är oftast inte känd utan beror av $\mathbf{E}_{\text{total}}$ som beror av fri laddning (känd) och bunden laddning (okänd).

Kommentar 2: OBS! $\rho_{\text{fri}} = 0$ betyder inte nödvändigtvis att $\mathbf{D} = 0$. Jämför två sfäriska elektretter med olika riktning på polarisationen. (Elektret = permanent polariserat material.) I båda fallen är $\rho_{\text{fri}} = 0$.

I uppgift 3-9 i Exempelsamlingen, en radiellt polariserad sfär, har vi sfärisisk symmetri, vilket medför att $\mathbf{D} = 0$.

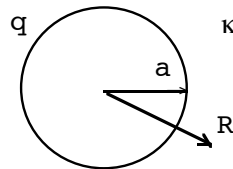
Om sfären däremot är polariserad i x -led har vi ingen symmetri. Således ingen Gauss-symmetri !!!

$\oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} = 0$ med $\mathbf{D} \neq 0$. Se vidare i häftet Ledningar, lösningar... på sidan 10!

Exempel: En metallsfär med radien a har laddningen q . Det omgivande materialet har dielektalet κ . Beräkna \mathbf{E} för $R > a$!

Vi känner den fria laddningen.
dvs q . Gauss lag för \mathbf{D} ger då:

$$\oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} = D(R) 4\pi R^2 = q$$



$$E = \frac{D}{\kappa \epsilon_0} = \frac{q}{4\pi \kappa \epsilon_0 R^2} \quad R > a$$

Viktigt resultat: Formler för **linjära dielektriska material**, d.v.s. för material där dielektalet ϵ_r kan införas, får man genom att **byta ϵ_0 i vakuumformler mot ϵ** . Vi får t.ex. \mathbf{E} för en punktladdning q :

$$E = \frac{q}{4\pi \epsilon_0 R^2} \quad \rightarrow \quad E = \frac{q}{4\pi \epsilon R^2}$$

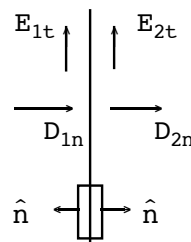
Var försiktig med potentialen! $V = q/4\pi \epsilon R$ förutsätter att man har samma ϵ -material hela vägen till referensen ($V_\infty = 0$) !!!

3.4 Randvillkor

I gränssytan mellan två dielektriska material gäller

$$\begin{aligned} E_{1t} &= E_{2t} \\ D_{2n} - D_{1n} &= \rho_{fs} \end{aligned}$$

om det finns **fri** ytladdningstäthet ρ_{fs} i gränssytan.



\hat{n} ut från Gaussvolymen

Använd Gauss lag för att få rätt tecken i ekvationen! Med referenser enligt figuren är D_{1n} motriktad normalen ut från Gaussvolymen, \hat{n} i material 1, därav minustecknet.

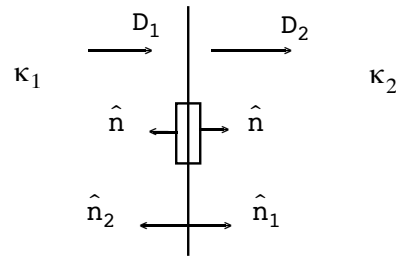
Exempel: Fältvektorerna är vinkelräta mot gränssytan mellan två dielektriska material (dieltal κ_1 resp. κ_2) och $D_1 \neq D_2$. Finns det a/ fri laddning b/ polarisationsladdning i gränssytan?

a/ Gauss lag i gränssytan

$$\oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} = (D_2 - D_1) A = \rho_{\text{fri},s} A$$

(\hat{n} ut från Gaussvolymen)

$$\Rightarrow \rho_{\text{fri},s} = D_2 - D_1$$



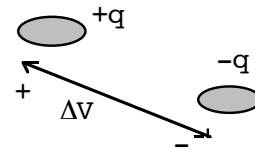
b/ Polarisationsyt-laddningstäthet $\rho_{\text{ps}} = \rho_{\text{ps1}} + \rho_{\text{ps2}} = \mathbf{P}_1 \cdot \hat{n}_1 + \mathbf{P}_2 \cdot \hat{n}_2$
med $\mathbf{P} = (\kappa - 1)\epsilon_0 \mathbf{E}$ och $\mathbf{D} = \kappa\epsilon_0 \mathbf{E}$ och \hat{n} ut från resp. material.

$$\Rightarrow \rho_{\text{ps}} = \frac{\kappa_1 - 1}{\kappa_1} D_1 - \frac{\kappa_2 - 1}{\kappa_2} D_2$$

3.5 Kapacitans

Kondensator: Två ledare med laddning $+q$ resp. $-q$, oberoende av övriga laddningar i systemet. – Avskärmade från eller på stort avstånd från övriga laddningar.

Kapacitans $C = \frac{q}{\Delta V}$ [C] = F (farad)



där ΔV är potentialskillnaden mellan ledarna.

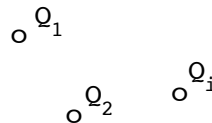
Kapacitansberäkning: Inför $\pm q$ på ledarna, beräkna E , ΔV och C !

Physics Handbook har uttryck för kapacitansen hos plan-, cylindrisk och sfärisk kondensator.

3.6 Elektrostatisk energi och kraft

3.6.1 Elektrostatisk energi för punktladdningar

$$W_e = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N Q_i V_i'$$



där V_i' är potentialen vid Q_i
p.g.a. alla Q utom Q_i själv

OBS! Detta uttryck innehåller inte punktladdningarnas s.k. **egenenergi** d.v.s. energin för att bygga punktladdningar utgående från elementarladdningar ($\pm e$). Den energin blir ju oändlig, eftersom laddningen ska läggas i en matematisk punkt. Vid övriga laddningsfördelningar, formler enligt avsnitt 3.6.2 och 3.6.3 nedan har man inte detta problem. Där ingår egenenergin.

3.6.2 Energi för en laddningsfördelning $\rho(\mathbf{R})$

$$W_e = \frac{1}{2} \int \rho(\mathbf{R}) V(\mathbf{R}) dv$$

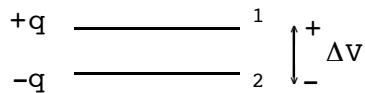
$\rho(\mathbf{R})$

Nackdel: Vi måste beräkna $V(\mathbf{R})$ i laddningsfördelningen.

Fördel: Vid laddade ledare blir energiuttrycket enkelt, eftersom $V = \text{konst}$ på ledare:

$$W_e = \frac{1}{2} \sum V_{\text{ledare}} Q_{\text{ledare}}$$

Exempel: Kondensatorns energi



ΔV är spänningen (potentialskillnaden) över kondensatorn

$$W_{\text{kondensator}} = \frac{1}{2} V_{+q} \cdot (+q) + \frac{1}{2} V_{-q} \cdot (-q) = \frac{1}{2} q \Delta v = \frac{1}{2} C (\Delta V)^2 = \frac{q^2}{2C}$$

= = = = =

3.6.3 Elektrostatisk energi uttryckt med fälten

$$W_e = \frac{1}{2} \int_{V_\infty} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} dv$$

Ska integreras över en volym utsträckt till oändligheten!

3.6.4 Kraft på punktladdning Q i ett elektriskt fält \mathbf{E}

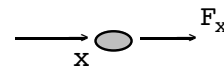
$$\mathbf{F} = Q \mathbf{E}$$

3.6.5 Elektrostatisk kraft på ett föremål

Kraften på ett föremål i ett elektrostatiskt system kan beräknas på två sätt genom en **virtuell** (tänkt) förflyttning:

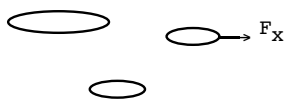
$$F_x = - \left. \frac{\partial W_e}{\partial x} \right|_{Q = \text{konst}}$$

$$F_x = \left. \frac{\partial W_e}{\partial x} \right|_{V = \text{konst}}$$



Härledning:

1/ Antag **nettoladdningarna är konstanta** på metallytorna. Vi har således ett isolerat system utan spänningskällor med q_i konstant och V_i variabel.

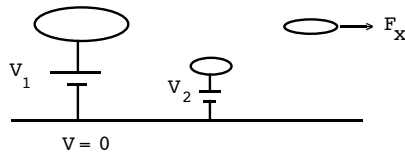


Låt fältkrafterna flytta föremålet sträckan δx . Fältet uträttar då arbetet $\delta A = F_x \delta x$. Energiprincipen ger nu $\delta A + \delta W_e = 0$

δW_e = ändringen i den elektrostatiska energin i systemet. Insättning av δA ger kraften

$$F_x = - \left. \frac{\partial W_e}{\partial x} \right|_{Q = \text{konst}}$$

2/ Antag spänningskällor med spänningar V_i anslutna till metallerna. Vi har således **potentialerna V_i konstanta**.



Energi levererad av spänningskällorna

$$\delta W_{\text{sp.källor}} = \sum V_i \underbrace{i_i \delta t}_{\delta q_i} = \sum V_i \delta q_i$$

Ström $i = dq/dt$ enligt ekv. (1-5) i Cheng.

Den elektrostatiska energin i systemet $W_e = \frac{1}{2} \sum V_i q_i$

och ändringen $\delta W_e = \frac{1}{2} \sum V_i \delta q_i \Rightarrow \delta W_{\text{sp.källor}} = 2 \delta W_e$

Fältet uträttar arbetet $\delta A = F_x \delta x$

Energiprincipen ger nu $\delta A + \delta W_e = \delta W_{\text{sp.källor}} = 2 \delta W_e$

Kraften fås således som

$$F_x = \left. \frac{\partial W_e}{\partial x} \right|_{V = \text{konst}}$$

Viktigt resultat: Kraft per ytenhet på laddad metall i vakuum

$$f = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 = \frac{1}{2} \rho_{fs} E$$

där ρ_{fs} är (den fria) ytladdningstätheten på metallen

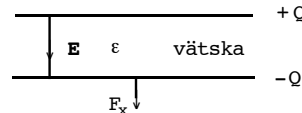
Kraft per ytenhet $f =$ energitäthet w_e utanför metallen (vakuum)

Exempel: Kraft på kondensatorplatta vid fast resp. flytande dielektrikum.

a/ flytande dielektrikum. Beräkningen motsvarar den för vakuum med $\epsilon_0 \rightarrow \epsilon$. Se löst exempel 3-26 i Cheng; (Ex 3-20 i Lilla Cheng)! Resultatet blir

$$F_x = - \frac{1}{2} D E S = - f S$$

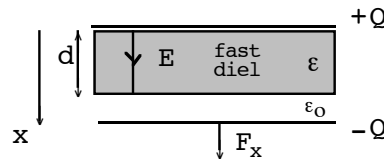
$$S = y t a n$$



Vid **flytande** dielektrikum gäller att kraft/ytenhet $f = w_e$ energitätheten utanför metallen!

b/ fast dielektrikum

Vid förflyttning av det undre belägget kommer inte dielektrikum att fylla hela kondensatorn. Vi får en luftspalt med tjocklek $x-d$.



Kapacitans för kondensatorn (två seriekopplade kapacitanser):

$$\frac{1}{C} = \frac{d}{\epsilon S} + \frac{x-d}{\epsilon_0 S} \quad \text{Energi } W_e = \frac{Q^2}{2C} \quad (\text{vi antar att } Q = \text{konst})$$

$$F_x = - \frac{\partial W_e}{\partial x} = - \frac{Q^2}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{C} \right) = - \frac{Q^2}{2 \epsilon_0 S} = - \frac{D^2 S}{2 \epsilon_0} = - \frac{\epsilon_r D E S}{2}$$

OBS! **Skilnaden** i beräkning vid flytande resp. fast dielektrikum!

3.6.6 Kraft, vridande moment och energi för dipol

Kraft vridande moment och energi för den dipol i ett yttre elektriskt fält E_{yttre} :

$$\mathbf{F} = (\mathbf{p} \cdot \nabla) \mathbf{E}_{yttre} \quad \text{kraft på dipolen}$$

$$\mathbf{T} = \mathbf{p} \times \mathbf{E}_{yttre} \quad \text{vridande moment på dipolen}$$

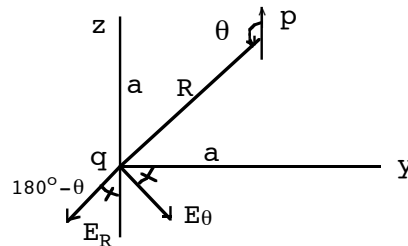
$$W_e = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}_{yttre} \quad \text{energi för dipol i yttre fält}$$

Exempel: En punktladdning q finns i origo och en dipol med dipolmomentet $\mathbf{p} = \hat{z}p$ i punkten $(0,a,a)$ i ett rektangulärt koordinatsystem. Beräkna a/ kraften på q
b/ kraften på dipolen!

a/ $F_q = qE_{vidq} = q E_{dipol}$

E från dipolen:

$$\mathbf{E}_{dipol} = \hat{R} \frac{2p \cos\theta}{4\pi\epsilon_0 R^3} + \hat{\theta} \frac{p \sin\theta}{4\pi\epsilon_0 R^3}$$



Här är $R=a\sqrt{2}$, $\theta = 135^\circ$

$$E_y = -E_R \sin(180^\circ - \theta) + E_\theta \cos(180^\circ - \theta) = \dots = \frac{3p}{16\sqrt{2} \pi\epsilon_0 a^3}$$

$$E_z = -E_R \cos(180^\circ - \theta) - E_\theta \sin(180^\circ - \theta) = \dots = \frac{p}{16\sqrt{2} \pi\epsilon_0 a^3}$$

Kraften på q :

$$\mathbf{F}_q = q(\hat{y} E_y + \hat{z} E_z) = \frac{pq}{16\sqrt{2} \pi\epsilon_0 a^3} [3\hat{y} + \hat{z}]$$

b/ Kraft på dipolen $\mathbf{F}_d = -\mathbf{F}_q$ med \mathbf{F}_q enligt a/.

Alternativ: Kraft på dipol i yttre fält:

$$\mathbf{F}_d = (\mathbf{p} \cdot \nabla) \mathbf{E}_{yttre} \quad \text{Här blir } \mathbf{p} \cdot \nabla = p_z \frac{\partial}{\partial z}$$

Det yttre E-fältet som påverkar dipolen är E-fältet från q i den godtyckliga punkten $(0,y,z)$. Vi ska derivera detta fält, så vi kan inte sätta in dipolens koordinater $(0,a,a)$ än!

$$\mathbf{E}_{yttre} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 (y^2 + z^2)^{3/2}} [\hat{y} y + \hat{z} z]$$

$$\mathbf{F}_d = p_z \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{E}_{yttre} \Big|_{y=z=a} = \dots = -\frac{pq}{16\sqrt{2} \pi\epsilon_0 a^3} [3\hat{y} + \hat{z}] = -\mathbf{F}_q$$

som nyss

Kapitel 4

Lösningsmetoder i elektrostatiken

Lösningsmetoder för elektrostatiske randvärdesproblem:

Poissons och Laplaces ekvation, ∇^2 -operatoren, numerisk lösning, speglingsmetoden

4.1 Poissons och Laplaces ekvationer

Differentialekvationen för potentialen V blir

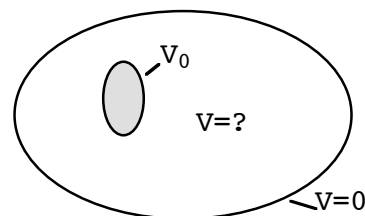
$$\nabla^2 V = -\rho/\epsilon_0 \quad \text{Poissons ekvation, där } \rho \text{ är volym-laddningstätheten.}$$

I laddningsfritt område får man

$$\nabla^2 V = 0 \quad \text{Laplaces ekvation}$$

En vanlig problemställning är, att man känner potentialerna på gränsytorna till ett område och söker potentialen i området däremellan, se fig.!

Att lösa differentialekvationen blir ett matematiskt komplicerat problem. Vissa typer av problem kan dock lösas med den så kallade separationsmetoden. Här ska vi först lösa enkla problem genom att integrera differentialekvationen.



4.2 Laplace-operatorn

∇^2 -operatoren (Laplaces operator, "del2-operatorn") är en beteckning för operationen

$$\text{div}(\text{grad}V) = \nabla \cdot (\nabla V) = \nabla^2 V$$

I rektangulära koordinater får man

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

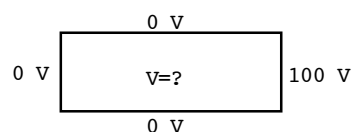
Uttryck för ∇^2 -operatoren i olika koordinatsystem finns i Cheng (insidan av bakre pärmen), i Beta och i Physics Handbook.

4.3 Analytisk lösning av Laplaces och Poissons ekvationer

Se lösta exempel i Cheng: 3-21, 3-22, 3-23!

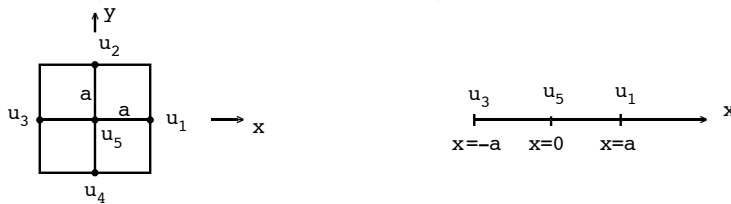
4.4 Numerisk lösning till Laplaces ekvation i två-dimensionella problem

a/ Randvillkoret $V=\text{konst.}$ på randen:
Dirichlets randvillkor



Utnyttja eventuell **symmetri** i problemet och beräkna potentialen i så litet område som möjligt! Lagg in ett kvadratisk rutnät – glesst om du ska räkna för hand.

Härledning av en approximativ lösning till $\nabla^2 V=0$:



Fyra av rutorna i nätet
a = sida i kvadraten

Teckna derivator av V approximativt!

$$\frac{\partial V}{\partial x} (x=a/2) \approx \frac{u_1 - u_5}{a}, \quad \frac{\partial V}{\partial x} (x=-a/2) \approx \frac{u_5 - u_3}{a}$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} (x=0) \approx \frac{\frac{\partial V}{\partial x} (x=a/2) - \frac{\partial V}{\partial x} (x=-a/2)}{a} \approx \frac{u_1 + u_3 - 2u_5}{a^2}$$

På samma sätt får vi

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} (y=0) \approx \frac{u_2 + u_4 - 2u_5}{a^2}. \quad \text{Insättning i } \nabla^2 V=0 \text{ ger nu}$$

$$\frac{u_1 + u_2 + u_3 + u_4 - 4u_5}{a^2} = 0 \Rightarrow \boxed{u_5 = \frac{1}{4} (u_1 + u_2 + u_3 + u_4)}$$

Potentialen i en punkt i rutnätet blir således 1/4 av summan av potentialerna i punkterna närmast t.h., över, t.v. och under punkten.

Iterationsmetoden

0/ Ansätt potentialer $V_1^{(0)}, V_2^{(0)}$ osv. i alla knutpunkter

1/ Beräkna bättre värden på potentialerna i varje knutpunkt genom

$$V_5^{(1)} = \frac{1}{4} [V_2^{(0)} + V_6^{(0)} + V_8^{(0)} + V_4^{(0)}]$$

för punkten 5, se fig!

Skriv dessa värden med annan färg i rutnätet

2/ Fortsätt och räkna följande approximationer på samma sätt! Med dator kan man räkna på ett tätare rutnät och göra fler iterationer.

Matrismetoden

Ansätt potentialer V_1, V_2, \dots i knutpunkterna. Ställ upp ekvationer t.ex.

$V_5 = (V_2 + V_6 + V_8 + V_4) / 4$ för alla okända potentialer.

Symmetri minskar antalet ekvationer!

Lös ekvationssystemet! Använd matriser, om du har en kalkylator som kan hantera matriser.

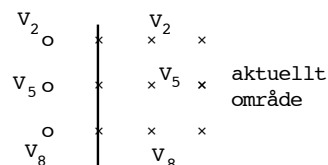
Se uppgift 5-2 i Exempelsamlingen!

b/ Randvillkoret $\frac{\partial V}{\partial n} = 0$, (dvs E// gränssytan):

Neumanns randvillkor

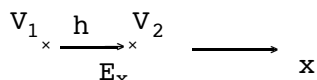
Gäller vid gräns mellan ledande och icke-ledande material

Öka ut rutnätet med en rad punkter utanför randen med samma potential som i punkten närmast innanför, i normalens riktning!



Se t.ex. uppgift 6-20 i Exempelsamlingen!

När man känner V kan man beräkna **E-fältet** approximativt

$$\boxed{E_x = \frac{V_1 - V_2}{h}}$$


I datorprogram betecknas **randvillkoren** med **Dirichlet**: V givet på randen, resp. **Neumann**: $\partial V/\partial n$ givet på randen!

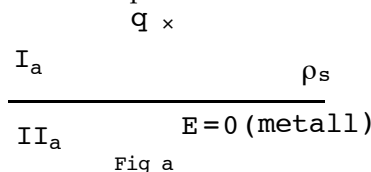
4.5 Speglingsmetoden

Beräkning av E-fält och potential i vissa typer av problem, när laddningsfördelningen på metallytor inte är känd.

4.5.1 Spegling i metallplan

Exempel: En punktladdning q finns nära ett stort jordat metallplan. Beräkna E!

Vi känner q, men inte den inducerade laddningsfördelningen ρ_s på metallplanet. Vi kan inte beräkna E med tidigare metoder.



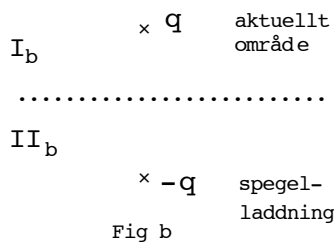
Speglingsmetoden: Vi ersätter laddningsfördelningen ρ_s på metallytan med fiktiva s.k. **spegelladdningar innanför** ytan. Spegelladdningarna ska ge samma fält- och potentialbidrag i **aktuellt område**, som den verkliga fördelningen ρ_s ger i aktuellt område. Se figur b! Enligt entydighetssatsen är den funna lösningen den rätta!

Entydighetssatsen: En lösning till Poissons/Laplaces ekv. som uppfyller randvillkoren är den enda möjliga. - Bevisas i Cheng: Field and wave electromagnetics.

Exemplet ovan:

Spegelladdningen -q ersätter inverkan av metallplanet, när vi räknar fält och potential i område I = **aktuellt område**

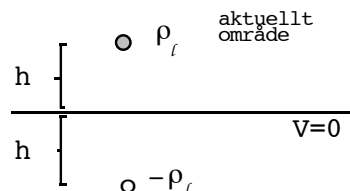
I område II är problemen **inte** ekvivalenta



Se också löst exempel 3-24 i Cheng!

Exempel: En lång rak metalltråd med radien a och laddningen ρ_l per längdenhet befinner sig på höjden h över ett stort jordat metallplan, $a \ll h$. Bestäm trådens potential och dess kapacitans till jord!

Spegla linjeladdningen i planet!
Spegelladdningen $-\rho_l$ ersätter inverkan av metallplanet.



Potential från två linjeladdningar $\pm \rho_l$: $V = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r^-}{r^+}$

Speciellt på trådens yta: $V_{\text{tråd}} = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{2h}{a}$

= = = = =

Kapacitans mellan tråd och jord:

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{\rho_l \ell}{V_{\text{tråd}} - V_{\text{jord}}} = \frac{2\pi\epsilon_0 \ell}{\ln(2h/a)}$$

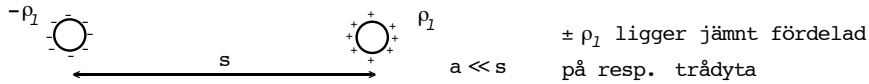
= = = = =

4.5.2 Spegling i metallcylindrar

Inledning

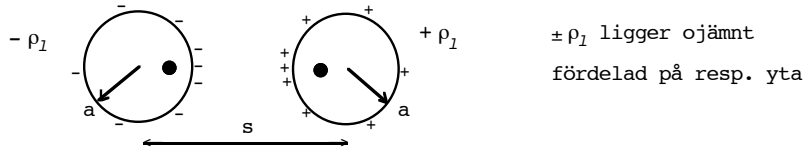
Jämför dessa båda fall med cylindergeometri:

1. Två tunna metalltrådar med radie a , avstånd s och laddning $\pm\rho_\ell$:



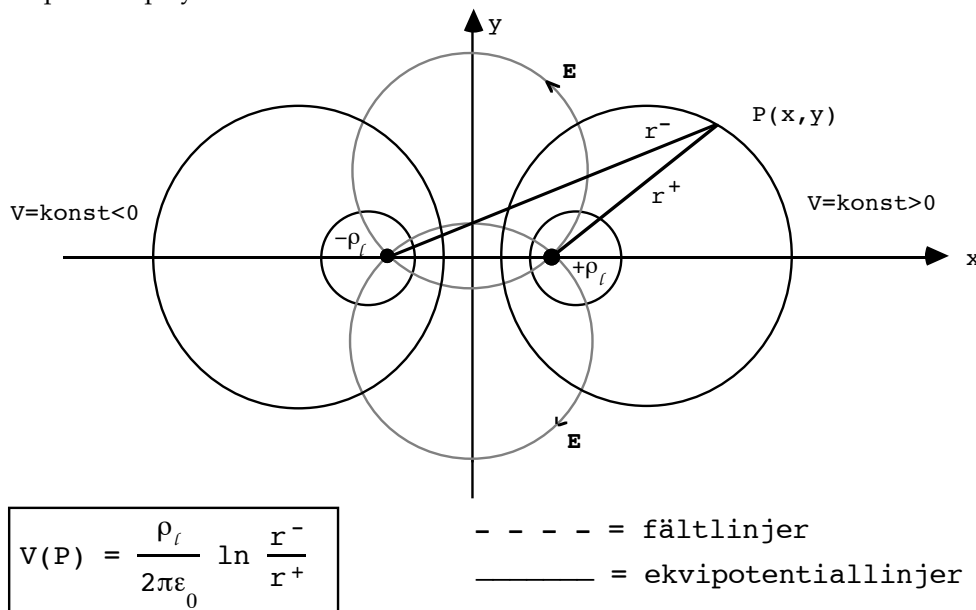
Vi har räknat med **tänkta** laddningar $\pm\rho_\ell$ på cylinderaxlarna

2. Två **tjocka** metallcylindrar med radie a , axelavstånd s och laddning $\pm\rho_\ell$:



Man kan visa att det går att räkna med **tänkta** linjeladdningar = **spegelladdningar** $\pm\rho_\ell$ på avståndet b resp. d från cylinderaxlarna, $a^2 = bd$. Se närmare beskrivning nedan!

Cylinderspegling: Studera potentialen från två linjeladdningar $\pm\rho_\ell$ på x -axeln! Ekvipotentialytorna blir cylindrar med medelpunkterna på x -axeln, se fig.! Fältlinjerna är cirklar med medelpunkter på y -axeln.



Där $V=\text{konst}$ kan vi också ha tunn metall utan att fältbilden ändras utanför (eller innanför) metallytan.

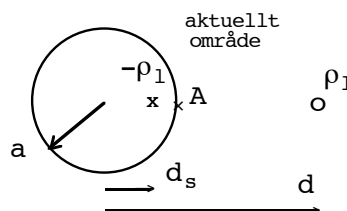
Med hjälp av de **två linjeladdningarna** $\pm\rho_\ell$ kan vi därför lösa olika problem med cylindergeometri och metall t.ex.

- 1/ Linjeladdning ρ_ℓ **utanför** metallcylinder, på avståndet d från cylinderaxeln. Cylindern har laddningen $-\rho_\ell$; **aktuellt område** utanför cylindern.

Ersätt cylindern med spegelladdningen $-\rho_\ell$ i cylindern vid beräkning av fält och potential utanför cylindern.

Samband

$$a^2 = d_s d$$



Potentialen på cylindern med radien a blir

$$V_a = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{a-d_s}{d-a} = \dots = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{a}{d} = - \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{d}{a} < 0$$

tecknad i punkten A (cylindern omsluter $-\rho_l$)

Generellt kan vi skriva potentialen på cylindern som omsluter en laddning $+\rho_l$ som

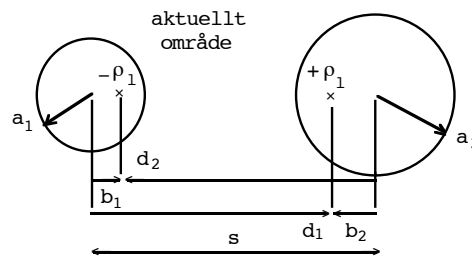
$$V_{\text{cyl}} = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{d}{a} \quad \text{där } d > a$$

2/ Mer komplicerade fall: Två metallcylindrar med given potentialskillnad: **aktuellt område** mellan cylindrarna.

Ersätt cylindrarna med spegelladdningar $\pm \rho_1$ vid beräkning av fält och potential **mellan** cylindrarna.

Beteckna avstånden enligt figuren!

b_1 och d_1 är avstånd från axeln i cylinder 1, osv. Vi får följande samband:



$$b_1 d_1 = a_1^2 \quad (1)$$

$$b_2 d_2 = a_2^2 \quad (2)$$

$$b_1 + d_2 = b_2 + d_1 = s \quad (3), (4) \quad \text{ur fig, } s = \text{axelavståndet}$$

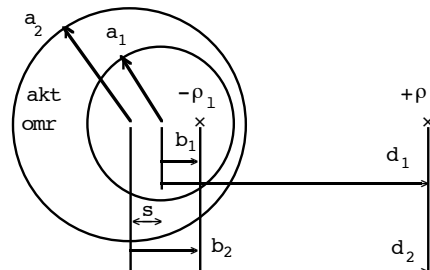
eller när cylinder 2 omsluter 1:

$$b_1 d_1 = a_1^2 \quad (5)$$

$$b_2 d_2 = a_2^2 \quad (6)$$

$$b_2 - b_1 = d_2 - d_1 = s \quad (7) (8)$$

ur fig, $s = \text{axelavståndet}$



b och d är avstånden från medelpunkten – i den cylinder vi speglar i – till respektive laddning. a är cylinderns radie och s axelavståndet.

Potentialskillnaden när cylindrarna inte omsluter varandra:

$$V_2 - V_1 = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{d_1 d_2}{a_1 a_2} > 0 \quad (\text{ty } 2 \text{ omsluter } +\rho_l) \quad (9)$$

Lös ut produkten $d_1 d_2$ ur ekv. (1) - (4) genom att multiplicera (3) med (4) och eliminera b_1 och b_2 .

$$\Rightarrow \frac{d_1 d_2}{a_1 a_2} = \frac{1}{2 a_1 a_2} \left[s^2 - a_1^2 - a_2^2 + \sqrt{(s^2 - a_1^2 - a_2^2)^2 - 4 a_1^2 a_2^2} \right] \quad (10)$$

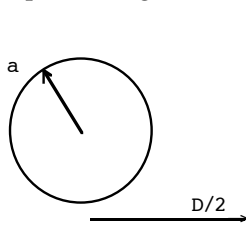
När cylinder 2 omsluter 1:

$$V_2 - V_1 = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{a_2 d_1}{a_1 d_2} > 0 \quad (\text{ty cylindrarna omsluter } -\rho_l) \quad (11)$$

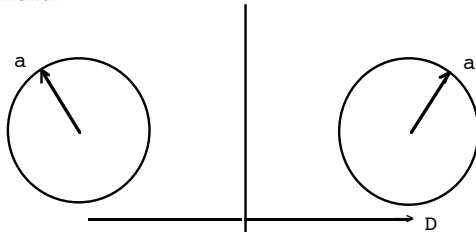
Ekv. (5) - (8) löses analogt m.a.p. (d_1/d_2).

$$\Rightarrow \frac{a_2 d_1}{a_1 d_2} = \frac{1}{2 a_1 a_2} \left[a_1^2 + a_2^2 - s^2 + \sqrt{(a_1^2 + a_2^2 - s^2)^2 - 4 a_1^2 a_2^2} \right] \quad (12)$$

Exempel 1: Beräkna kapacitansen mellan en metallcylinder, radie a och längd ℓ , och ett stort metallplan, se fig.!



Lösning: Jämför löst exempel 3-25 i Cheng: Två tjocka metallcylindrar på avståndet D från varandra.



Vi har precis halva fältbilden i vårt fall! Två lika seriekopplade kapacitanser C ska ge C_{Cheng} :
 $1/C + 1/C = 1/C_{\text{Cheng}}$, där

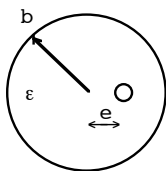
$$C_{\text{Cheng}} = \frac{\pi \epsilon_0 \ell}{\ln[(D/2a) + \sqrt{(D/2a)^2 - 1}]}$$

Man kan också använda ekv.(9) och (10) på föregående sida och sätta $a_1 = a_2$, $d_1 = d_2$. Tar dock tid att förenkla! -

Exempel 2: I en lång kabel med längden ℓ ligger den **tunna** innerledaren förskjuten sträckan e från axeln i ytterledaren, se fig.! Innerledaren har radien a och ytterledaren radien b ($a \ll b$). Mellan dem finns ett isolerande material med permittiviteten ϵ . Lägg $\pm \rho \ell$ på ledarna!

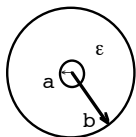
a/ Beräkna ett approximativt uttryck för kapacitansen mellan ledarna genom att anta $e=0$! Beräkna också kraften mellan dem!

b/ Antag nu $e \neq 0$. Gör en exakt beräkning av kapacitansen och kraften! Använd cylinder-spegling, men antag fortfarande $a \ll b$!



Lösning:

a/ Approximativt, antag $e=0$:

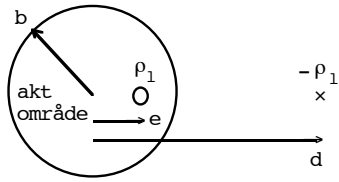


Vi får en cylinderkondensator med innerradien a och ytterradiena b . Kapacitansen blir enligt Cheng eller Physics Handbook:

$$C = \frac{2\pi \epsilon \ell}{\ln(b/a)}$$

Eftersom innerledaren ligger symmetriskt i kabeln, blir kraften mellan ledarna $F=0$.

b/ Antag $+\rho_\ell$ på innerledaren med radien a och $-\rho_\ell$ på ytterledaren! Innerledaren är tunn så laddningsfördelningen blir jämn på ledarens yta. Vi kan då tänka oss ρ_ℓ koncentrerad till axeln i innerledaren. Eftersom $+\rho_\ell$ inte längre ligger centrerad i kabeln får vi en ojämn laddningsfördelning på insidan av ytterledaren. Spegla därför ut $+\rho_\ell$! Blir $-\rho_\ell$ på avståndet $d = b^2/e$.



Teckna nu potentialen på innerledaren resp. ytterledaren, båda i aktuellt område!

Tecknade på ytan av resp. ledare med uttrycket $\ln(r^-/r^+)$.

$$V_{\text{inner}} = \frac{\rho_\ell}{2\pi\epsilon} \ln \frac{d-e}{a} ; \quad V_{\text{ytter}} = \frac{\rho_\ell}{2\pi\epsilon} \ln \frac{d-b}{b-e}$$

$$C = \frac{\rho_\ell \ell}{V_{\text{inner}} - V_{\text{ytter}}} = \frac{2\pi\epsilon \ell}{\ln \frac{b^2 - e^2}{ab}}$$

Om vi låter $e \rightarrow 0$ får vi samma resultat som i a/.

Kraften: Vi får rätt E-fält i aktuellt område med hjälp av $+\rho_\ell$ och spegelladdningen $-\rho_\ell$. Vi kan därför teckna kraften på innerledaren som kraften mellan $\pm\rho_\ell$ på avståndet $d-e$.

$$\mathbf{F}_{\text{inner}} = \hat{\mathbf{r}} \rho_\ell \ell \frac{\rho_\ell}{2\pi\epsilon(d-e)} = \hat{\mathbf{r}} \frac{\rho_\ell^2 \ell e}{2\pi\epsilon(b^2 - e^2)}$$

$e \rightarrow 0 \Rightarrow F=0$ som i a/.

Kapitel 5

Stationär strömning

Hittills har vi studerat laddning i vila. Laddning i rörelse, ström $i = dQ/dt$. I detta kapitel behandlas strömtäthet, resistans, spegling, randvillkor och resistansberäkning. Vi studerar huvudsakligen **ledningsström** i stationärtillståndet (steady state). Strömmen är då konstant i tiden – likström.

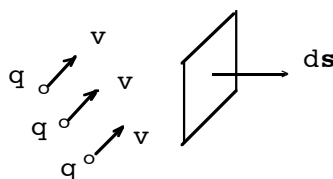
Ledningsström (conduction current): drifrörelse av laddning, t.ex. elektroner i metall. — **elektrostatiskt neutralt**

Konvektionsström (convection current): masstransport, t.ex. av elektroner i vakuum i ett elektronrör — **ej elektrostatiskt neutralt**.

5.1 Strömtäthet

Antag att vi har N st laddningsbärare/volymenthet med laddningen q och hastigheten v .

Definition av **strömtäthet** \mathbf{J}



$$\mathbf{J} = \sum N_i q_i \mathbf{v}_i$$

$$[\mathbf{J}] = \text{A/m}^2$$

$$\mathbf{J} = \rho \mathbf{v}$$

för ett slags laddningsbärare
 $\rho = \text{volymladdningstäthet}$

summerat för elektroner,
joner, hål

Ström genom yta $i = \int \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s}$

Ledande material

Det som driver strömmen i en ledare är ett elektriskt fält i ledaren.

I elektrostatiken hade vi $E=0$ i ledare.

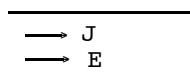
Samband mellan strömtäthet och elektrisk fältstyrka för **ledningsström**:

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$$

Ohms lag,

där $\sigma = \text{konduktiviteten}$

$$[\sigma] = \text{A/Vm} = \text{S/m (siemens/m)}$$



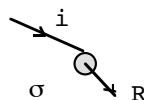
E-fält och potential från strömelektroder:

Strömmen ledes till elektroden och flyter sedan ut i materialet med konduktiviteten σ .

Sfärisk elektrod:

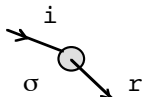
$$E_R = \frac{i}{4\pi\sigma R^2}$$

$$V = \frac{i}{4\pi\sigma R} \quad (V_\infty = 0)$$



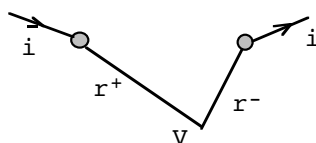
E-fält från en linjeelektrod med längden ℓ vinkelrät mot papperets plan:

$$E_r = \frac{i}{2\pi\sigma r}$$



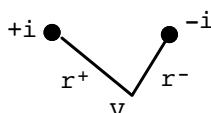
Potential från två linjeelektroder enligt figuren:

$$V = \frac{i}{2\pi\sigma\ell} \ln \frac{r^-}{r^+}$$



Jämför motsvarande uttryck i elektrostatiken!

I analogi med beteckningen $\pm q$ kan vi skriva $\pm i$ på elektroderna

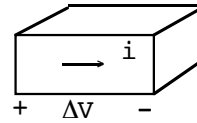


5.2 Resistans

Definition av **resistans**:

$$R = \frac{\Delta V}{i}$$

$$[R] = V/A = \Omega$$



Resistansberäkning är analog med kapacitansberäkning: Lägg spänning mellan elektroderna \Rightarrow ström i . Beräkna J , E , ΔV och slutligen $R = \Delta V/i$.

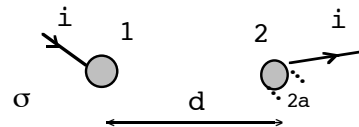
Analogin mellan resistans- och kapacitansberäkning ger vid **samma geometri**

$$RC = \epsilon/\sigma \quad \text{föruddatt att fältbilden är lika i de båda fallen! Se avsnitt 4-6 i Cheng!}$$

Man får enkelt resistansen, om man redan har beräknat kapacitansen för en viss geometri på elektroderna.

Exempel: Två små metallkuler med radien a finns på avståndet d från varandra i ett material med konduktiviteten σ . Beräkna resistansen mellan kulorna, $d \gg a$!

Låt strömmen i flyta i materialet från elektrod 1 till elektrod 2



För en sfärisk elektrod är strömtätheten J riktad radiellt ut. Lägg en integrationsfär med radien R runt elektroderna och integrera!

$$i = \int \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} = J 4\pi R^2 \Rightarrow J = \frac{i}{4\pi R^2} \quad \text{och} \quad E = \frac{J}{\sigma} = \frac{i}{4\pi\sigma R^2}$$

och potentialen från en elektrod

$$V(R) - V_{\infty} = \int_R^{\infty} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \frac{i}{4\pi\sigma R}$$

I vårt problem får vi nu potentialen på kula 1 genom superposition av potentialen från $+i$ på kula 1 och $-i$ på kula 2:

$$V_1 = \frac{i}{4\pi\sigma a} - \frac{i}{4\pi\sigma d} = -V_2 \Rightarrow R = \frac{V_1 - V_2}{i} = \frac{1}{2\pi\sigma} \left[\frac{1}{a} - \frac{1}{d} \right]$$

Symmetri ger att $V_2 = -V_1$!

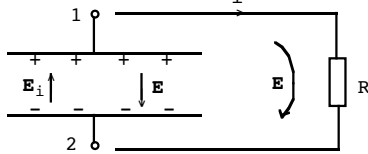
5.3 Spänningskällor

En **stationär** ström består av laddningar som rör sig med konstant medelhastighet. Den stationära strömmen flyter i en sluten krets (väg). Om vägen inte är sluten skulle laddning ackumuleras någonstans. Dessa ackumulerade laddningar skulle ge ett växande elektriskt fält som ändrar strömmen. Då är det inte längre någon stationär ström.

Ett **elektrostatiskt** fält kan inte tillföra energi till en laddning q som rör sig i en sluten krets, eftersom $W_{\text{tillf}} = q \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$, ty $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$ för det elektrostatiska fältet. $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ för elektrostatiska fält. Kallas också konservativt fält

För att en **stationär** ström ska flyta i en ledare behövs något som driver strömmen – ett E -fält från en **spänningskälla**. Ledaren blir också varm, därför att elektroner kolliderar och energi förloras. Eller också vill man använda energi till någon belastning, t.ex. en motor. Denna energi måste komma någonstans ifrån – från en spänningskälla. Spänningskällan kan t.ex. utgöras av ett batteri, en generator, en solcell.

Icke-elektriska krafter, t.ex. kemiska i ett batteri, kan representeras av ett (icke-konservativt) elektriskt fält \mathbf{E}_i inne i spänningskällan. Index i står för **impressed** = påtryckt. Spänningskällans spänning (=emk = elektromotoriska kraft) definieras av $\mathcal{V} = \int_2^1 \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{l}$, se figur 1! Laddningarna + och - i spänningskällan ger ett elektrostatiskt fält \mathbf{E} både utanför och inne i källan.



Figur 1 En spänningskälla. Öppen krets som kan slutas via R.

Om kretsen är **öppen** flyter ingen ström i kretsen eller genom källan. Då måste $\mathbf{E}_i + \mathbf{E} = 0$ och $\mathcal{V} = \int_2^1 \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{l} = -\int_2^1 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_1^2 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = V_1 - V_2 =$ potentialskillnaden mellan polerna i batteriet. Detta gäller för en obelastad spänningskälla eller för en belastad **ideal** spänningskälla, d.v.s. utan inre förluster.

När man **sluter** kretsen med en resistans mellan 1 och 2 kommer en ström att flyta runt i kretsen. Processer i batteriet upprätthåller fältet \mathbf{E}_i . Samband mellan spänning och ström i kretsen i detta fall behandlas i nästa avsnitt.

5.4 Kirchhoffs spänningslag

Antag att kretsen i figur 1 är sluten så att strömmen i flyter i resistansen och genom källan. Spänningskällan antas ha inre förluster. I källan får vi nu en strömstäthet $\mathbf{J}_i = \sigma_i(\mathbf{E} + \mathbf{E}_i)$ i källan och $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$ utanför. — \mathbf{E}_i finns bara i källan.

Vi kan nu införa en inre resistans R_i i källan genom $\int_2^1 \text{via källan} (\mathbf{E} + \mathbf{E}_i) \cdot d\mathbf{l} = \mathbf{J}_i \ell_i / \sigma_i = i \ell_i / \sigma_i S_i = R_i i$ (1)

På motsvarande sätt får vi för integralen av \mathbf{E} genom R:

$$\int_1^2 \text{utanför} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \mathbf{J} \ell / \sigma = i \ell / \sigma S = R_i i$$
 (2)

Vi har antagit homogent fält i källan: längd ℓ_i , tvärsnittsytta S_i och konduktivitet σ_i och motsvarande för resistansen R. Ledningarna från 1 och 2 till R antas ideala, d.v.s. förlustfria.

$$\text{Teckna nu } \oint (\mathbf{E} + \mathbf{E}_i) \cdot d\mathbf{l} = \underbrace{\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}}_{=0} + \oint \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{l} = \int_2^1 \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{l} = \mathcal{V}$$
 (3)

Men den slutna linjeintegralen i VL i ekv. (3) kan skrivas

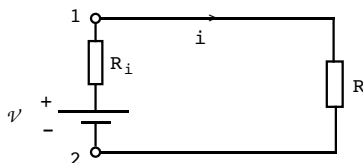
$$\int_2^1 \text{via källan} (\mathbf{E} + \mathbf{E}_i) \cdot d\mathbf{l} + \int_1^2 \text{utanför} (\mathbf{E} + \underbrace{\mathbf{E}_i}_{=0}) \cdot d\mathbf{l} = R_i i + R_i i = \mathcal{V}$$

med användande av ekv. (1), (2) och (3). Vi får nu

$$\boxed{\mathcal{V} = R_i i + R_i i \quad \text{Kirchhoffs spänningslag}}$$

I kretstekniken skriver man ofta lagen som $-\mathcal{V} + R_i i + R_i i = 0$.

Vi kan rita den ekvivalenta kretsen i figur 2.



Figur 2 Ekvivalent krets för spänningskälla (med inre resistans) mellan punkterna 1 och 2, ansluten till en resistans R.

5.5 Kontinuitetsekvationen. Kirchhoffs strömlag

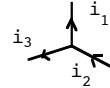
Laddningen är oförstörbar. Det kan uttryckas så här: Om ström flyter ut från en volym måste laddningen i volymen ha minskat. Som ekvation: $i = \oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} = -\frac{d}{dt} \int_V \rho dv$ eller med med divergensteoremet $\int_V \nabla \cdot \mathbf{J} dv = -\int \frac{\partial \rho}{\partial t} dv$. Detta uttryck ska gälla för alla volymer, d.v.s.

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad \text{kontinuitetsekvationen}$$

För **stationära** strömmar är $\partial \rho / \partial t = 0$ och $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$ eller i integralform $\oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} = 0$ (1). Tillämpa nu ekv. (1) i en knutpunkt i ett nät.

$$\sum_k i_k = 0 \quad \text{Kirchhoffs strömlag}$$

Summan av alla strömmar som flyter ut från en knutpunkt är noll: $i_1 - i_2 + i_3 = 0$ i figuren t.h.



5.6 Effektutveckling. Joules lag

$$P = \int \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} dv \quad \left(= \frac{dW}{dt}, W = \text{energi} \right) \quad \text{Joules lag}$$

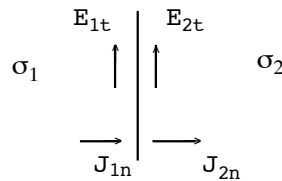
$$[P] = W \text{ (watt)}$$

5.7 Randvillkor

Vid gränsytan mellan två material med olika σ gäller:

$$E_{1t} = E_{2t}$$

$$J_{1n} = J_{2n}$$

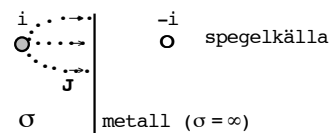


5.8 Spegling

Speglingsmetoden fungerar som i elektrostatiken vad gäller metallytor, $\sigma = \infty$. I fråga om strömning tillkommer spegling i isolerande gränsyta, $\sigma = 0$.

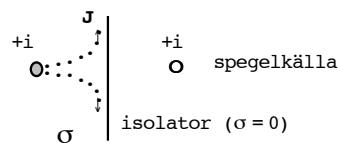
Spegling i **metall** — mycket gott ledande yta:

motsatt riktning på strömmen
i spegelbilden (motsatt tecken
på spegelladdningen i elstatiken)
strömlinjer \perp gränsyta till metall
ledningsförmåga σ i hela rummet



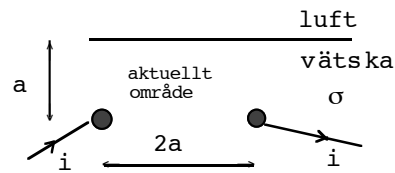
Spegling i **isolerande** yta:

samma riktning på strömmen
i spegelbilden (ingen mot-
svarighet i elektrostatiken)
strömlinjer \parallel gränsyta till isolator
 σ i hela rummet



Exempel: Beräkna resistansen mellan två långa metalltrådar (radie b , längd l) i en vätska med ledningsförmågan σ . Trådarna finns på djupet a under vätskeytan, $b \ll a$.

Låt strömmen i flyta mellan elektroderna. Spegla i isolerande yta - samma riktning (tecken) på strömmen i spegelbilden -.

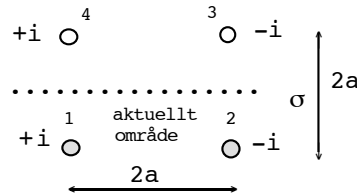


Potential på tråd 1

$$V_1 = \frac{i}{2\pi\sigma l} \ln \frac{2a}{b} + \frac{i}{2\pi\sigma l} \ln \frac{2\sqrt{2}a}{2a} =$$

1 och 2 3 och 4

$$= -V_2$$



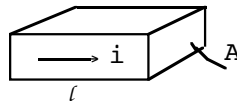
$$\text{Resistansen } R = \frac{V_1 - V_2}{i} = \frac{1}{\pi\sigma l} \ln \frac{2\sqrt{2}a}{b}$$

5.9 Resistansberäkning direkt

A. Exakt beräkning

1/ Homogen strömfördelning

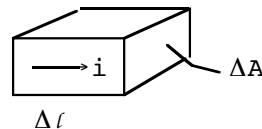
$$R = \frac{l}{\sigma A}$$



2/ Inhomogen strömfördelning (exakt beräkning)

Metod: Välj ett litet volymelement, se fig., med längden Δl i strömmens riktning och ytan $\Delta A \perp$ strömmen. Räkna med homogen strömfördelning i det lilla volymelementet. Detta är möjligt i de fall då vi matematiskt kan beskriva strömlinjer och ekvipotentialytor i en godtycklig punkt i kroppen.

$$\Delta R = \frac{\Delta l}{\sigma \Delta A} = \frac{1}{\Delta G}$$



ΔR resistans, ΔG konduktans för elementet

Övergå till differentiella storheter och integrera!

element i serie:

$$R_{\text{serie}} = \int dR$$

element parallellt:

$$G_{\text{parallell}} = \int dG$$

B. Approximativ resistansberäkning

Inhomogen strömfördelning. Om man inte kan göra en exakt beräkning av resistansen kan man i stället beräkna en **övre och en undre gräns** för den verkliga resistansen R :

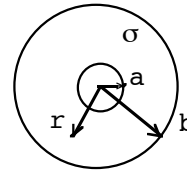
Ansats 1: Annan strömfördelning än den verkliga. Strömmen tvingas i andra banor, genom tunna skikt med $R=\infty$, på sådant sätt att vi enkelt kan beräkna resistansen analytiskt. Denna resistans blir dock för stor, d.v.s. vi har fått en **övre gräns** $R_{\text{övre}}$.

Ansats 2: Andra ekvipotentialytor än de verkliga. Vi tvingar fram nya ekvipotentialytor genom tunna skikt med $R=0$, så att vi enkelt kan beräkna resistansen. Denna resistans blir dock för liten, d.v.s. vi har fått en **undre gräns** R_{undre} .

En ökning av konduktiviteten σ i någon del av en ledare medför en minskning av ledarens totala resistans – och omvänt!

Exempel 1: Beräkna resistansen mellan metallsfärerna med radierna a resp. b genom att integrera $R_{cell} = \Delta\ell / \sigma \Delta A$!

Strömmen flyter radiellt.
 Ekvipotentialytorna är sfärer.
 Välj därför volymelementet:
 ett sfäriskt skal med radien r
 och tjockleken dr
 Längd i strömmens riktning $d\ell = dr$,
 yta \perp strömmen $4\pi r^2$

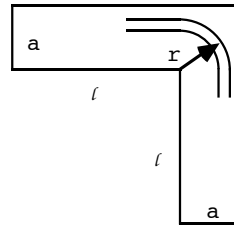


Resistans för volymelementet $dR = \frac{dr}{\sigma 4\pi r^2}$

Element i serie $R = \int_a^b \frac{dr}{\sigma 4\pi r^2} = \frac{1}{4\pi\sigma} \left[\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right]$

Exempel 2: Beräkna en övre och en undre gräns till resistansen för ledaren enligt figuren! Tvärsnittsytan är kvadratisk.

a/ Övre gräns: antag en annan strömfördelning än den verkliga, t.ex. kvartscirkelbågar i hörnet. Elementets längd är $\ell + r\pi/2$, dess bredd dr och yta $a dr$.

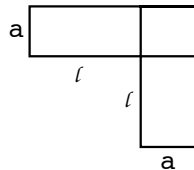


Konduktansen för elementet $dG = \frac{\sigma a dr}{2\ell + r\pi/2}$, parallella element

$G = \int_0^a \frac{\sigma a dr}{2\ell + r\pi/2} = \frac{2\sigma a}{\pi} \ln \left[1 + \frac{\pi a}{4\ell} \right] = \frac{1}{R_{\text{övre}}}$

b/ Undre gräns. Välj en annan potentialfördelning än den verkliga. Låt t.ex. hörnet vara oändligt gott ledande.

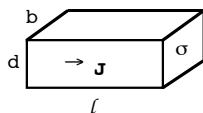
$R = 2 \frac{\ell}{\sigma a^2} = R_{\text{undre}}$



Kommentar: Andra approximationer av strömfördelningen resp. ekvipotentialytorna ger något annorlunda övre och undre gräns.

5.10 Ytströmtäthet, ytresistans

För ett räblock med längden ℓ , bredden b och tjockleken d får vi strömtäthet och resistans som

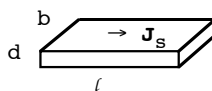


homogen strömfördelning
 ström $i = \int \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} = Jbd$
 \Rightarrow strömtäthet $J = \frac{i}{bd}$ (A/m²)

Resistans $R = \frac{\ell}{\sigma bd}$

b, d \perp strömmen

Om tjockleken $d \rightarrow 0$:



$d \rightarrow 0 \Rightarrow$ strömmen flyter på en yta \Rightarrow **ytströmtäthet** J_s

$i = \int \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} = J_s b \Rightarrow J_s = \frac{i}{b}$ (A/m)

Resistans $R = s \frac{\ell}{b}$ b = enda dimension \perp i

s = **ytresistans (ytresistivitet)**, [s] = Ω

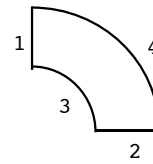
Jämför de båda uttrycken för R! Samband $s = 1/\sigma d$!

5.11 Tvådimensionell strömning

Den tunna skivan enl.fig. har ytresistiviteten s (eller tjockleken d och konduktiviteten σ).

R_{12} = resistans mellan ytorna 1 och 2

R_{34} = resistans mellan ytorna 3 och 4



Vid tvådimensionell strömning gäller detta samband:

$$R_{12} R_{34} = s^2 = \frac{1}{(\sigma d)^2}$$

Fältlinjer och v -konst-linjer (\perp mot varandra) är ombytta i det andra fallet.

5.12 Numerisk resistansberäkning

Numerisk beräkning av resistans sker på samma sätt som numerisk beräkning av kapacitans. Se t.ex. uppgift 5-1 i Exempelsamlingen!

I fallet resistansberäkning har man ett ibland ett randvillkor $\partial V / \partial n = 0$ på randen.

– Strömmen flyter parallellt med randen vid gränsyta till isolerande material. Hur man ansätter potentialer i detta fall har behandlats tidigare, se s. 22!

I uppgift 6-19 och 6-20 i Exempelsamlingen har man detta s.k. Neumann-randvillkor.

Kapitel 6

Magnetostatik i vakuum

Magnetostatik = magnetfält från likströmmar. – Fälten ändras ej i tiden.

I detta kapitel behandlar vi bl.a. Lorentzkraft, Amperes lag, vektorpotential, Biot-Savarts lag

6.1 Lorentzkraft

På laddningen q med hastigheten \mathbf{v} i magnetfältet \mathbf{B} verkar den magnetiska kraften $\mathbf{F}_m = q(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$.

Vi kan definiera \mathbf{B} -fältet med hjälp av kraften på en liten testladdning $\mathbf{F}_m/q = \mathbf{v} \times \mathbf{B}$, i analogi med vår definition av \mathbf{E} -fältet i avsnitt 2.3 på s. 6.

Med både elektriskt och magnetiskt fält får vi kraften på q

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad \text{Lorentzkraften}$$

$$[\mathbf{B}] = \text{Vs/m}^2 = \text{Wb(weber) / m}^2 = \text{T (tesla)}$$

Partikelrörelse

Exempel 1: Laddade partiklar, alla med laddning q , men med olika hastigheter $\mathbf{v} = \hat{y}v_0$, kommer in i ett område med \mathbf{E} - och \mathbf{B} -fält enligt figuren. Vilken hastighet har de partiklar, som fortsätter i y -riktningen och går igenom hålet i skärmen?

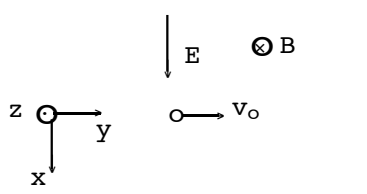
Lösning:

Laddningarna påverkas
den elektriska kraften

$$\mathbf{F}_e = q\mathbf{E} = \hat{x}qE$$

De laddningar som har
hastighet endast i y -led
påverkas av

$$\mathbf{F}_m = q(v_0 \hat{y} \times \mathbf{B}) = -\hat{x} qv_0 B$$

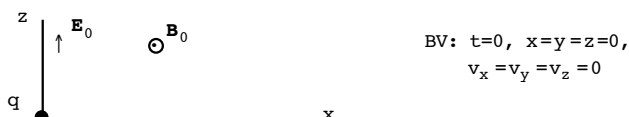


Om banan ska vara oförändrad måste $\mathbf{F}_e + \mathbf{F}_m = 0$, d.v.s. $v_0 = E/B$

Kommentar: Rörelse i enbart \mathbf{B} -fält ger kraft $\mathbf{F}_m = q \mathbf{v} \times \mathbf{B}$, vinkelrätt mot både \mathbf{B} -fält och partikelbana, vilket medför att $|\mathbf{v}|$, farten, är konstant.

En rörelse i \mathbf{E} -fält ger kraft på partikeln i banans riktning och tillskott i rörelseenergin, vilket används för att accelerera laddade partiklar.

Exempel 2: En partikel (massa m , laddning q) befinner sig i vila i origo vid $t=0$ i statiska \mathbf{E} - och \mathbf{B} -fält, se fig.! Bestäm partikelns bana och maximala avstånd till x -axeln!



Rörelseekvationen blir

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) = q \left[\hat{z} E_0 + \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ v_x & v_y & v_z \\ 0 & -B_0 & 0 \end{vmatrix} \right] \quad \text{Dela upp i komponenter!}$$

$$\hat{x}: m \frac{dv_x}{dt} = qv_z B_0 ; \quad \hat{y}: m \frac{dv_y}{dt} = 0 ; \quad \hat{z}: m \frac{dv_z}{dt} = q(E_0 - v_x B_0)$$

Inför $\omega = qB_0/m$ (1) \Rightarrow

$$\left[\begin{array}{l} \frac{dv_x}{dt} = \omega v_z \quad (2) \\ \frac{dv_y}{dt} = 0 \quad (3) \\ \frac{dv_z}{dt} = \frac{qE_0}{m} - \omega v_x \quad (4) \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{med lösning (3): } v_y = \text{konst} = v_y(t=0) = 0 \\ \frac{dy}{dz} = 0 \Rightarrow y = \text{konst} = y(t=0) = 0 \\ \Rightarrow \text{Rörelse enbart i } xz\text{-planet!} \end{array}$$

d/dt på ekv. (4) och insättning av (2) ger

$$\frac{d^2 v_z}{dt^2} = -\omega \frac{dv_x}{dt} = -\omega^2 v_z \quad \text{med lösningen } v_z = k_1 \cos \omega t + k_2 \sin \omega t \quad (5)$$

$$v_z(t=0) = 0 \Rightarrow k_1 = 0, \quad (5) \text{ och } (4): \frac{dv_z}{dt} = \omega k_2 \cos \omega t = \frac{qE_0}{m} - \omega v_x$$

$$\text{som för } t=0 \text{ blir } \omega k_2 = qE_0/m \Rightarrow k_2 = E_0/B_0 \Rightarrow v_z = (E_0/B_0) \sin \omega t \quad (6)$$

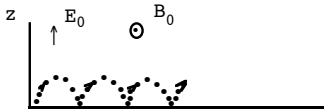
$$\text{Integrera (6) och använd BV } \Rightarrow z = \frac{E_0}{\omega B_0} (1 - \cos \omega t) \quad (7)$$

Sätt in ekv.(6) i (2), integrera och använd BV \Rightarrow

$$v_x = \frac{E_0}{B_0} (1 - \cos \omega t) \quad (8) \quad \text{och} \quad x = \frac{E_0}{\omega B_0} (\omega t - \sin \omega t) \quad (9)$$

Med hjälp av v_z och v_x eller z och x kan vi också skissa banan (en cykloid)

Ekv. (7) ger max avstånd till x-axeln $z_{\max} = 2E_0/\omega B_0$



6.2 Postulat

För magnetostatik i vakuum gäller för B-fältet:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \text{och} \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} \quad \text{i differentialform eller}$$

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = 0 \quad \text{och} \quad \oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 i \quad \text{i integralform}$$

där \mathbf{J} är strömtätheten, i strömmen och permeabiliteten för vakuum

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Vs/Am}$$

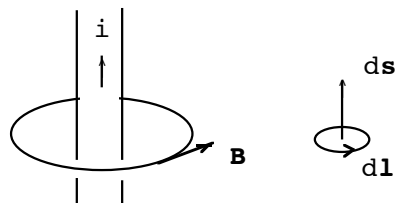
6.3 Amperes lag

Sambandet mellan linjeintegralen av \mathbf{B} runt en sluten väg och strömmen genom den yta, som begränsas av den slutna vägen.

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \int \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 i_{\text{omsluten}}$$

Amperes lag i integralform

$$d\mathbf{l} \text{ given } \Rightarrow d\mathbf{s} \text{ enl. fig.}$$

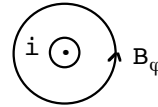


Samband mellan omloppsriktningen $d\mathbf{l}$ och riktningen på ytvektorn $d\mathbf{s}$ fås som tidigare enligt högerhandsregeln: fingrarna i $d\mathbf{l}$ -riktningen medför $d\mathbf{s}$ i tummens riktning!

För en "oändligt" lång rak ledare får man t.ex.

$$B_{\varphi} 2\pi r = \mu_0 i_{\text{omsluten}} = \mu_0 i$$

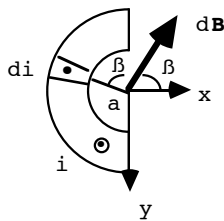
$$\Rightarrow B_{\varphi} = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}$$



Kommentar: Amperes lag är bra vid **symmetri**, exempelvis för oändligt lång rak ledare, oändligt lång spole, koaxialkabel, toroid — en motsvarighet till Gauss lag i elektrostatiken.

Exempel: Strömmen i flyter i axelriktningen i ett **tunt**, långt, halvt cylindriskt skal med radien a. Beräkna **B** på cylinderaxeln!

Vi delar upp ledaren i tunna raka ledare, så att vi kan använda den färdiga formeln för B från tunn lång rak ledare ovan!



Ström i elementet med båglängden $a d\beta$

$di = i a d\beta / \pi a$ vilken ger magnetfältet

$$dB = \mu_0 di / 2\pi a$$

dB är vinkelrät mot radien a

Dela upp **dB** i komponenter: $d\mathbf{B} = dB (\hat{x} \cos\beta - \hat{y} \sin\beta)$ och integrera.

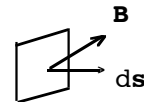
$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 i}{2\pi^2 a} \int_0^{\pi} (\hat{x} \cos\beta - \hat{y} \sin\beta) d\beta = \frac{\mu_0 i}{2\pi^2 a} (-2\hat{y}) = -\hat{y} \frac{\mu_0 i}{\pi^2 a}$$

6.4 Magnetiskt flöde

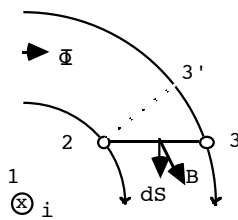
Definition: **magnetiskt flöde** genom en yta

$$\Phi = \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}$$

$$[\mathbf{B}] = \text{Vs} = \text{Wb (weber)}$$



Exempel: Likströmmen i flyter i en lång rak ledare 1. Beräkna flödet Φ genom en yta 2-3 med längden ℓ vinkelrätt mot papperets plan, se fig.! Radiella avstånden från 1 till 2 resp. 3 är r_{12} och r_{13} .



B-fältet från den långa raka ledaren 1: $B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}$

B-linjerna är cirklar runt om 1, se fig.!

Flödet genom 2-3: $\Phi = \int_{2-3} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}$

B är ej parallell med **ds** på ytan 2-3 och integralen blir inte heller så enkel som med detta knep:

Det är ett och samma flöde Φ , som flyter mellan de båda cirkelbågarna genom 2 resp. 3. Det är lättare att beräkna flödet genom yta 2-3' i stället! På 2-3' är **ds** och **B** parallella och ytelementet $ds = \ell dr$.

$$\Phi = \int_{2-3'} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \int_{r_{12}}^{r_{13}} \frac{1}{r} \ell dr = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \ell \ln \frac{r_{13}}{r_{12}}$$

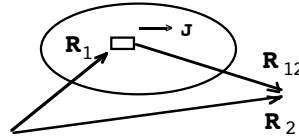
6.5 Vektorpotential

Eftersom $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ och $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) \equiv 0$, kan vi införa en **vektorpotential** genom $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$
 $[A] = \text{Vs/m}$

I magnetostatiken väljer vi $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ Vektorn \mathbf{A} är därmed bestämd, eftersom vi känner dess rotation och divergens – Helmholtz teorem.

För en **strömfördelning** $\mathbf{J}(\mathbf{R}_1)$ får man följande uttryck för \mathbf{A} :

$$\mathbf{A}(\mathbf{R}_2) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{R}_1)}{R_{12}} dv_1$$



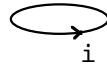
För en **tunn strömförande ledare** med strömmen i får man

$$\mathbf{A}(\mathbf{R}_2) = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \oint \frac{d\mathbf{l}_1}{R_{12}} \quad d\mathbf{l}_1 = \text{längdelement i strömriktningen}$$

Kommentar: Om strömmen flyter i en riktning kommer \mathbf{A} att få **samma riktning**.

Ström i i $\hat{\varphi}$ -led ger

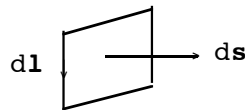
$$\mathbf{A} = \hat{\varphi} A_{\varphi}$$



Fördel med vektorpotentialen: Integralen för \mathbf{A} är ofta lättare att beräkna än motsvarande för \mathbf{B} -fältet (Biot-Savarts lag). När \mathbf{A} är beräknad, får man \mathbf{B} som $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$.

Viktigt resultat: Flöde genom en yta kan beräknas direkt med \mathbf{A} -vektorn integrerad runt omkretsen till ytan.

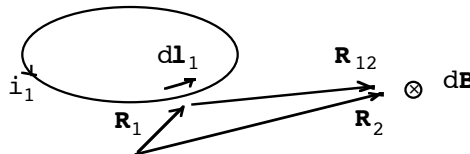
$$\Phi = \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$$



6.6 Biot-Savarts lag

\mathbf{B} -fält från en strömslinga med strömmen i_1 :

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{i_1 d\mathbf{l}_1 \times \hat{\mathbf{R}}_{12}}{R_{12}^2}$$



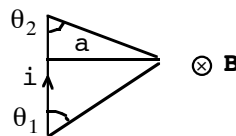
Integrera runt slinga 1 för att få $\mathbf{B}(\mathbf{R}_2) = \oint d\mathbf{B}$

Att göra detta är jobbigare än du tror! Använd i stället de färdiga formlerna nedan, om möjligt! De finns med i formelsamlingen.

Viktiga resultat:

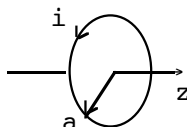
a/ Fält från **rak del av strömförande ledare**

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi a} (\cos \theta_1 + \cos \theta_2)$$



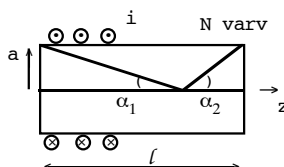
b/ Fält på **axeln till cirkulärt varv**

$$B_z = \frac{\mu_0 i a^2}{2(z^2 + a^2)^{3/2}}$$



c/ Fält på axeln till cirkulär spole

$$B_z = \frac{\mu_0 Ni}{2l} (\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2)$$

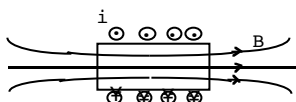
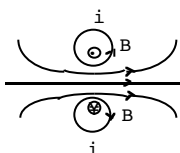
d/ Fält från "oändligt" lång spole, d.v.s. $l \gg a$, med Amperes lag

$$B_z = \mu_0 Ni / l \quad r < a$$

$$B = 0 \quad r > a$$

homogent fält i spolen

inget fält utanför spolen

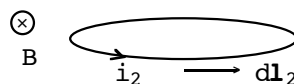


Skiss av fält från cirkulär strömslinga resp. spole. Strömriktningen i de cirkulära varven symboliseras av \odot resp. \otimes i figurena. OBS! B-linjer är alltid slutna linjer, ty $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$.

6.7 Kraft på strömförande ledare i B-fält

Kraft på en ledare med strömmen i_2 :

$$\mathbf{F}_2 = \oint i_2 d\mathbf{l}_2 \times \mathbf{B}$$

Kraft på volymen V med strömtätheten \mathbf{J} :

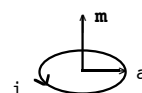
$$\mathbf{F} = \int_V \mathbf{J} \times \mathbf{B} dv$$



6.8 Magnetisk dipol

Definition: magnetiskt dipolmoment \mathbf{m} för en cirkulär strömslinga med radien a

$$\mathbf{m} = \hat{n} i \pi a^2$$

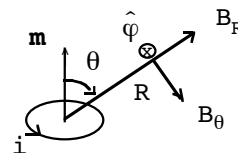
Magnetisk dipol — liten strömslinga betraktad på stort avstånd $R \gg a$.

Vektorpotentialen blir

$$\mathbf{A}_{\text{dipol}} = \frac{\mu_0 \mathbf{m} \times \hat{\mathbf{R}}}{4\pi R^2} = \hat{\varphi} \frac{\mu_0 m \sin \theta}{4\pi R^2}$$

vilken ger B-fältet ($\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$)

$$\mathbf{B} = \hat{\mathbf{R}} \frac{\mu_0 2m \cos \theta}{4\pi R^3} + \hat{\theta} \frac{\mu_0 m \sin \theta}{4\pi R^3}$$



$$\mathbf{m} = \hat{z} m$$

Jämför \mathbf{E} från en elektrisk dipol, se s. 14!Kraft, vridande moment och energi för en magnetisk dipol i ett yttre fält $\mathbf{B}_{\text{yttre}}$:

$$\mathbf{F} = (\mathbf{m} \cdot \nabla) \mathbf{B}_{\text{yttre}}$$

kraft på dipolen

$$\mathbf{T} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}_{\text{yttre}}$$

vridande moment på dipolen

$$W_m = -\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}_{\text{yttre}}$$

magnetisk energi för dipol i yttre fält

Kapitel 7

Magnetostatik med magnetiska material

Magnetisering, H-fält, magnetkretsar, randvillkor

Atomära strömmar i material utgör magnetiska dipoler, vilka ger magnetfält. Om dipolerna är slumpmässigt orienterade, får vi inget resulterande fält.

Magnetmaterial: Material som blir magnetiserade av yttre fält. – De slumpmässigt orienterade dipolerna påverkas av vridande moment på grund av det yttre fältet och ställer in sig i fältets riktning, vilket ger resulterande fält på grund av dipolerna. –

Det kan också vara material som är permanent magnetiserade – permanentmagneter.

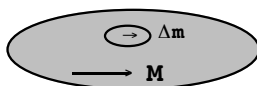
7.1 Magnetisering

Betrakta en liten volym Δv i ett magnetiserat material och summera de atomära magnetiska momenten i Δv till $\Delta \mathbf{m}$.

Definition av magnetiseringen \mathbf{M} = "dipolmoment/volymenthet" – en makroskopisk storhet:

$$\mathbf{M} = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{m}}{\Delta v}$$

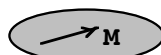
$$[\mathbf{M}] = \text{A/m}$$



Vi kan räkna med materialets inverkan genom att införa ekvivalenta strömtätheter \mathbf{J}_m och \mathbf{J}_{ms} , **magnetiseringsströmtätheter**.

$$\mathbf{J}_m = \nabla \times \mathbf{M}$$

strömtäthet A/m²



$$\mathbf{J}_{ms} = \mathbf{M} \times \hat{n}$$

ytrömtäthet A/m

\hat{n} ut från volyemen

Både de ekvivalenta strömmarna \mathbf{J}_m och \mathbf{J}_{ms} **och** de verkliga (vanliga, fria) ledningsströmmarna \mathbf{J}_{fri} och \mathbf{J}_{fris} bidrar till **B-fältet**.

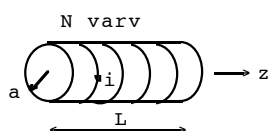
Amperes lag för **B** blir t.ex.

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \int (\mathbf{J}_m + \mathbf{J}_{fri}) \cdot d\mathbf{s} \quad \text{eller} \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{J}_m + \mathbf{J}_{fri})$$

Vid **permanent magnetiserat material** (utan extra strömlindning) är $\mathbf{J}_{fri} = 0$.

Exempel: Jämförelse av cylinderspole och cylindrisk permanentmagnet:

a/ Cirkulär cylindrisk spole med radien a , längden L och N varv med strömmen i



$$\text{ytrömtäthet } \mathbf{J}_s = \hat{\phi} Ni/L$$

$$\text{på z-axeln } \mathbf{B} = \hat{z} \frac{\mu_0 Ni}{2L} (\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2)$$

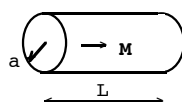
b/ Permanent magnetiserad cylinder, magnetiserad i z-led. Dimensioner samma som spolen i a/ men utan strömlindning:

$$\mathbf{M} = \hat{z} M_0, \text{ med } M_0 = \text{konst}$$

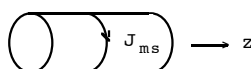
Ersätt magneten med ekvivalenta strömmar: I volyemen $\mathbf{J}_m = \nabla \times \mathbf{M} = 0$, ty $M_0 = \text{konst}$.

På ytan av materialet ytrömtätheten

$$\mathbf{J}_{ms} = \mathbf{M} \times \hat{n} = M_0 \hat{z} \times \hat{r} = \hat{\phi} M_0 \quad (\text{A/m})$$



ekvivalent med



Forts. på nästa sida!

J_m och J_{ms} ger B-fältet. Här har vi analogi mellan J_{ms} på cylinderytan och spolen i fallet a/. J_{ms} motsvaras av Ni/L . Vi får därför B-fältet på magnetens axel

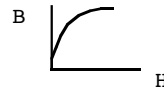
$$\mathbf{B}_{\text{magnet}} = \hat{z} \frac{\mu_0 M_0}{2} (\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2)$$

$$\mathbf{H} \text{ fås ur } \mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M}$$

Se t.ex. Exempel 8-2 i Exempelsamlingen!

7.2 H-fältet, magnetisk intensitet

Ett annat sätt att ta hänsyn till magnetmaterialalets inverkan är att införa en ny vektor \mathbf{H} , definierad genom

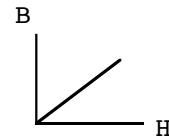


$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} \quad \mathbf{H}\text{-fältet, } [H] = \text{A/m}$$

Om det är linjärt, d.v.s. $M \sim H$, kan vi införa en konstant μ , permeabiliteten.

$$\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}) = \mu \mathbf{H} = \mu_r \mu_0 \mathbf{H} \quad [\mu] = \text{Vs/A m}$$

där μ_r (eller η) = permeabilitetsstalet, relativa permeabiliteten



[Man kan också införa en konstant, den magnetiska susceptibiliteten χ_m , genom att sätta $\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H} = (\mu_r - 1) \mathbf{H} \Rightarrow \chi_m = \mu_r - 1$]

Ferromagnetiska material (järn, nickel, kobolt) har $\mu_r \gg 1$. **Amperes lag för H-fältet** blir nu:

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int \mathbf{J}_{\text{fri}} \cdot d\mathbf{s} \quad \text{eller} \quad \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_{\text{fri}}$$

där \mathbf{J}_{fri} är den fria (vanliga) strömtätheten.

Kommentar: Fördelen med denna formulering av Amperes lag är att vi ofta känner den vanliga strömmen och kan beräkna \mathbf{H} . Att beräkna \mathbf{J}_m och \mathbf{J}_{ms} fordrar att vi känner \mathbf{M} .

OBS! \mathbf{J}_m och \mathbf{J}_{ms} ger B-fältet! \mathbf{H} fås ur $\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M})$

Här gäller också motsvarande som för dielektriska material. Att $\mathbf{J}_{\text{fri}} = 0$ behöver inte innebära att $\mathbf{H} = 0$: En permanentmagnet har inga fria strömmar. $\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = 0$. Men $\mathbf{H} \neq 0$.

7.3 Magnetkretsar

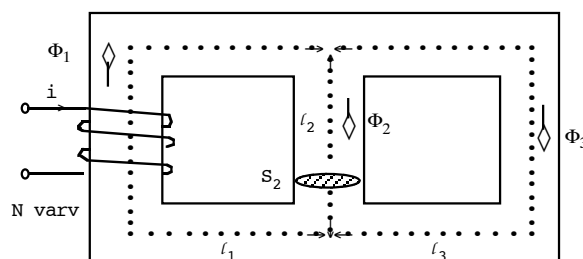
En magnetkrets består av magnetiskt material, som leder flödet. Magnetiseringen åstadkommes med en eller flera strömförande lindningar eller också använder man permanent magnetiserat material. Vi studerar enbart linjära magnetkretsar i kursen.

Linjära kretsar, $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$ ($\mu = \text{konst}$)



Härledning av en analog elektriskt krets:

Betrakta nedanstående magnetkrets! Beräkna flödet Φ_1 !



l_k medelväg för flödet
i del k av kretsen
 S_k tvärsnittsytta för
flödet
 μ_k permeabilitet för
del k av kretsen

Tillämpa Amperes lag $\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = i_{\text{omsluten}}$ på slutna slingor i kretsen och att $\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = 0$ i knutpunkterna.

Räkna med **medelvägen** ℓ_k i järnet för flödet. Antag också att flödet är jämnt fördelat över tvärsnittsytan S_k . Läckningen försummas, d.v.s. allt flöde flyter enbart i magnetmaterialet.

$$\Phi_1 = \Phi_2 + \Phi_3 \quad (1)$$

$$B_k = \Phi_k / S_k \quad k=1,2,3 \quad (2)$$

$$B_k = \mu_k H_k \quad (3)$$

$$\oint_{1-2} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = H_1 \ell_1 + H_2 \ell_2 = Ni \quad (4)$$

$$\oint_{3-2} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = H_3 \ell_3 - H_2 \ell_2 = 0 \quad (5)$$

$$(2) \text{ och } (3) \text{ insättes i } (1): \mu_1 H_1 S_1 = \mu_2 H_2 S_2 + \mu_3 H_3 S_3 \quad (6)$$

$$\text{Ur ekv. (5) } H_3 = H_2 \ell_2 / \ell_3 \text{ insättes i (6). Lös ut } H_2 \ell_2 \Rightarrow$$

$$H_2 \ell_2 = \frac{\mu_1 H_1 S_1}{\frac{\mu_2 S_2}{\ell_2} + \frac{\mu_3 S_3}{\ell_3}} = \frac{H_1 \ell_1 \frac{\mu_1 S_1}{\ell_1}}{\frac{\mu_2 S_2}{\ell_2} + \frac{\mu_3 S_3}{\ell_3}} = \frac{H_1 \ell_1 \frac{1}{\mathfrak{R}_1}}{\frac{1}{\mathfrak{R}_2} + \frac{1}{\mathfrak{R}_3}} = \frac{H_1 \ell_1 \mathfrak{R}_2 \mathfrak{R}_3}{\mathfrak{R}_1 (\mathfrak{R}_2 + \mathfrak{R}_3)} \quad (7)$$

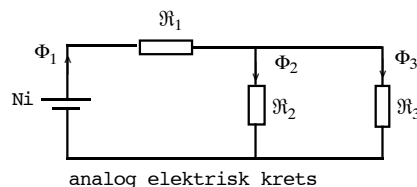
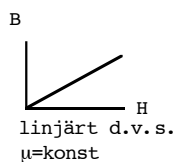
där beteckningen $\mathfrak{R}_k = \ell_k / \mu_k S_k$ införts. (7) ins. i (4) \Rightarrow

$$H_1 \ell_1 = \frac{Ni}{1 + \frac{\mathfrak{R}_2 \mathfrak{R}_3}{\mathfrak{R}_1 (\mathfrak{R}_2 + \mathfrak{R}_3)}}$$

och slutligen $\Phi_1 = B_1 S_1 = \mu_1 H_1 S_1 =$

$$= \frac{\mu_1 S_1}{\ell_1} \cdot \frac{Ni}{1 + \frac{\mathfrak{R}_2 \mathfrak{R}_3}{\mathfrak{R}_1 (\mathfrak{R}_2 + \mathfrak{R}_3)}} = \frac{Ni}{\mathfrak{R}_1 + \frac{\mathfrak{R}_2 \mathfrak{R}_3}{\mathfrak{R}_2 + \mathfrak{R}_3}}$$

Denna ekvation kan vi tolka som erhållen ur en **ekvivalent elektrisk krets**:



Ni kallas för mmk (=magnetomotorisk kraft) och motsvarigheten till resistans kallas reluktans.

$$\mathfrak{R}_k = \frac{\ell_k}{\mu_r \mu_0 S_k}$$

reluktansen

$$[\mathfrak{R}] = \text{A/Vs}$$

Anmärkning 1: Det är i allmänhet mycket **enklare** att räkna med den **analoga elektriska kretsen!** Vi kan också använda lagar och förenklingar från kretstekniken.

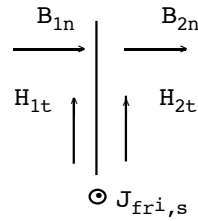
Anmärkning 2: Analogin med en elektrisk krets kan man se utan att lösa ekvationssystemet som vi gjorde. Amperes lag, ekv.(4) och (5), motsvarar Kirchhoffs spänningslag. Den slutna integralen $\oint_s \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}$ i en knutpunkt, d.v.s. ekv.(1), motsvarar Kirchhoffs strömlag.

7.4 Randvillkor

I gränssytan mellan två material gäller

$$\begin{aligned} B_{1n} &= B_{2n} \\ H_{2t} - H_{1t} &= J_{\text{fri},s} \end{aligned}$$

om det finns fri ytströmtäthet i gränssytan, använd Amperes lag för att få rätt tecken



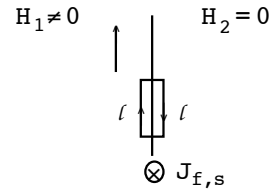
Exempel: Uppstår det någon ytström i gränssytan mellan de båda materialen? H_1 är tangentiellt och $H_2 = 0$.

Amperes lag

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = H_1 \ell - 0 \cdot \ell = J_{f,s} \ell$$

$$\Rightarrow \text{ytströmtäthet } J_{f,s} = H_1$$

riktad enl.fig.



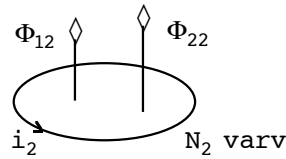
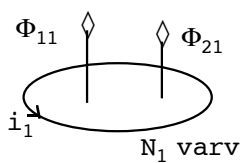
Kommentar: Material 2 i detta exempel kan t.ex. representera en **supraledare**.

$H_2 = 0$ i supraledare och H_1 är tangentiellt utanför supraledaren.

Resultat: Ström flyter på ytan till supraledaren!. Se t.ex. uppgift 11-5 i Exempelsamlingen!

7.5 Induktans

Yttre induktans: Induktans på grund av flöde utanför strömförande område. Studera två strömförande slingor med strömmarna i_1 och i_2 !



Φ_{11} = flöde genom slinga 1 p.g.a. i_1

Φ_{21} = " " " 1 " i_2

Φ_{12} = " " " 2 " i_1

Φ_{22} = " " " 2 " i_2

(egen) induktans

$$L_{11} = \frac{N_1 \Phi_{11}}{i_1}$$

$$L_{22} = \frac{N_{22} \Phi_{22}}{i_2}$$

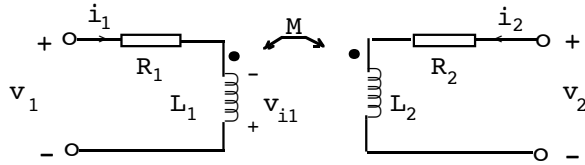
ömsesidig induktans

$$M_{12} = \frac{N_2 \Phi_{12}}{i_1} = \frac{N_1 \Phi_{21}}{i_2} = M_{21}$$

$[L] = [M] = \text{H (henry)}$

kopplingsfaktor $k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} \leq 1$

Kretsekvationer: Induktanserna kommer in på detta sätt, då man ställer upp kretsekvationer för magnetiskt kopplade kretsar. – Inducerad spänning behandlas senare. –



Inducerad spänning i krets 1:
(med referens enl.fig.) $v_{i1} = - \left(L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \right)$

Kretsekvationerna blir

$$\begin{cases} v_1 = R_1 i_1 - v_{i1} = R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \\ v_2 = R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} \end{cases}$$

Bra regel: Ström (i_1) in vid prick ger spänning ($L_1 di_1/dt$ eller $M di_1/dt$) med plus vid prick!

7.6 Magnetisk energi och kraft

7.6.1 Energi för en strömfördelning \mathbf{J}

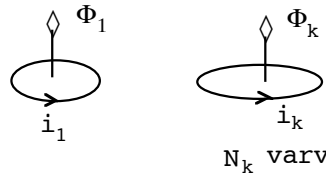
$$W_m = \frac{1}{2} \int \mathbf{J}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}) \, dv \quad \text{där } \mathbf{A} \text{ är vektorpotentialen.}$$

I specialfallet **strömslingor** får man

$$W_m = \frac{1}{2} \sum_k N_k \Phi_k i_k$$

eller med induktans
(för två slingor)

$$W_m = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + M i_1 i_2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2$$



7.6.2 Energi uttryckt med B- och H-fälten

$$W_m = \frac{1}{2} \int_{v_\infty} \mathbf{H}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) \, dv$$

eller ickelinjärt $W_m = \int_{v_\infty} \int_0^B \mathbf{H} \, dB \, dv$

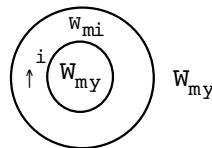
Ska integreras över en volym utsträckt till oändligheten!

Yttre och inre energi:

Den magnetiska energin för en krets kan delas upp i två delar, W_{mi} och W_{my} , inre och yttre energi eller **energi i respektive utanför strömförande område.**

$$W_m = W_{mi} + W_{my} = \frac{1}{2} L i^2 = \frac{1}{2} (L_i + L_y) i^2$$

Med energidefinitionen av induktans får vi motsvarande uppdelning av induktansen i en **inre** och en **yttre induktans**, L_i resp. L_y

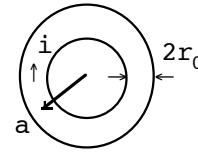


Se beräkningen i Exemplet nedan!

Exempel: Strömmen i flyter i ett cirkulärt varv av tunn, rund metalltråd. trådradien är r_0 och slingradien $a \gg r_0$. Beräkna a/ den inre energin b/ den inre induktansen!

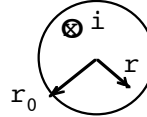
a/ Energi i strömförande område

Eftersom $r_0 \ll a$ kan vi försumma ringens krökning och räkna med en rak ledare med längden $l = 2\pi a$ och radien r_0 .



Amperes lag ger B i ledaren

$$\begin{aligned} \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} &= B(r) 2\pi r = \mu_0 \int \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} = \\ &= \mu_0 \frac{i}{\pi r_0^2} \pi r^2 \\ \Rightarrow B(r) &= \frac{\mu_0 i r}{2\pi r_0^2} \quad r < r_0 \end{aligned}$$



Den **inre** energin får vi genom att integrera $W_m = \frac{1}{2\mu_0} \int B^2 dv$ över ledarvolymen:

$$W_{mi} = \frac{1}{2\mu_0} \int_0^{r_0} \left[\frac{\mu_0 i r}{2\pi r_0^2} \right]^2 2\pi r dr l = \frac{\mu_0 i^2 l}{4\pi r_0^4} \int_0^{r_0} r^3 dr = \frac{\mu_0 i^2 l}{16\pi} = \frac{\mu_0 i^2 a}{8}$$

b/ Den inre induktansen

$$L_i = \frac{W_{mi}}{\frac{1}{2} i^2} = \frac{\mu_0 a}{4}$$

Kommentar: Att beräkna energin **utanför** ringen genom

$W_{myttre} = \frac{1}{2\mu_0} \int B^2 dv$ är alltför komplicerat.

7.6.3 Magnetisk kraft på strömslinga

Kraft på slingan med strömmen i_2 i B-fält:

$$\mathbf{F} = \oint i_2 d\mathbf{l}_2 \times \mathbf{B}$$

7.6.4 Magnetisk kraft på föremål

Den magnetiska kraften på ett föremål i ett magnetostatiskt fält kan beräknas på två sätt genom **virtuell förflyttning**:

$$\mathbf{F}_x = - \left. \frac{\partial W_m}{\partial x} \right|_{\Phi = \text{konst}}$$

$$\mathbf{F}_x = \left. \frac{\partial W_m}{\partial x} \right|_{i = \text{konst}}$$

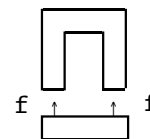
Bevisas på sätt motsvarande det i elektrostatiken.

Viktigt resultat:

Kraft per ytenhet i luftgap, t.ex. lyftkraft för elektromagnet:

Kraft per ytenhet $f =$ magnetisk energitäthet w_m i luften utanför kroppen som ska lyftas.

$$f = \frac{B^2}{2\mu_0}$$



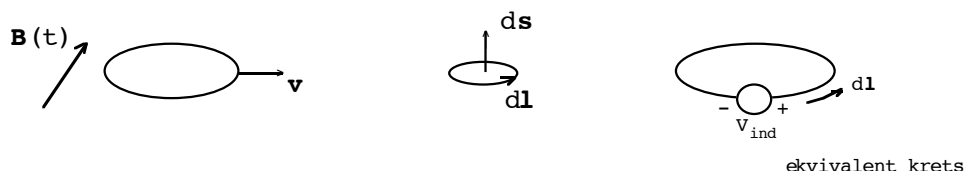
Kapitel 8

Induktion

I detta kapitel studerar vi B-fält, som varierar i tiden. Vi antar **kvasistationära** (nästan stationära) förhållanden, d.v.s. så långsam tidvariation, att vi inte får vågutbredning. Kallas också kvasistatiska förhållanden. Se kommentar om totala flödet på s. 47!

8.1 Faradays induktionslag

1/ En sluten ledare rör sig med hastigheten \mathbf{v} i ett tidvariabelt magnetfält $\mathbf{B} = \mathbf{B}(t)$.



Inducerad spänning i ledaren – Faradays lag

$$V'_{\text{ind}} = \oint_c \mathbf{E}'_{\text{ind}} \cdot d\mathbf{l} = - \frac{d\Phi}{dt} = - \int_s \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{s} + \oint_c (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} = - \frac{d}{dt} \oint_c \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$$

transformator- rörelseemk
emk

V'_{ind} en spänningskälla som vill driva ström i dl-riktningen! Se den ekvivalenta kretsen ovan! Storleken på V'_{ind} fås ur induktionslagen!

Index ' betecknar koordinatsystem som följer slingelementet dl.

2/ En icke sluten ledare rör sig med hastigheten \mathbf{v} i ett tidsberoende B-fält. Inducerad spänning i ledaren:

$$V_{\text{ind}} = \int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_a^b (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l}$$

Vid rörelse i tidskonstant \mathbf{B} använd $V_{\text{ind}} = \int \mathbf{v} \times \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}$! Vid både tidvariation i B och rörelse är $V_{\text{ind}} = -d\Phi/dt$ enklast!

Ekvationer som modifieras för **kvasistationära** förhållanden:

Elektrostatikens $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ blir nu

$$\nabla \times \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

och sambanden mellan fält och potentialer

$$\begin{cases} \mathbf{E} = -\nabla V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \\ \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \\ \nabla \cdot \mathbf{A} = -\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial V}{\partial t} \end{cases} \quad \text{Lorentzvillkoret}$$

där V är potentialen och A den magnetiska vektorpotentialen.

Spänningen $\int_1^2 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = V_1 - V_2 - \int_1^2 \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \cdot d\mathbf{l}$

Potentialskillnad $\Delta V = V_1 - V_2$ är inte längre samma som spänning!!

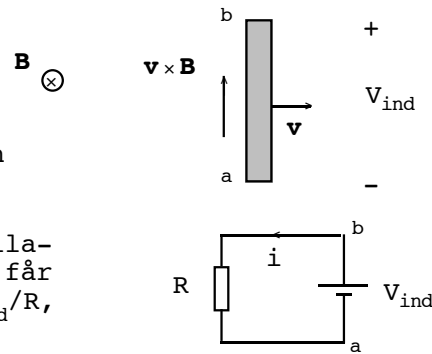
Exempel: En rak ledare med längden ℓ rör sig med hastigheten v vinkelrätt mot ett konstant fält B . Beräkna inducerad spänning i ledaren!

$$V_{\text{ind}} = \int_a^b (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} = vB\ell$$

(en likspänning)

$q(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$ är kraft på en positiv laddning q i metallen –därav spänningens polaritet.

Om kretsen slutes via en stillastående ledande förbindelse, får vi en ström i kretsen $i = V_{\text{ind}}/R$, där R är kretsens resistans.



$\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ ger också strömmens riktning i ledaren. Den inducerade strömmen ger i sin tur upphov till ett magnetfält, vilket vill bromsa ledarens rörelse.

Kommentar: När vi räknar kvasistationärt försummar vi B_{ind} på grund av de inducerade strömmarna. Vi kan göra detta om våglängden $\lambda (= c/f) \gg$ kretsarna.

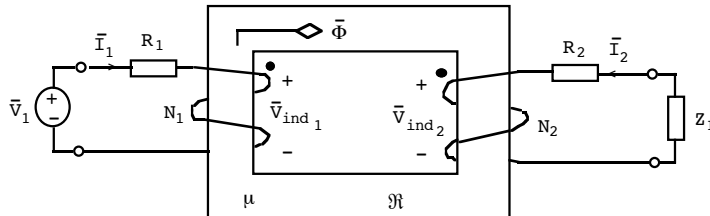
–Framgår senare i kursen varför det blir så. i_{ind} är liten vid låg frekvens. –

När frekvensen blir hög, måste vi ta med $B_{\text{ind}} \Rightarrow \Phi_{\text{ind}}$. Det är därför klokast att tänka på att det ska vara det **totala** flödet ($\Phi_{\text{tot}} = \Phi_{\text{ursprunglig}} + \Phi_{\text{ind}}$) i induktionslagen.

$$V_{\text{ind}} = - \frac{d\Phi_{\text{(tot)}}}{dt}$$

8.2 Transformatorns ekvivalenta krets

Betrakta en transformator med två lindningar – N_1 resp. N_2 varv och resistanser R_1 resp. R_2 – med en kärna av järn – permeabilitet μ , konduktivitet σ och tvärsnittsytan S . Antag växelströmsmagnetisering och räkna med komplexa spänningar och strömmar. Symboler med streck över.. Kärnans reluktans betecknas med \mathcal{R} . Läckningen försummas.



Vi får inducerad spänning "med plus vid prick":

$$\bar{V}_{\text{ind}_1} = j\omega N_1 \bar{\Phi} \quad \text{och} \quad \bar{V}_{\text{ind}_2} = j\omega N_2 \bar{\Phi}$$

Kretsekvationerna blir då

$$\bar{V}_1 = R_1 \bar{I}_1 + j\omega N_1 \bar{\Phi} \quad (1)$$

$$0 = (R_2 + Z_L) \bar{I}_2 + j\omega N_2 \bar{\Phi} \quad (2)$$

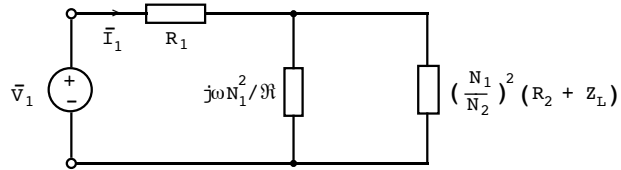
Amperes lag med reluktansen $\mathcal{R} = \ell/\mu S$ införd ger

$$N_1 \bar{I}_1 + N_2 \bar{I}_2 = \Phi \mathcal{R} \quad (3)$$

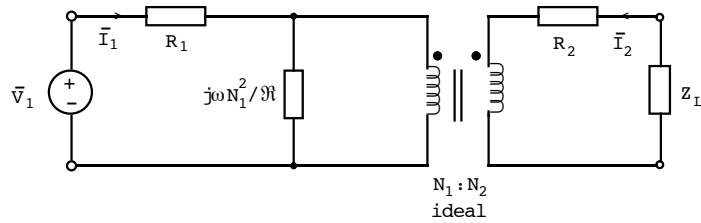
Ekv. (1)-(3) ger

$$\bar{V}_1 = R_1 \bar{I}_1 + \frac{\bar{I}_1}{\frac{\mathcal{R}}{j\omega N_1^2} + \frac{1}{(N_1/N_2)^2 (R_2 + Z_L)}}$$

Detta kan vi tolka som en ekvivalent krets för transformatorn sedd från primärsidan:



$(N_1/N_2)^2(R_2 + Z_L)$ är belastningen Z_L och R_2 transformerade till primärsidan. Vi kan då rita vår **ekvivalenta krets** så här



Reluktansen $R = \ell/\mu S$ gäller för likströmsmagnetisering. Vi har växelström. Ett flöde som ändras i tiden ger inducerad spänning. Eftersom kärnan är ledande får vi inducerade strömmar, s.k. **virvelströmmar**. Dessa ger förluster i kärnan. Man kan lösa fältproblemet (under vissa approximationer) och införa en komplex reluktans $\mathfrak{R}(\omega) = \mathfrak{R}_0\Delta(\omega)$, där \mathfrak{R}_0 är likströmsreluktansen och $\Delta(\omega)$ är en komplex faktor, som tar hänsyn till virvelströmmarna.

En **ideal transformator** har $\mu = \infty$ och således $\mathfrak{R} = 0$. Då blir impedansen $j\omega N^2/\mathfrak{R}$ oändligt stor. Vi får vår vanliga ekvivalenta krets för den ideala transformatorn!

Vad **virvelströmmar** beträffar, se vidare om **laminering** och utnyttjande av material med högt μ och låg konduktivitet σ , **ferriter** i Cheng på s. 261 och s. 314; (s. 198 och s. 235 i Lilla Cheng!)

Kapitel 9

Elektromagnetiska fält

Hittills har vi studerat elektrostatiska och magnetostatiska fält. För kvasistationära förhållanden har vi en koppling mellan elektriskt och magnetiskt fält – ett tidvariabelt B-fält ger ett E-fält. Nu ska vi studera det allmänna fallet, det **elektromagnetiska fältet**, då ett tidvariabelt E-fält ger ett B-fält.

9.1 Förskjutningsströmmen

I magnetostatiken gäller $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_f$. Tag divergensen av detta. $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) \equiv 0 = \nabla \cdot \mathbf{J}_f \Rightarrow \nabla \cdot \mathbf{J}_f = 0$. Detta strider mot kontinuitetsekvationen $\nabla \cdot \mathbf{J}_f = -\partial \rho / \partial t$ för icke-stationära förhållanden. Ekvationen $\nabla \times \mathbf{H}$ måste modifieras:

$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_f + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$	där \mathbf{J}_f är (den fria) strömtätheten och $\partial \mathbf{D} / \partial t$ förskjutningsströmtätheten
--	--

Exempel: I en punkt i en metall ($\sigma = 10^7 \text{ S/m}$, $\epsilon_r = 1$) är $E(t) = E_0 \cos \omega t$. Beräkna förhållandet mellan toppvärdena av J och $\partial D / \partial t$!

$$J = \sigma E = \sigma E_0 \cos \omega t \quad \text{och} \quad D = \epsilon_0 E, \quad \frac{\partial D}{\partial t} = -\epsilon_0 \omega E_0 \sin \omega t$$

$$\frac{\hat{J}}{\hat{\frac{\partial D}{\partial t}}} = \frac{\sigma}{\omega \epsilon_0} = 18 \cdot 10^{10} \quad \text{Förskjutningsströmmen är försumbar i metallen!}$$

9.2 Maxwells ekvationer

Maxwells ekvationer i differentialform:

elektro- statik	magneto- statik	kvasi- stationärt	allmänt vågor	
$\nabla \times \mathbf{E} = 0$		$-\partial \mathbf{B} / \partial t$		$= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$
$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_f$				$= \rho_f$
$\nabla \times \mathbf{H} =$	\mathbf{J}_f		$+$	$\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$
$\nabla \cdot \mathbf{B} =$	0			$= 0$

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \quad \mathbf{J}_f = \sigma \mathbf{E} \quad (\text{linjära, isotropa material})$$

Maxwells ekvationer i integralform:

$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\int \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{s} \quad \oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} = \int \rho_f \, dv$ $\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int (\mathbf{J}_f + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}) \cdot d\mathbf{s} \quad \oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = 0$

Randvillkor

$$E_{1t} = E_{2t}$$

$$H_{2t} - H_{1t} = J_s$$

J_s = ytströmstäthet

Amperes lag ger tecken

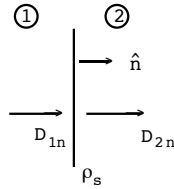
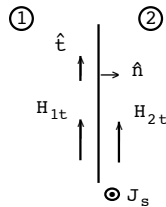
$$(\text{eller } \hat{n} \times \mathbf{H}_2 - \hat{n} \times \mathbf{H}_1 = \mathbf{J}_s)$$

$$B_{1n} = B_{2n}$$

$$D_{2n} - D_{1n} = \rho_s$$

ρ_s = fri ytladdningstäthet

Gauss lag ger tecken

**9.3 Retarderade potentialer**

Maxwells ekvationer ger komplicerade differentialekvationer för \mathbf{E} och \mathbf{H} . Motsvarande ekvationer för potentialerna V och \mathbf{A} blir något enklare. Potentialerna definieras genom

$$\mathbf{E} = -\nabla V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \mu\epsilon \frac{\partial V}{\partial t} = 0$$

Lorentzvillkoret

Vågekvationer för \mathbf{A} och V :

Antag en strömstäthet \mathbf{J} och en volym-laddningstäthet ρ i homogent material. Vi får

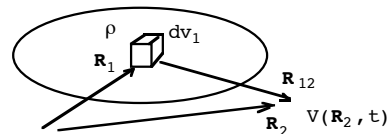
$$\nabla^2 \mathbf{A} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu \mathbf{J}$$

$$\nabla^2 V - \mu\epsilon \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\rho / \epsilon$$

Lösningarna de s.k. **retarderade potentialerna** blir:

$$\mathbf{A}(\mathbf{R}_2, t) = \frac{\mu}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{R}_1, t - R_{12}/c)}{R_{12}} dv_1$$

$$V(\mathbf{R}_2, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int \frac{\rho(\mathbf{R}_1, t - R_{12}/c)}{R_{12}} dv_1$$



Vågor som utbreder sig med hastigheten $c = 1/\sqrt{\mu\epsilon}$.

Retarderade – det tar tiden R_{12}/c för vågorna att utbreda sig till en punkt med koordinaten \mathbf{R}_2 .

Kommentar: När vi räknar kvasistationärt (nästan stationärt), t.ex. i kretstekniken, försummar vi utbredningstiden R/c . Detta är möjligt, om den elektriska kretsens dimensioner är mycket mindre än våglängden.

För 50 Hz är våglängden $\lambda = 6 \cdot 10^6$ m, d.v.s. 600 mil, och för 100 MHz är $\lambda = 3$ m. Kirchhoffs lagar gäller om $R \ll \lambda$. Se också avsnittet om transmissionsledningar i Cheng eller i Högfrekvensteknik i sammandrag!

Exempel: För en punktladdning i vakuum med laddningen $q(t)$ får man potentialen $V(\mathbf{R}, t) = q(t)/4\pi\epsilon_0 R$ nära laddningen, d.v.s. retardationen försummas. På större avstånd får man

$$V(\mathbf{R}, t) = \frac{q(t - R/c)}{4\pi\epsilon_0 R} \quad \text{där} \quad c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}}$$

9.4 Vågor i vakuum

Härledning av vågekvationer för **E** och **H** i **vakuum** ($\rho = 0, \mathbf{J} = 0$)

Teoriuppgift 11 om μ_0 och ϵ_0 ersätts med μ resp. ϵ .

Utgå från Maxwells ekvationer:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t; \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \partial \mathbf{D} / \partial t; \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho; \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

samt $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}; \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}; \mathbf{J} = 0, \rho = 0.$

Ta nu $\nabla \times$ på $\nabla \times \mathbf{E}$ - resp. $\nabla \times \mathbf{H}$ -ekvationerna!


$$\begin{aligned} \nabla \times \nabla \times \mathbf{E} &= \nabla (\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} = -\nabla^2 \mathbf{E} = -\nabla \times (\mu_0 \partial \mathbf{H} / \partial t) = \\ &\text{vektorformel} \quad = 0 \qquad \text{Maxwell} \qquad \text{operationerna } \nabla \text{ och } \partial / \partial t \text{ får kastas om} \\ &= -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{H}) = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} (\epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}) = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \Rightarrow \nabla^2 \mathbf{E} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nabla \times \nabla \times \mathbf{H} &= \nabla (\nabla \cdot \mathbf{H}) - \nabla^2 \mathbf{H} = -\nabla^2 \mathbf{H} = \nabla \times (\epsilon_0 \partial \mathbf{E} / \partial t) = \\ &\text{vektorformel} \quad = 0 \qquad \text{Maxwell} \qquad \text{operationerna } \nabla \text{ och } \partial / \partial t \text{ får kastas om} \\ &= \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{E}) = \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (-\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}) = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} \Rightarrow \nabla^2 \mathbf{H} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = 0 \end{aligned}$$

Vågekvationerna för **E** och **H** i vakuum blir alltså

$\nabla^2 \mathbf{E} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0$

$\nabla^2 \mathbf{H} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = 0$



Lösningarna blir vågor – är funktioner av (z-vt) för en våg som utbreder sig i z-riktningen. För sinusformad variation t.ex är detta en lösning: $E(z,t) = E_0 \cos[b(z-vt)]$.

Vågens utbredningsriktning

Vågens utbredningshastighet **v** och utbredningsriktning \hat{k} får man genom att följa ett visst fasläge hos vågen.

$E = E_0 \cos(\omega t - \beta z), \quad \omega t - \beta z = \text{konst} \Rightarrow dz/dt = v_{\text{fas}} = \omega/\beta > 0,$
d.v.s. vågutbredning i $+\hat{z}$ -riktningen.

$E = E_0 \cos(\omega t + \beta z)$ utbreder sig i $-\hat{z}$ -riktningen ty $dz/dt = -\omega/\beta$.

Definition av plan våg: **E**- och **H**-fälten ska vara konstanta på plan vinkelräta mot vågens utbredningsriktning.

Exempel: För en våg i ett material gäller

$\mathbf{E} = \hat{x} E_0 e^{-\alpha z} \cos(\omega t - bz)$. Är det en plan våg? Vågen utbreder sig i z-riktningen. Om det är en plan våg ska E vara konstant på plan $\perp \hat{z}$, d.v.s. oberoende av x och y. Det givna E beror bara av z (och t) och representerar således en plan våg.

[För en våg i godtycklig riktning $e^{-\gamma \hat{k} \cdot \mathbf{R}}$ gäller att $\hat{k} \cdot \mathbf{R} = \text{konst}$ för plan med konstant fas. Sätt in $\hat{k} \cdot \mathbf{R} = \text{konst}$ i uttrycket för E. Blir E konstant då, är det en plan våg.]

Viktigt resultat: För en plan våg i vakuum får man detta samband mellan **E** och **H**:

$\mathbf{H} = \frac{\hat{k} \times \mathbf{E}}{Z_0}$

där \hat{k} är vågens utbredningsriktning och

$Z_0 = \sqrt{\mu_0 / \epsilon_0}$ vågimpedansen för vakuum (luft)

9.5 Poyntingvektorn

Effekt ut från en volym

$$P = \oint \mathbf{E} \times \mathbf{H} \cdot d\mathbf{a}, \text{ där } d\mathbf{a} = \text{ytvektorn}$$

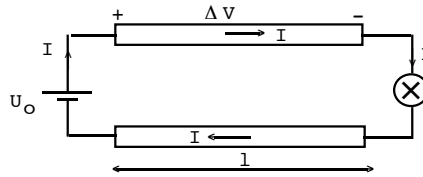
$$\text{och } \boxed{\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}} \text{ Poyntingvektorn, } [S] = \text{W/m}^2$$



Exempel: En dubbelledare med längden ℓ för likströmmen I från en generator med spänningen U_0 till en belastning. Beräkna värmeförlusterna i ledarna! Ledarnas radie är a .

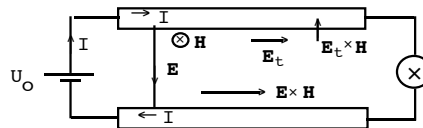
Kretsmässigt:

Strömmen I i kretsen ger effekt till belastningen ($P_{\text{last}} = R_{\text{last}} I^2$) med förluster i ledarna
 $P_{\text{ledare}} = 2(\Delta V)I = 2R_{\text{ledare}} I^2$



Fältmässigt: Poyntingvektorn ger effektflytet.

Den övre ledaren har högre potential än den undre, därav \mathbf{E} -fältets riktning i luften mellan ledarna.



Effektflydet sker utanför ledarna! Poyntingvektorn $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$ är riktad mot belastningen.

$\mathbf{E} \times \mathbf{H}$ integrerad över en yta runt belastningen ger effekt till denna.

Om vi har förlustfria ledare, $E=0$ i ledaren, går all effekt till lasten. Om vi har ledningsförluster, $E_t \neq 0$, får poyntingvektorn en komponent riktad in mot resp. ledare:

$$\mathbf{E}_t \times \mathbf{H} = -\hat{r} E_t H = -\hat{r} \frac{\Delta V}{\ell} \frac{I}{2\pi r}$$

Integrerat över ledarytorna får vi effekt **ut** från ledarna:

$$2 \oint \mathbf{E}_t \times \mathbf{H} \cdot d\mathbf{a} = -2 \frac{\Delta V}{\ell} \frac{I}{2\pi a} (2\pi a \ell) = -2 \Delta V I < 0, \text{ dvs effekten strömmar in i ledarna - värmeförluster som vid kretsmässig beräkning.}$$

Poyntingvektorn och Poyntings teorem diskuteras i avsnitt 8-5 i Cheng; (avsnitt 7-5 i Lilla Cheng)!

Kapitel 10

Komplexa fält. Plana vågor

Ersätter / kompletterar Cheng, avsnitt 7-7 till 8-3.2 samt 8-5; (6-5 till 7-3.2 samt 7-5 i Lilla Cheng)

Våra fysikaliska storheter, ström, spänning, elektrisk fältstyrka o.s.v. varierar ofta sinusformat i tiden. Vi kan förenkla räkningarna genom att övergå till komplexräkning.

10.1 Inledande exempel från kretstekniken

Betrakta den elektriska kretsen med en spänningskälla, med växelspänningen $v_g(t) = V_0 \cos \omega t$, i serie med resistansen R och induktansen L , se fig.! Beräkna strömmen i stationärtillståndet!

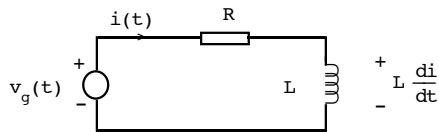


Fig 1

Kretsekvationen blir

$$v_g(t) = V_0 \cos \omega t = Ri(t) + L \frac{di}{dt} \quad (1)$$

Vi definierar nu komplexa storheter enligt

$$v(t) = V_0 \cos(\omega t + \beta) \rightarrow \bar{v} = V_0 e^{j\beta} \quad \text{och} \quad i(t) = I_0 \cos(\omega t + \alpha) \rightarrow \bar{i} = I_0 e^{j\alpha}$$

Komplexa toppvärden med cosinus som referens. Vi sätter streck över komplexa storheter!

Från komplex till motsvarande reella storhet kommer man enligt

$$v(t) = \text{Re} \{ \bar{v} e^{j\omega t} \} \quad (2)$$

Skriv nu $v_g(t)$ och $i(t)$ i ekv.(1) enligt mallen i ekv.(2)!

$$\text{Re} \{ \bar{v}_g e^{j\omega t} \} = R \cdot \text{Re} \{ \bar{i} e^{j\omega t} \} + L \cdot \frac{d}{dt} [\text{Re} \{ \bar{i} e^{j\omega t} \}] = \text{Re} \{ R \bar{i} e^{j\omega t} \} + \text{Re} \{ j\omega L \bar{i} e^{j\omega t} \}$$

ordningen på d/dt och $\text{Re}\{\}$ får kastas om

Denna ekvation ska gälla för alla t , d.v.s.

$$\bar{v}_g e^{j\omega t} = R \bar{i} e^{j\omega t} + j\omega L \bar{i} e^{j\omega t}$$

Vi förkortar bort faktorn $e^{j\omega t}$ och vår komplexa ekvation blir

$$\bar{v}_g = R \bar{i} + j\omega L \bar{i} \quad (3)$$

Vår diff.ekvation i tiden (1) har nu blivit en algebraisk ekvation (3), som är lätt att lösa i den komplexa världen.

Vi kan också tolka ekv.(3) och rita om kretsen i fig.1 som en komplex krets:

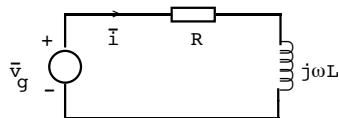


Fig 2

Den komplexa kretsen till fig 1

Lös ut den komplexa strömmen ur ekv.(3) eller fig.2!

$$\bar{i} = \frac{\bar{v}_g}{R + j\omega L} = \frac{V_0 e^{j0}}{R + j\omega L} = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} e^{j \arctan(\omega L/R)}}$$

Motsvarande tidsuttryck för strömmen i kretsen blir enligt ekv.(2):

$$\begin{aligned} i(t) &= \text{Re} \{ \bar{i} e^{j\omega t} \} = \text{Re} \left\{ \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} e^{j\omega t - j \arctan(\omega L/R)} \right\} = \\ &= \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \cos [\omega t - \arctan(\omega L/R)] \end{aligned}$$

OBS! Med detta sätt att räkna innehåller våra komplexa storheter $e^{j\omega t}$ eller faktorn $e^{j\omega t}$! Våra tidsuttryck innehåller $e^{j\omega t}$! Undantag från denna regel är enbart översättningen från komplext till tidsuttryck enligt ekv.(2).

10.2 Komplexa fält

Vi kan använda $j\omega$ -metoden också för fältstorheter. – Dela upp det godtyckliga reella vektorfältet $\mathbf{E}(\mathbf{R},t)$ i komponenter

$$\mathbf{E}(\mathbf{R},t) = \hat{x} E_x(\mathbf{R},t) + \hat{y} E_y(\mathbf{R},t) + \hat{z} E_z(\mathbf{R},t)$$

Vi begränsar oss till sinusformad variation i tiden och **en** frekvens. Vi antar också att E bara beror av z och t . För x-komponenten:

$$E_x(z,t) = E_{ox}(z) \cos[\omega t + \theta(z)]$$

På samma sätt som i kretstekniken definierar vi nu motsvarande **komplexa** fält

$$\bar{E}_x(z) = E_{ox}(z) e^{j\theta(z)}$$

Övergång till tidsuttryck $E_x(z,t) = \text{Re} \{ \bar{E}_x(z) e^{j\omega t} \}$

Motsvarande gäller för E-fältets y- och z-komponenter.

Maxwells ekvationer i reell form

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \times \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \quad \mathbf{J}_{(\text{fri})} = \sigma \mathbf{E} \\ \text{för linjära isotropa homogena material} \end{array}$$

får nu nedanstående utseende genom byte av $\partial/\partial t$ mot $j\omega$ och reella fält mot komplexa.

Maxwells ekvationer i komplex form:

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \times \bar{\mathbf{E}} = -j\omega \bar{\mathbf{B}} = -j\omega\mu \bar{\mathbf{H}} \\ \nabla \times \bar{\mathbf{H}} = \bar{\mathbf{J}} + j\omega \bar{\mathbf{D}} = (\sigma + j\omega\epsilon) \bar{\mathbf{E}} \\ \nabla \cdot \bar{\mathbf{D}} = \epsilon \nabla \cdot \bar{\mathbf{E}} = \bar{\rho} \\ \nabla \cdot \bar{\mathbf{B}} = \mu \nabla \cdot \bar{\mathbf{H}} = 0 \end{array} \right.$$

10.2.1 Polariseringstyp mm

Några uttryck som beskriver vågen och det material, i vilket vågutbredningen sker:

Laddningsfritt medium: $\rho = 0$, **förlustfritt** medium: $\sigma = 0$

En förlustfri isolator har $\sigma = 0$, en förlustfri ledare har $\sigma = \infty$.

homogent medium: ϵ, σ, μ är rumsberoende.

Monokromatisk våg: en frekvens, **plan** våg: E och H konstanta på plan vinkelräta mot utbredningsriktningen.

TE-våg: transversellt elektriskt fält, E är vinkelrätt mot vågens utbredningsriktning. Motsvarande gäller för magnetfältet H i **TM**-vågen samt för E och H i **TEM**-vågen.

Vågens **polarisationstyp**: E-vektorns riktning.

Exempel:

$$\mathbf{E} = \hat{x} E_{x0} \cos(\omega t - \beta z) + \hat{y} E_{y0} \cos(\omega t - \beta z - \pi/2)$$

Spetsen av E-vektorn beskriver en ellips. Vi har en elliptiskt polariserad våg (cirkulärt om $E_{x0} = E_{y0}$).

Om $E_{y0} = 0$ har vi en **linjärt** polariserad våg. E ligger i \hat{x} -led.

10.2.2 Vågekvationen och dess lösning

För ett laddningsfritt medium, $\rho = 0$, får vi differentialekvationen för E så här:

Tag $\nabla \times$ på Maxwellekvationen för $\nabla \times \bar{\mathbf{E}}$:

$$\nabla \times (\nabla \times \bar{\mathbf{E}}) = \nabla (\nabla \cdot \bar{\mathbf{E}}) - \nabla^2 \bar{\mathbf{E}} = -j\omega\mu \nabla \times \bar{\mathbf{H}} = -j\omega\mu(\sigma + j\omega\epsilon) \bar{\mathbf{E}}$$

vektorformel

där vi har använt Maxwellekv. för $\nabla \times \bar{\mathbf{H}}$. Sätt nu in $\nabla \cdot \bar{\mathbf{E}} = 0$, så får vi **vågekvationen**

$$\nabla^2 \bar{\mathbf{E}} - \gamma^2 \bar{\mathbf{E}} = 0 \quad \text{med} \quad \gamma = \sqrt{j\omega\mu(\sigma + j\omega\epsilon)}$$

vågutbrednings-
konstanten

I specialfallet linjärt polariserad **plan** våg i z-riktningen med E i x-riktningen får vi

$$\frac{d^2 \bar{E}_x(z)}{dz^2} - \gamma^2 \bar{E}_x(z) = 0 \quad \text{med lösningen}$$


$$\bar{E}_x(z) = E_x^+(0) e^{j\theta^+} e^{-\gamma z} + E_x^-(0) e^{j\theta^-} e^{\gamma z}$$

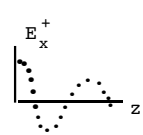
komplexa integrationskonstanter
(belopp, fasvinkel)

Inför $\gamma = \alpha + j\beta$ så blir **tidsuttrycket** för E

$\alpha =$ dämpkonstant, $\beta =$ faskonstant

$$E_x(z, t) = \text{Re} \{ \bar{E}_x(z) e^{j\omega t} \} = \dots = \underbrace{E_x^+(0) e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z + \theta^+)}_{\text{våg i } +\hat{z}\text{-riktningen (index +)}} + \underbrace{E_x^-(0) e^{\alpha z} \cos(\omega t + \beta z + \theta^-)}_{\text{våg i } -\hat{z}\text{-riktningen (index -)}}$$





10.2.3 Samband mellan E och H för plan våg

Sätt in lösningen ovan $\bar{\mathbf{E}}_x = \bar{E}_x^+ + \bar{E}_x^- = \bar{E}_{x0}^+ e^{-\gamma z} + \bar{E}_{x0}^- e^{\gamma z}$
i Maxwellekvationen $\nabla \times \bar{\mathbf{E}} = -j\omega\mu \bar{\mathbf{H}}$.

$$-j\omega\mu \bar{\mathbf{H}} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ \bar{E}_x & 0 & 0 \end{vmatrix} = \hat{y} \frac{\partial}{\partial z} \bar{E}_x = \hat{y} [-\gamma \bar{E}_{x0}^+ e^{-\gamma z} + \gamma \bar{E}_{x0}^- e^{\gamma z}] =$$

$$= \hat{y} [-\gamma \bar{E}_x^+ + \gamma \bar{E}_x^-] \quad \Rightarrow \quad \bar{\mathbf{H}} = \hat{y} \frac{1}{j\omega\mu} \bar{E}_x^+ - \hat{y} \frac{1}{j\omega\mu} \bar{E}_x^-$$

Inför vågimpedansen $Z = j\omega\mu/\gamma$

$$\Rightarrow \bar{H}_y^+ = \bar{E}_x^+ / Z \quad \text{och} \quad \bar{H}_y^- = -\bar{E}_x^- / Z$$

eller mer generellt för en plan våg i \hat{k} -riktningen

$$\bar{\mathbf{H}}(\mathbf{R}) = \frac{1}{Z} \hat{k} \times \bar{\mathbf{E}}(\mathbf{R}) \quad \text{eller} \quad \bar{\mathbf{E}}(\mathbf{R}) = Z \bar{\mathbf{H}}(\mathbf{R}) \times \hat{k}$$

En bakåtgående våg utbreder sig i $-\hat{k}$ -riktningen!

där **vågimpedansen** $Z = \frac{j\omega\mu}{\gamma} = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma + j\omega\epsilon}}$

Ansatz: Vi behöver inte lösa Maxwells ekvationer eller vågekvationen gång på gång, utan kan direkt ansätta en lösning. Om det t.ex. är givet en linjärt polariserad plan våg i z-riktningen ansätter vi

$$\bar{E}_x(z, t) = E_x^+(0) e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z + \theta^+) \quad \text{eller komplext}$$

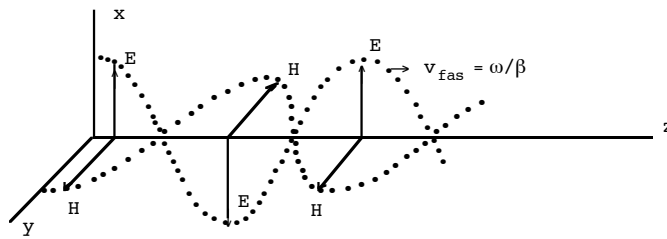
$$\bar{E}_x(z) = \bar{E}_x^+(0) e^{-(\alpha + j\beta)z}, \quad \bar{\mathbf{H}} \text{ fås av } \bar{\mathbf{H}} = \frac{1}{Z} \hat{k} \times \bar{\mathbf{E}}$$

$\bar{E}_x^+(0)$ är given på ett eller annat sätt i problemet. Återstår att beräkna konstanterna α , β och Z . - Dessa beror av material och frekvens.

10.2.4 Skiss av E och H för en plan våg i z-riktningen

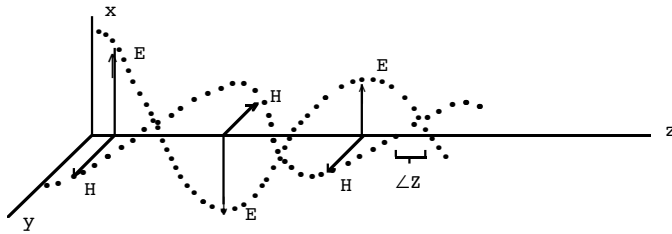
a/ förlustfritt, $\sigma = 0$, ingen dämpning, E och H ligger i fas.

$$\begin{cases} E_x = E_0 \cos(\omega t - \beta z) \\ H_y = H_0 \cos(\omega t - \beta z) \end{cases}$$



b/ material med förluster, dämpning av E och H, fäsförskjutning mellan E och H

$$\begin{cases} E_x = E_0 e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z) \\ H_y = \frac{E_0}{|Z|} e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z - \angle Z) \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{OBS! Fäsförskjutning mellan E och H.} \\ \text{H ligger efter E i fas, se fig.!} \end{array}$$



10.2.5 Beräkning av γ , α , β och Z

$\gamma^2 = j\omega\mu(\sigma + j\omega\epsilon)$ ligger i 2:a kvadranten i det komplexa planet. Vi väljer för entydighets skull att låta γ ligga i 1:a kvadranten. Då får vi vågimpedansen $Z = j\omega\mu/\gamma$ att ligga enligt figuren.

$$0 \leq \angle Z \leq \pi/4 \quad \begin{array}{c} \text{Im} \\ \gamma \\ Z \\ \text{Re} \end{array}$$

Beräkning av α och β :

$$\gamma^2 = j\omega\mu(\sigma + j\omega\epsilon) = \alpha^2 - \beta^2 + j2\alpha\beta \quad \text{med} \quad \alpha \geq 0, \beta > 0$$

Dela upp ekvationen i Re- och Im-delar \Rightarrow Två reella ekvationer och två obekanta α och β . Lösningen blir

$$\left. \begin{array}{l} \alpha \\ \beta \end{array} \right\} = \omega \sqrt{\frac{\epsilon\mu}{2}} \sqrt{\sqrt{1 + (\sigma/\omega\epsilon)^2} \mp 1} \quad \text{dämp- och faskonstant}$$

Kontrollera alltid storleksordningen på $\sigma/\omega\epsilon$ vid beräkning av γ och Z! Man har ofta något av nedanstående tre **specialfall**:

a/ **Förlustfritt** medium, d.v.s. $\sigma = 0$

utbredningskonstanten γ och vågimpedansen Z:

$$\gamma = \sqrt{j\omega\mu(\sigma + j\omega\epsilon)} = j\omega\sqrt{\mu\epsilon} = \alpha + j\beta \quad \Rightarrow \quad \alpha = 0$$

ingen dämpning av vågen

$$Z = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma + j\omega\epsilon}} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \quad \text{rent reell} \quad \text{ingen fäsförskjutning mellan E och H}$$

$$Z = Z_0 = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0} \quad \text{för vakuum}$$

b/ $\sigma/\omega\epsilon \gg 1$ Normalfallet för metaller– gäller upp till optiska frekvenser $\approx 10^{14}$ à 10^{15} Hz –

$$\gamma = \sqrt{j\omega\mu(\sigma + j\omega\epsilon)} \approx \sqrt{j\omega\sigma\mu} = (1+j)\sqrt{\frac{\omega\sigma\mu}{2}} \Rightarrow \alpha_{\text{metall}} = \beta_{\text{metall}}$$

försu-
mas

$$\gamma_{\text{metall}} = (1+j)\sqrt{\frac{\omega\sigma\mu}{2}} \quad \text{om } \sigma \gg \omega\epsilon$$

inträngningsdjupet $\delta = 1/\alpha$
 δ definieras senare

$$\delta_{\text{metall}} = \sqrt{\frac{2}{\omega\sigma\mu}} \quad \text{om } \sigma \gg \omega\epsilon$$

Vågimpedansen

$$Z = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma + j\omega\epsilon}} \approx \sqrt{j\omega\mu/\sigma} = (1+j)\sqrt{\frac{\omega\mu\epsilon_0}{2\sigma\epsilon_0}} = (1+j)\sqrt{\frac{\omega\mu_r\epsilon_0}{2\sigma}} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}$$

förs

$$Z_{\text{metall}} = (1+j)\sqrt{\frac{\omega\mu_r\epsilon_0}{2\sigma}} Z_0 = (1+j)a Z_0$$

om $\sigma \gg \omega\epsilon_0$

där $a = \sqrt{\frac{\omega\mu_r\epsilon_0}{2\sigma}} \ll 1$, om $\sigma \gg \omega\mu_r\epsilon_0 \Rightarrow |Z_{\text{metall}}| \ll Z_0$
 $\sigma \gg \omega\mu_r\epsilon_0$

c/ $\sigma/\omega\epsilon \ll 1$ Dielektrikum med små förluster

$$\gamma = j\omega\sqrt{\mu\epsilon} \sqrt{1 + \sigma/j\omega\epsilon} \approx j\omega\sqrt{\mu\epsilon} [1 + \sigma/2j\omega\epsilon] = \alpha + j\beta$$

$$\alpha \approx \frac{\sigma}{2}\sqrt{\mu/\epsilon} \quad \alpha \text{ liten, } \beta \approx \omega\sqrt{\mu\epsilon} \text{ (som för förlustfritt mtrl)}$$

$$Z = \dots \approx \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \left(1 + j \frac{\sigma}{2\omega\epsilon}\right) \quad \text{En liten imaginärdel i } Z \text{ betyder en liten fasförskjutning mellan } E \text{ och } H$$

Exempel: En plan våg utbreder sig i ett material med $\sigma = 0,5$ S/m, $\epsilon_r = 9$, $\mu_r = 1$ och $f = 10^9$ Hz. Beräkna dämpkonstanten α , faskonstanten β och vågimpedansen Z !

Lösning: $\gamma = \sqrt{j\omega\mu(\sigma + j\omega\epsilon)} = \alpha + j\beta, \quad Z = j\omega\mu/\gamma$

Kolla storleksordningen på $\sigma/\omega\epsilon$:

$$\frac{\sigma}{\omega\epsilon} = \frac{0,5}{2\pi \cdot 10^9 \cdot \frac{9 \cdot 10^{-9}}{36\pi}} = 1, \quad \text{exakt beräkning fordras}$$

$$\gamma = \sqrt{j2\pi \cdot 10^9 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} (0,5 + j0,5)} = \sqrt{4\pi^2 \cdot 10^2 e^{j90^\circ} \sqrt{2} e^{j45^\circ}} = 20\pi 2^{1/4} e^{j67,5^\circ} = 28,6 + j69,0 = \alpha + j\beta$$

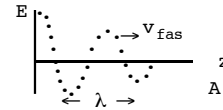
$$Z = \frac{j2\pi \cdot 10^9 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7}}{20\pi \cdot 2^{1/4} e^{j67,5^\circ}} = \frac{40\pi}{2^{1/4}} e^{j22,5^\circ} = 106 e^{j22,5^\circ} \Omega$$

10.2.6 Fashastighet och våglängd

Betrakta vågen med $E = E_0 e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z + \theta)$.

Hastighet för punkter med konstant fas:

$$\omega t - \beta z + \theta = \text{konst}, \quad dz/dt = v_{\text{fas}} \quad \boxed{v_{\text{fas}} = \omega/\beta}$$



Våglängd: avstånd mellan punkter med fasskillnad 2π ,

d.v.s. $\beta\lambda = 2\pi$

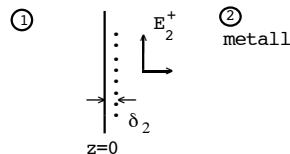
$$\boxed{\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{v_{\text{fas}}}{f}}$$

10.2.7 Skineffekt vid plan vågs inträngande i metall. Inträngningsdjup

När en plan våg tränger in i ett material med konduktiviteten σ , får vi ett E-fält -index 2 för material 2.

$$E_2^+ = E_{20}^+ e^{-\alpha_2 z} \cos(\omega t - \beta_2 z + \varphi_2^+)$$

Vågen dämpas med en faktor $e^{-\alpha_2 z}$



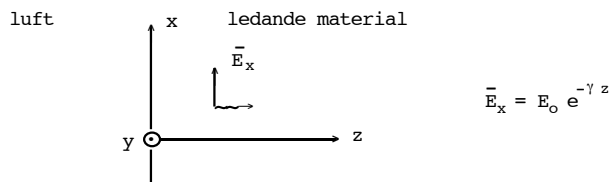
På djupet $z = \delta = 1/\alpha_2$, $\delta =$ **inträngningsdjupet**, har vågens amplitud fallit till $1/e = 37\%$ av amplituden vid $z=0$. $\boxed{\delta = 1/\alpha}$

För metall gäller $\delta_{\text{metall}} = \sqrt{2/\omega\sigma\mu}$.

För koppar: $\delta_{50\text{Hz}} = 9,3 \text{ mm}$, $\delta_{1\text{MHz}} = 0,066 \text{ mm}$

Vågen tränger bara in en liten bit i materialet. Detta kan man utnyttja för att skärma av tidvariabla fält!

10.2.8 Ytströmtäthet och ytimpedans



Låt en plan våg med $E = \hat{x}E(z)$ tränga in i ett ledande material, $z > 0$, se fig.! Vågen dämpas snabbt i z -led, om inträngningsdjupet är litet. Eftersom materialet är ledande får vi en ström i x -led. Komplex

$$\bar{E}_x = E_0 e^{-\gamma z} \quad \text{och} \quad \text{strömtätheten} \quad \bar{J}_x = \sigma \bar{E}_x$$

Ström i x -riktningen på bredden l_y i y -led:

$$\bar{I}_x = \int \bar{J} \cdot d\mathbf{s} = \int_{y=0}^{l_y} \int_{z=0}^{\infty} \sigma E_0 e^{-\gamma z} \hat{x} \cdot \hat{x} dy dz = \frac{l_y}{\gamma} \sigma E_0$$

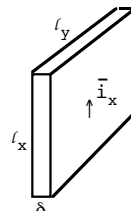
Impedansen för materialet med längd l_x i x -led och bredd l_y blir

$$Z = \frac{\bar{V}}{\bar{I}_x} = \frac{E_0 l_x}{l_y \frac{\sigma}{\gamma} E_0} = \frac{l_x \gamma}{l_y \sigma}$$

Om $\sigma \gg \omega\epsilon$ blir $\gamma = (1+j)\frac{1}{\delta}$, där inträngningsdjupet $\delta = \sqrt{2/\omega\sigma\mu}$

$$Z = \frac{l_x (1+j)}{l_y \sigma \delta} = R_i (1+j)$$

R_i = resistansen för en skiva med längden l_x , bredden l_y , tjockleken δ



Vid **litet inträngningsdjup** kan man tänka sig i_x koncentrerad till materialets yta, en **ytströmstäthet** \bar{J}_{sx} (A/m).

$$\bar{J}_{sx} = \frac{\sigma}{\gamma} E_0 \quad \text{och} \quad \text{ytimpedansen} \quad Z_s = \frac{E_0}{\bar{J}_{sx}} = \frac{\gamma}{\sigma} = \frac{1+j}{\sigma\delta} = R_s(1+j)$$

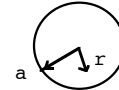
där **ytresistansen** $R_s = 1/\sigma\delta$ – Resistans för en skiva med längden $\ell_x = 1$ och bredden $\ell_y = 1$.

Samband ström – ytströmstäthet: $\bar{i}_x = \bar{J}_{sx}\ell_y$
 ℓ_y enda dimensionen vinkelrätt mot ytströmstätheten \bar{J}_{sx} !

10.2.9 Skineffekt i rund tråd

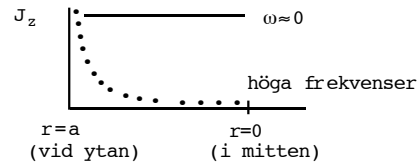
Växelströmsresistans för strömförande ledare:

Växelströmmen $i = I_0 \cos \omega t$ flyter i z-riktningen i en cylindrisk ledare med radien a . Vid likström och lågfrekvent växelström är strömmen jämnt fördelad över tvärsnittsytan, d.v.s. strömstätheten $J_z = i/\pi a^2$



En ström som varierar i tiden ger ett variabelt H_φ -fält. Detta ger i sin tur ett inducerat E_z -fält och en inducerad strömstäthet. Strömmen blir inte längre jämnt fördelad över tvärsnittsytan. Man kan beräkna strömstätheten genom att lösa Maxwells ekvationer för problemet. Lösningen blir i form av Besselfunktioner. Se skiss av strömstätheten för två fall!

låga frekvenser: jämn ström-fördelning över ytan
höga frekvenser: $J \rightarrow 0$ inne i ledaren



Vi använder oss av serieutvecklingar av Besselfunktioner för låga resp. höga frekvenser. Bara resultatet anges nedan.

a/ Låga frekvenser

Approximationen gäller för

$$a \ll \delta, \text{ där } \delta = \sqrt{2/\omega\sigma\mu}$$

δ = inträngningsdjupet

Strömstätheten J blir konstant.

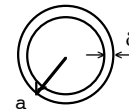
Man kan räkna med samma resistans som vid likström

$$R = \frac{\ell}{\sigma\pi a^2}$$

b/ höga frekvenser,

$$a \gg \delta$$

Så gott som hela strömmen flyter i ett tunt skikt vid ledarens yta och $J \approx 0$ i resten av ledaren.



Växelströmsresistansen blir

$$R = \frac{\ell}{\sigma 2\pi a \delta}$$

=likströmsresistansen för det tunna skiktet med tjockleken δ vid ledarens yta. **Felet** är mindre än 10% för $\delta < a/6$

Vid mycket höga frekvenser flyter all ström på ledarens yta.

OBS!! Kontrollera alltid storleksordningen på δ/a vid beräkning av växelströmsimpedans!

10.2.10 Poyntingvektorn för plan våg

Betrakta en linjärt polariserad plan våg i ett material kännetecknat av konstanterna ϵ , μ och σ . Vi väljer \hat{z} som utbredningsriktning och $\mathbf{E} = \hat{x}E_x$, $\mathbf{H} = \hat{y}H_y$ och antar

$$E_x = E_0 e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z), \quad H_y = \frac{E_0 e^{-\alpha z}}{|Z|} \cos(\omega t - \beta z - \angle Z)$$

med α, β och Z enligt avsnitt 10.2.5.

Effekt per ytenhet överförd av vågen, d.v.s. poyntingvektorn (ögonblicksvärdet)

$$\begin{aligned} \mathbf{S}(z, t) &= \mathbf{E} \times \mathbf{H} = \hat{z} \frac{E_0^2 e^{-2\alpha z}}{|Z|} \cos(\omega t - \beta z) \cos(\omega t - \beta z - \angle Z) = \\ &= \hat{z} \frac{E_0^2 e^{-2\alpha z}}{|Z|} \cdot \frac{1}{2} [\cos(2\omega t - 2\beta z - \angle Z) + \cos(\angle Z)] \end{aligned} \quad \begin{array}{l} \text{trig.} \\ \text{formel} \end{array}$$

Tidsmedelvärde över en period $T = 1/f = 2\pi/\omega$

$$\frac{1}{T} \int_0^T \cos(2\omega t - \dots) dt = 0$$

Tidsmedelvärde av poyntingvektorn, (även index av = average):

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{\text{med}}(z) &= \hat{z} \frac{E_0^2 e^{-2\alpha z}}{2|Z|} \cos \angle Z \quad (\text{W/m}^2) \quad (1) \\ &= = = = = = = \end{aligned}$$

Poyntingvektorn är riktad i vågens utbredningsriktning!

För förlustfria material (dvs då $\sigma=0$) blir vågimpedansen Z rent reell $Z = \sqrt{\mu/\epsilon}$ och $\alpha=0$.

Plan våg i vakuum: $\mathbf{S}_{\text{med}} = \frac{E_0^2}{2Z_0}$	$\text{W/m}^2 \quad (2)$
---	--------------------------

10.2.11 Komplex poyntingvektor. Effektförlust och energitäthet med komplexa fält

Vi kan beräkna poyntingvektorns medelvärde direkt med komplexa storheter.

Den komplexa poyntingvektorn definieras som $\bar{\mathbf{S}} = \bar{\mathbf{E}} \times \bar{\mathbf{H}}^*$.

* = komplexkonjugat

För vår plana våg i z-led enligt ovan får vi motsvarande komplexa fält

$$\bar{\mathbf{E}}_x = E_0 e^{-(\alpha+j\beta)z} \quad \text{och} \quad \bar{\mathbf{H}}_y = \frac{E_0 e^{-(\alpha+j\beta)z}}{Z}$$

Den komplexa poyntingvektorn blir

$$\bar{\mathbf{S}} = \bar{\mathbf{E}} \times \bar{\mathbf{H}}^* = \hat{z} E_0^2 \frac{e^{-(\alpha+j\beta)z} e^{-(\alpha-j\beta)z}}{Z^*} = \hat{z} E_0^2 \frac{e^{-2\alpha z}}{|Z| e^{-j\angle Z}}$$

Beräkna nu

$$\frac{1}{2} \text{Re}\{\bar{\mathbf{S}}\} = \hat{z} \frac{E_0^2 e^{-2\alpha z}}{2|Z|} \text{Re}\{e^{j\angle Z}\} = \hat{z} \frac{E_0^2 e^{-2\alpha z}}{2|Z|} \cos \angle Z = \mathbf{S}_{\text{med}}(z)$$

d.v.s. poyntingvektorns tidsmedelvärde enligt ekv.(1) på s. 60

Vi har visat sambandet för specialfallet plan våg, men det gäller även generellt för komplexa elektromagnetiska fält.

Således: komplex poyntingvektor

$$\bar{\mathbf{S}} = \bar{\mathbf{E}} \times \bar{\mathbf{H}}^*$$

medelvärde av effekt per ytenhet

$$\mathbf{S}_{\text{med}} = \frac{1}{2} \text{Re}\{\bar{\mathbf{E}} \times \bar{\mathbf{H}}^*\} \quad (\text{W/m}^2)$$

På samma sätt kan tidsmedelvärdet av **effektförlusten** i ett material med ledningsströmtätheten \mathbf{J}_{fri} skrivas

$$P_{\text{förlust, medel}} = \frac{1}{2} \int \text{Re} \{ \bar{\mathbf{E}} \cdot \bar{\mathbf{J}}_{\text{fri}}^* \} dv \quad (\text{W})$$

Medelvärde av **energitäthet**
$$w_{\text{medel}} = \frac{1}{4} \epsilon \bar{\mathbf{E}} \cdot \bar{\mathbf{E}}^* + \frac{1}{4} \mu \bar{\mathbf{H}} \cdot \bar{\mathbf{H}}^* \quad (\text{Ws/m}^3)$$

1/2 extra i uttrycken beror på att vi räknar med komplexa fält i toppvärdesskala.

För två kopplade kretsar blir medelvärdet av den magnetiska energin:

$$W_{\text{m, medel}} = \frac{1}{4} L_1 |\bar{I}_1|^2 + \frac{1}{4} L_2 |\bar{I}_2|^2 + \frac{1}{2} \text{Re} \{ M \bar{I}_1 \bar{I}_2^* \}$$

10.2.12 Plan våg i godtycklig riktning

För en plan våg i riktningen $\hat{\mathbf{k}}$ kan E-fältet skrivas

$$\bar{\mathbf{E}}(\mathbf{R}) = \bar{\mathbf{E}}(0) e^{-\gamma \hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{R}} \quad \text{H fås av } \bar{\mathbf{H}}(\mathbf{R}) = \hat{\mathbf{k}} \times \bar{\mathbf{E}}(\mathbf{R}) / Z$$

Villkoren $\mathbf{E} \perp \hat{\mathbf{k}}$ och $\mathbf{E} \perp \mathbf{H}$ blir i komplex form

$$\hat{\mathbf{k}} \cdot \bar{\mathbf{E}}(0) = 0 \quad \text{och} \quad \text{Re} \{ \bar{\mathbf{E}} \cdot \bar{\mathbf{H}}^* \} = 0$$

Exempel: För en plan våg i vakuum gäller $\bar{E}_x = E_0 e^{-j\beta(y \sin \varphi + z \cos \varphi)}$

I vilken riktning $\hat{\mathbf{k}}$ utbreder sig vågen?

För vakuum gäller $\gamma = j\beta \Rightarrow \gamma \hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{R} = j\beta \hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{R} = j\beta (y \sin \varphi + z \cos \varphi)$

$\mathbf{R} = (x, y, z)$, d.v.s. $\hat{\mathbf{k}} = (0, \sin \varphi, \cos \varphi)$

Kursboken (Cheng) inför först vågtalet k (= vårt β) vid förlustfria material och byter sedan beteckning $\gamma = \alpha + j\beta$ vid material med förluster. Vi använder $\gamma = \alpha + j\beta$ generellt. Förlustfria material blir då bara ett specialfall, som har $\alpha=0$.

10.2.13 Fashastighet och grupphastighet

a/ För plana vågor i förlustfritt material är fashastigheten $v_{\text{fas}} = \omega / \beta = 1 / \sqrt{\mu \epsilon}$ oberoende av ω . Alla frekvenser överförs lika snabbt (ingen förvrängning av signalen).

$v_{\text{grupp}} = v_{\text{fas}}$ för dessa vågor.

b/ För plana vågor i material med förluster (d.v.s. för $\sigma \neq 0$), för vågor på ledningar och vågledare får vi $v_{\text{fas}} = v_{\text{fas}}(\omega)$. Man får förvrängning (distortion) av signalen. Det kallas för dispersion (=spridning).

c/ Grupphastighet, överföringshastighet för ett litet frekvenspaket $\Delta\omega$.

Överförd information ligger i $\Delta\omega$ runt en bärvåg med hög vinkelfrekvens ω_0 .

$$\text{Grupphastigheten } v_{\text{grupp}} = \frac{1}{d\beta/d\omega}$$

Härleds i Cheng genom addition av två vågor med vinkelfrekvenser $\omega_0 + \Delta\omega$ resp. $\omega_0 - \Delta\omega$. Se avsnitt 8-4 och fig 8-6; (avsnitt 7-4 och fig 7-6 i Lilla Cheng)!

Motsvarande fenomen har man för ljudvågor (mekaniska vågor). När man stämmer ett stränginstrument adderas tonen från stämgaflöj och tonen från strängen. När tonerna ligger nära i frekvens hör man ett brummande som beror på skillnaden i frekvens. Fenomenet kallas **svävning**. När svävningen upphör ger strängen och stämgaflöj samma frekvens. Man får svävningar för övertoner också.

10.2.14 Icke-plana vågor

Uttrycken för γ , α , β och Z förutsätter att vi har **plana vågor** eller TEM-vågor (TEM = transversellt E- och H-fält) !!

För **icke-plana** vågor: Använd Maxwells ekvationer eller vågekvationen (i reell eller komplex form)! Se t.ex. uppgift 12-3 eller 12-17 i Exempelsamlingen!

Kapitel 11

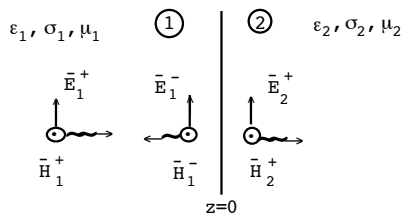
Reflexion och transmission

11.1 Reflexion och transmission vid vinkelrätt infall

En våg infaller mot ett material. $\sim \rightarrow$ | Vågens E-fält, plus det nya fält som uppkommer, får laddningarna i materialet att oscillera. Detta ger upphov till nya fält och vågor. $\leftarrow \sim$ | $\sim \rightarrow$ Resulterande fält blir både fasförskjutna och amplitudförändrade relativt den infallande vågens fält.

11.1.1 E- och H-fälten vid infall mot en gränssyta

En plan linjärt polariserad våg infaller från material 1, vinkelrätt mot den plana gränssytan, $z=0$, till material 2. Se fig.!



Infallande våg $E_1^+ = E_{10}^+ e^{-\alpha_1 z} \cos(\omega t - \beta_1 z)$ eller i komplex form

$$\bar{E}_1^+(z) = \bar{E}_{10}^+ e^{-\gamma_1 z} \quad (1) \quad [\bar{E}_{10}^+ = E_{10}^+ e^{j0^\circ} \text{ rent reell här}]$$

$$\bar{E}_1^-(z) = \bar{E}_{10}^- e^{\gamma_1 z} \quad (2) \quad \text{reflekterad våg i material 1}$$

$$\bar{E}_2^+(z) = \bar{E}_{20}^+ e^{-\gamma_2 z} \quad (3) \quad \begin{array}{l} \text{transmitterad våg} \\ \text{Index 2 gäller mtrl 2. Ingen reflekterad} \\ \text{våg där, ty oändligt utsträckt i +z-led} \end{array}$$

$\bar{H} = \frac{1}{Z} \hat{k} \times \bar{E}$ ger oss tillhörande komplexa H-fält:

$$\bar{H}_1^+(z) = \frac{\bar{E}_{10}^+}{Z_1} e^{-\gamma_1 z}, \quad \bar{H}_1^-(z) = -\frac{\bar{E}_{10}^-}{Z_1} e^{\gamma_1 z} \quad \text{och} \quad \bar{H}_2^+(z) = \frac{\bar{E}_{20}^+}{Z_2} e^{-\gamma_2 z}$$

Vi har randvillkor på tangentialkomponenterna av E och H vid gränssytan. Både E_x och H_y är tangentiella här.

$$\bar{E}_1^+(z=0) + \bar{E}_1^-(z=0) = \bar{E}_2^+(z=0) \quad \Rightarrow \quad \bar{E}_{10}^+ + \bar{E}_{10}^- = \bar{E}_{20}^+ \quad (4)$$

$$\bar{H}_1^+(z=0) + \bar{H}_1^-(z=0) = \bar{H}_2^+(z=0) \quad \Rightarrow \quad \frac{\bar{E}_{10}^+}{Z_1} - \frac{\bar{E}_{10}^-}{Z_1} = \frac{\bar{E}_{20}^+}{Z_2} \quad (5)$$

Ekvation (4) och (5) ger nu

$$\boxed{\frac{\bar{E}_{10}^-}{\bar{E}_{10}^+} = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1} = r_{12}} \quad (6) \quad \text{reflexionskoefficient}$$

$$\boxed{\frac{\bar{E}_{20}^+}{\bar{E}_{10}^+} = \frac{2 Z_2}{Z_2 + Z_1} = t_{12}} \quad (7) \quad \text{transmissionskoefficient}$$

Om material 1 eller 2 har konduktiviteten σ , blir vågimpedansen Z komplex. Då blir också reflexions- och transmissionskoefficienterna r och t komplexa!

Inför de komplexa r_{12} och t_{12} och γ_2 i ekv (2) och (3).

$$r_{12} = |r_{12}| e^{j\angle r_{12}}, \quad t_{12} = |t_{12}| e^{j\angle t_{12}}, \quad \gamma_2 = \alpha_2 + j\beta_2$$

Fälten kan skrivas på reell form enligt mallen $E(z,t) = \text{Re} \{ \bar{E} e^{j\omega t} \}$. Vi får

$$E_1^+(z,t) = E_{10}^+ e^{-\alpha_1 z} \cos(\omega t - \beta_1 z) \quad \text{infallande våg i 1} \quad (8)$$

$$E_1^-(z,t) = |r_{12}| E_{10}^+ e^{\alpha_1 z} \cos(\omega t + \beta_1 z + \angle r_{12}) \quad \text{refl. våg i 1} \quad (9)$$

$$E_2^+(z,t) = |t_{12}| E_{10}^+ e^{-\alpha_2 z} \cos(\omega t - \beta_2 z + \angle t_{12}) \quad \text{våg transmitterad till 2} \quad (10)$$

alla E-fälten i \hat{x} -led

\bar{H} -fälten varierar på motsvarande sätt. Vi har dock ett komplext $Z = |Z| e^{j\angle Z}$ i nämnaren att tänka på, när vi byter ut \bar{H} mot \bar{E} / Z .

Tidsuttrycken för H-fälten blir:

$$H_1^+(z,t) = \frac{E_{10}^+}{|Z_1|} e^{-\alpha_1 z} \cos(\omega t - \beta_1 z - \angle Z_1) \quad (11)$$

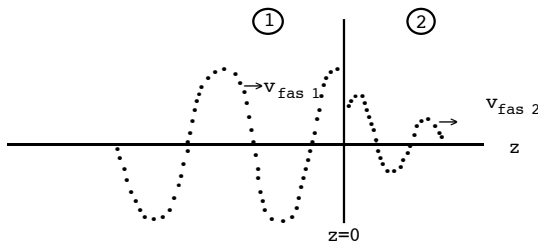
$$H_1^-(z,t) = -|r_{12}| \frac{E_{10}^+}{|Z_1|} e^{\alpha_1 z} \cos(\omega t + \beta_1 z + \angle r_{12} - \angle Z_1) \quad (12)$$

$$H_2^+(z,t) = |t_{12}| \frac{E_{10}^+}{|Z_2|} e^{-\alpha_2 z} \cos(\omega t - \beta_2 z + \angle t_{12} - \angle Z_2) \quad (13)$$

alla i \hat{y} -led

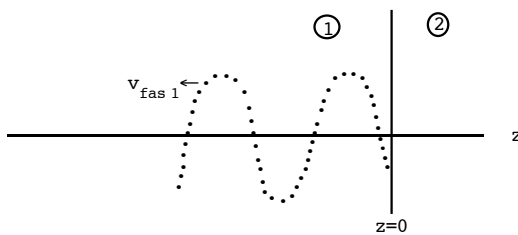
Nu har vi färdiga lösningar för fälten, ekv (8) - (10) och (11) - (13). Vi behöver "bara" lägga ner arbete på att beräkna de komplexa storheter som ingår: $\gamma_1, \gamma_2, Z_1, Z_2, r_{12}$ och t_{12} !

Skiss av E-fälten då en plan våg infaller från **luft** mot ledande material:



$$E_1^+ = E_{10}^+ \cos(\omega t - \beta_1 z) \quad E_2^+ = E_{10}^+ |t_{12}| e^{-\alpha_2 z} \cos(\omega t - \beta_2 z + \angle t_{12})$$

Den reflekterade vågen i material 1:



$$E_1^- = E_{10}^+ |r_{12}| \cos(\omega t + \beta_1 z + \angle r_{12})$$

Observera att fashastighet, våglängd o.s.v. är olika i de två materialen! De beror av α och β , som i sin tur **beror av ϵ, μ och σ för respektive material!**

11.1.2 Beräkning av reflexions- och transmissionskoefficienterna

Vågen infaller oftast från vakuum eller luft mot ett material. Det är lämpligt att införa Z_0 i uttrycket för Z_2 .

1/ Infall från vakuum mot **förlustfritt** material:

$$Z_2 = \sqrt{\mu_r/\epsilon_r} Z_0 \quad Z \text{ är reell, d.v.s. } r \text{ och } t \text{ blir reella.}$$

2/ Infall från vakuum mot **metall**

För metall gäller ofta att $|Z_2| \ll Z_0$ (kolla först om detta är uppfyllt i problemet)

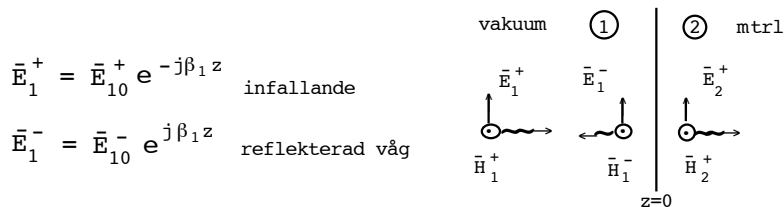
Vi kan approximera:

$$r_{12} = \frac{Z_2 - Z_0}{Z_2 + Z_0} \approx - \left(1 - 2\frac{Z_2}{Z_0}\right) \quad \text{och} \quad t_{12} = \frac{2Z_2}{Z_2 + Z_0} \approx 2\frac{Z_2}{Z_0}$$

$|Z_2/Z_0| \ll 1$ och $|r_{12}|$ blir ungefär 1. Nästan allt reflekteras, bara en liten del transmitteras ($|t_{12}| \ll 1$).

11.1.3 Poyntingvektorn

En plan linjärt polariserad våg infaller från ett förlustfritt material, t.ex. vakuum, vinkelrätt mot en gränssyta, se fig.!



För en våg i vakuum gäller, enligt ekv. (2) på s. 60 att tidsmedelvärdet av överförd effekt per ytenhet blir

$$S_{1\text{med}}^+ = \frac{|\vec{E}_{10}^+|^2}{2Z_0} \quad \text{och} \quad S_{1\text{med}}^- = \frac{|\vec{E}_{10}^-|^2}{2Z_0} \quad \text{för infallande resp. reflekterad våg}$$

$$\text{Kvoten} \quad \frac{S_{1\text{med}}^-}{S_{1\text{med}}^+} = \left| \frac{\vec{E}_{10}^-}{\vec{E}_{10}^+} \right|^2 = |r_{12}|^2 \quad \text{reflexionskoefficient för effekt (energi)}$$

(1)

vinkelrätt infall från förlustfritt mtrl

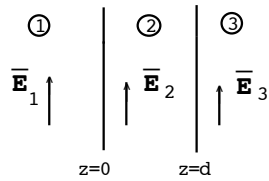
Energiprincipen ger nu för kvoten mellan effekt/ytenhet överförd till material 2 och infallande effekt/ytenhet.

$$\frac{S_{\text{överf med}}}{S_{10\text{ med}}^+} = 1 - |r_{12}|^2 \quad \text{transmissionskoefficient för effekt (energi)}$$

(2)

vinkelrätt infall från förlustfritt mtrl

11.1.4 Vinkelrätt infall mot två gränssytor - planparallell platta. Ingår ej i kursen



En plan, linjärt polariserad våg infaller vinkelrätt mot en planparallell platta. De komplexa fälten kan skrivas

$$\bar{E}_1(z) = \bar{E}_1^+ + \bar{E}_1^- = \bar{E}_{10}^+ e^{-\gamma_1 z} + \bar{E}_{10}^- e^{\gamma_1 z} \quad \text{och} \quad \bar{H}_1(z) = \frac{\bar{E}_{10}^+}{Z_1} e^{-\gamma_1 z} - \frac{\bar{E}_{10}^-}{Z_1} e^{\gamma_1 z}$$

$$\bar{E}_2(z) = \bar{E}_2^+ + \bar{E}_2^- = \bar{E}_{20}^+ e^{-\gamma_2 z} + \bar{E}_{20}^- e^{\gamma_2 z} \quad \text{och} \quad \bar{H}_2(z) = \frac{\bar{E}_{20}^+}{Z_2} e^{-\gamma_2 z} - \frac{\bar{E}_{20}^-}{Z_2} e^{\gamma_2 z}$$

$$\bar{E}_3(z) = \bar{E}_{3d}^+ e^{-\gamma_3(z-d)} \quad \text{och} \quad \bar{H}_3(z) = \frac{\bar{E}_{3d}^+}{Z_3} e^{-\gamma_3(z-d)}$$

\bar{E}_{3d}^+ betecknar E-fältet i material 3 för $z=d$.

Randvillkoren på E- och H-fälten vid $z=0$ resp. $z=d$ ger nu

$$\bar{E}_{10}^+ + \bar{E}_{10}^- = \bar{E}_{20}^+ + \bar{E}_{20}^- \quad (1), \quad \frac{\bar{E}_{10}^+}{Z_1} - \frac{\bar{E}_{10}^-}{Z_1} = \frac{\bar{E}_{20}^+}{Z_2} - \frac{\bar{E}_{20}^-}{Z_2} \quad (2)$$

$$\bar{E}_{20}^+ e^{-\gamma_2 d} + \bar{E}_{20}^- e^{\gamma_2 d} = \bar{E}_{3d}^+ \quad (3), \quad \frac{\bar{E}_{20}^+}{Z_2} e^{-\gamma_2 d} - \frac{\bar{E}_{20}^-}{Z_2} e^{\gamma_2 d} = \frac{\bar{E}_{3d}^+}{Z_3} \quad (4)$$

Ur ekv. (1) - (4) får vi

$$\boxed{\frac{\bar{E}_{10}^-}{\bar{E}_{10}^+} = \frac{r_{12} + r_{23} e^{-2\gamma_2 d}}{1 + r_{12} r_{23} e^{-2\gamma_2 d}}} \quad \boxed{\frac{\bar{E}_{3d}^+}{\bar{E}_{10}^+} = \frac{t_{12} t_{23} e^{-\gamma_2 d}}{1 + r_{12} r_{23} e^{-2\gamma_2 d}}} \quad (5), (6)$$

E_{3d} betecknar $E_3(z=d)$

$$\text{där } r_{12} = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1}, \quad r_{23} = \frac{Z_3 - Z_2}{Z_3 + Z_2}, \quad t_{12} = \frac{2Z_2}{Z_2 + Z_1}, \quad t_{23} = \frac{2Z_3}{Z_3 + Z_2}$$

Uttrycken i ekv. (5) och (6) finns i Formelsamlingen.

Exempel 1: En plan våg i luft med vinkelfrekvensen ω och elektriska fältstyrkans toppvärde E_0 infaller vinkelrätt mot ett förlustfritt halvplan med dieletalet $\epsilon_r = 4$.

a/ Beräkna $\gamma_1, \gamma_2, Z_2, r_{12}$ och t_{12} !

$$\gamma_1 = \alpha_1 + j\beta_1 = \sqrt{j\omega\mu_0 j\omega\epsilon_0} = j\omega\sqrt{\mu_0\epsilon_0} \quad \alpha_1 = 0 \quad \text{① luft}$$

$$\gamma_2 = \alpha_2 + j\beta_2 = \sqrt{j\omega\mu_2(\sigma_2 + j\omega\epsilon_2)} = j\omega\sqrt{\mu_0\epsilon_0\epsilon_r} \quad \alpha_2 = 0 \quad \text{② förlustfritt } (\sigma=0) \epsilon_r$$

$$Z_2 = \sqrt{\frac{j\omega\mu_2}{\sigma_2 + j\omega\epsilon_2}} = \sqrt{\frac{\mu_2}{\epsilon_2}} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_r}} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_r}} Z_0$$

$$\text{Reflexionskoefficienten } r_{12} = \frac{Z_2 - Z_0}{Z_2 + Z_0} = \frac{\frac{1}{\sqrt{\epsilon_r}} - 1}{\frac{1}{\sqrt{\epsilon_r}} + 1} = -1/3$$

$$\text{transmissionskoefficienten } t_{12} = \frac{2Z_2}{Z_2 + Z_0} = \frac{\frac{2}{\sqrt{\epsilon_r}}}{\frac{1}{\sqrt{\epsilon_r}} + 1} = 2/3$$

b/ Beräkna ögonblicksvärdet av totala E-fältet i en godtycklig punkt z framför planet respektive i dielektrikum!

1/ Framför planet (luft): Vi har infallande och reflekterad våg d.v.s. $\bar{E}_1(z) = \bar{E}_{10}^+ e^{-j\beta_1 z} + \bar{E}_{10}^- e^{j\beta_1 z}$ där $\bar{E}_{10}^- = r_{12} \bar{E}_{10}^+ = -\frac{E_0}{3}$

$$\Rightarrow \bar{E}_1(z) = E_0 e^{-j\beta_1 z} - \frac{E_0}{3} e^{j\beta_1 z} \quad \text{med ögonblicksvärdet}$$

$$E_1(z, t) = \text{Re}\{\bar{E}_1 e^{j\omega t}\} = E_0 \cos(\omega t - \beta_1 z) - \frac{E_0}{3} \cos(\omega t + \beta_1 z)$$

$$\text{med } \beta_1 = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$$

2/ I materialet: transmitterad våg $\bar{E}_2^+(z) = \bar{E}_{20}^+ e^{-j\beta_2 z}$

$$\text{där } \bar{E}_{20}^+ = t_{12} \bar{E}_{10}^+ = \frac{2E_0}{3} \Rightarrow \bar{E}_2^+(z) = \frac{2E_0}{3} e^{-j\beta_2 z}$$

$$E_2(z, t) = \frac{2E_0}{3} \cos(\omega t - \beta_2 z) \quad \text{med } \beta_2 = 2\omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$$

c/ Hur stor del av den infallande effekten överföres till materialet?

$$P_{20}^+ = \frac{1}{2} \text{Re}\{\bar{E}_{20}^+ \bar{H}_{20}^{+*}\} = \frac{1}{2} \text{Re}\left\{\frac{\bar{E}_{20}^+ \bar{E}_{20}^{+*}}{Z_2^*}\right\} = \frac{1}{2} \frac{|\bar{E}_{20}^+|^2}{|Z_2|^2} \text{Re}\{Z_2\}$$

$$\text{Infallande effekt/ytenhet } P_{10}^+ = \frac{1}{2} \frac{|\bar{E}_{10}^+|^2}{Z_0^2} Z_0$$

$$\frac{P_{20}^+}{P_{10}^+} = \left|\frac{\bar{E}_{20}^+}{\bar{E}_{10}^+}\right|^2 \frac{\text{Re}\{Z_2/Z_0\}}{|Z_2/Z_0|^2} = |t_{12}|^2 \frac{\text{Re}\{Z_2/Z_0\}}{|Z_2/Z_0|^2} = \frac{8}{9}$$

Den transmitterade effekten kan också beräknas som

$$\frac{P_{20}^+}{P_{10}^+} = \frac{P_{10}^+}{P_{10}^+} - \frac{P_{10}^-}{P_{10}^+} = 1 - |r_{12}|^2 \quad \text{enklare än ovanstående.}$$

Var noga om $r_{12} \approx 1$, se exempel 2!

Exempel 2: En plan våg i luft med vinkelfrekvensen ω och fältstyrkans toppvärde E_0 infaller vinkelrätt mot en stor tjock metallplatta ($\mu_2 = \mu_0$, $\epsilon_2 = \epsilon_0$ och $\sigma_2 \gg \omega \epsilon_0$).

a/ Beräkna γ_2 , Z_2 , r_{12} och t_{12} !

$$\gamma_2 = \sqrt{j\omega\mu_2(\sigma_2 + j\omega\epsilon_2)} \approx \sqrt{j\omega\mu_0\sigma_2} = (1+j)\sqrt{\frac{\omega\mu_0\sigma_2}{2}} = (1+j)\frac{1}{\delta} = \alpha + j\beta$$

försu-
mas

$\delta = \text{inträngningsdjupet}$

$$Z_2 = \sqrt{\frac{j\omega\mu_2}{\sigma_2 + j\omega\epsilon_2}} \approx \sqrt{\frac{j\omega\mu_0}{\sigma_2}} = (1+j)\sqrt{\frac{\omega\mu_0\epsilon_0}{2\sigma_2\epsilon_0}} = (1+j)Z_0\sqrt{\frac{\omega\epsilon_0}{2\sigma_2}} =$$

$$= (1+j)aZ_0, \quad \text{där } a \ll 1$$

Approximera i uttrycken för r och t . Reflexionskoefficienten

$$r_{12} = \frac{Z_2 - Z_0}{Z_2 + Z_0} = -\frac{1 - Z_2/Z_0}{1 + Z_2/Z_0} \approx -[1 - 2Z_2/Z_0] = -[1 - 2a - j2a]$$

eftersom $|Z_2/Z_0| \ll 1$, och med $a = \sqrt{\omega\epsilon_0/2\sigma_2}$ enligt ovan.

$$|r_{12}|^2 \approx 1 - 4a \quad a \text{ är liten, nästan allt reflekteras.}$$

Vi måste räkna med större noggrannhet i r_{12} än i t_{12} eftersom $r_{12} \approx 1$ för metall.

$$\text{transmissionskoefficienten } t_{12} = \frac{2Z_2}{Z_2 + Z_0} \approx \frac{2Z_2}{Z_0} = 2(1+j)a$$

(bara litet transmitteras)

b/ Beräkna ögonblicksvärdet av E och H i en punkt z i metallen!

Det komplexa E-fältet i metallen $\bar{E}_2 = \bar{E}_{20}^+ e^{-\gamma_2 z}$

där $\bar{E}_{20}^+ = t_{12} \bar{E}_{10}^+ = 2(1+j)aE_0 = 2\sqrt{2} aE_0 e^{j\pi/4}$

$\Rightarrow \bar{E}_2(z) = 2\sqrt{2} aE_0 e^{j\pi/4} e^{-(\alpha_2 + j\beta_2)z}$ och motsvarande tidsuttryck

$$E_2(z, t) = 2\sqrt{2} aE_0 e^{-\alpha_2 z} \cos(\omega t - \beta_2 z + \pi/4)$$

H-fältet i metallen $\bar{H}_2(z) = \bar{H}_{20}^+ e^{-\gamma_2 z}$ där $\bar{H}_{20}^+ = \frac{\bar{E}_{20}^+}{Z_2} = \frac{t_{12} E_0}{Z_2} =$

$$= \frac{2E_0}{Z_0} \quad H_2(z, t) = \frac{2E_0}{Z_0} e^{-\alpha_2 z} \cos(\omega t - \beta_2 z)$$

med α_2, β_2 och a enligt beräkningen i a/.

Stående våg och förlusttangent

Antag vinkelrätt infall från ett förlustfritt material 1 mot en gränsyta till ett material 2.

stående vågförhållandet $s = \frac{|\bar{E}_1|_{\max}}{|\bar{E}_1|_{\min}} = \frac{1 + |r_{12}|}{1 - |r_{12}|}$

där $\bar{E}_1 = \bar{E}_{10}^+ e^{-j\beta z} + \bar{E}_{10}^- e^{j\beta z}$ det totala fältet i material 1.

(Jämför stående vågförhållandet på en transmissionsledning! Behandlas senare i kursen Högfrekvensteknik.)
I kursboken används beteckningen Γ för r_{12} och τ för t_{12} .

Förlusttangent är en beteckning för $\sigma / \omega \epsilon$.

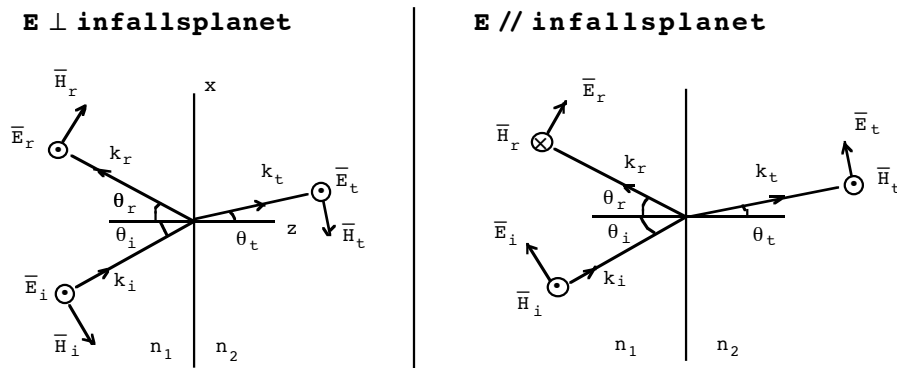
11.2 Reflexion och brytning vid snett infall

En plan våg infaller mot en plan gränsyta mellan två linjära, homogena, isotropa material.

Infallsplan (= papperets plan i fig. nedan):

Plan innehållande $\mathbf{k}_i, (\mathbf{k}_r), (\mathbf{k}_t)$ och \hat{n} , d.v.s. utbredningsvektorerna för infallande, reflekterad och transmitterad våg och normalen till gränsvytan.

Dela upp den godtyckligt polariserade vågen i en våg med E-fältet **vinkelrätt** mot infallsplanet, betecknad med E_{\perp} , och en med E-fältet **parallell** med infallsplanet, betecknad med E_{\parallel} . Randvillkoren i gränsvytan ger olika formler för de båda fallen.



$$\bar{\mathbf{E}}_i(\mathbf{R}) = \bar{\mathbf{E}}_{i0} e^{-j\beta_1 \hat{\mathbf{k}}_i \cdot \mathbf{R}} \quad \text{infallande våg (mtrl 1 antas förlustfritt)}$$

$$\bar{\mathbf{E}}_r(\mathbf{R}) = \bar{\mathbf{E}}_{r0} e^{-j\beta_1 \hat{\mathbf{k}}_r \cdot \mathbf{R}} \quad \text{reflekerad våg}$$

$$\bar{\mathbf{E}}_t(\mathbf{R}) = \bar{\mathbf{E}}_{t0} e^{-\gamma_2 \hat{\mathbf{k}}_t \cdot \mathbf{R}} \quad \text{transmitterad våg (mtrl 2 med eller utan förluster)}$$

OBS! Index 0 står för origo, \mathbf{e}_j för $z=0$!

$$\bar{\mathbf{E}}_i = \hat{\mathbf{y}} \bar{E}_i \quad \text{osv för för fallet } E_{\perp} \text{ (vänstra figuren)}; \quad \mathbf{R} = (x, y, z);$$

$$\hat{\mathbf{k}}_i, \hat{\mathbf{k}}_r, \hat{\mathbf{k}}_t \quad \text{utbredningsriktningar för resp. våg, t.ex. } \hat{\mathbf{k}}_i = \hat{\mathbf{x}} \sin\theta_i + \hat{\mathbf{z}} \cos\theta_i$$

11.2.1 Förlustfria material - uttryck med brytningsindex n

$$\text{Brytningsindex} \quad n = c_0/c = \frac{\sqrt{\mu\epsilon}}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}} = \sqrt{\mu_r\epsilon_r}$$

förhållandet mellan ljushastigheten i vakuum och materialet

a. Brytningslagen

$$\boxed{n_1 \sin\theta_i = n_2 \sin\theta_t} \quad \text{och } \theta_i = \theta_r$$

b. Fresnelekvationerna

Randvillkoren för E och H ger reflexions- och transmissionskoefficienter, olika för E vinkelrät resp. parallell med infallsplanet, de s.k. Fresnelformlerna. Formlerna ger oss uttryck på följande kvoter

$\mathbf{E} \perp \text{ infallsplanet}$ \downarrow $\frac{\bar{E}_{r0}}{\bar{E}_{i0}} \Big _{\perp}; \quad \frac{\bar{E}_{t0}}{\bar{E}_{i0}} \Big _{\perp}$	$\mathbf{E} // \text{ infallsplanet}$ \downarrow $\frac{\bar{E}_{r0}}{\bar{E}_{i0}} \Big _{//}; \quad \frac{\bar{E}_{t0}}{\bar{E}_{i0}} \Big _{//}$
--	---

Se Fresnelformler för E med vågimpedans Z nedan, avsnitt 11.2.2b på s. 69!

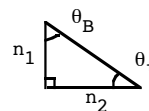
c. Brewstervinkeln θ_B : Ingen reflekerad våg för $\theta_i = \theta_B$

Ingen vinkel θ_i ger $\bar{E}_{r0}|_{\perp} = 0$
om $\mu_1 = \mu_2$

$\bar{E}_{r0}|_{//} = 0$ för $\theta_i = \theta_B$

där $\boxed{\tan\theta_B = n_2/n_1}$ om $\mu_1 = \mu_2$

då gäller också detta samband:



Andra fall: Använd Fresnelformlerna för E_{\perp} och $E_{//}$ och sätt $\bar{E}_{r0} = 0$!

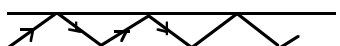
d. Kritiska vinkeln θ_c : totalreflexion för $\theta_i \geq \theta_c$

Total inre reflexion sker mot **tunnare** medium ($n_2 < n_1$),

d.v.s. $|\bar{E}_{r0}/\bar{E}_{i0}| = 1$ i båda fallen för infallsvinklar $\theta_i \geq \theta_c$,

där kritiska vinkeln θ_c fås av $\boxed{\sin\theta_c = n_2/n_1 < 1}$

Detta utnyttjas t.ex. för transmission i optiska fibrer:



optisk frekvens $\approx 10^{14}$ Hz

11.2.2 Material med förluster - uttryck med vågimpedansen Z

För ett material med förluster ($\sigma \neq 0$) blir **brytningsindex n komplext**. Brytningslagen och Fresnekvationerna gäller också för komplexa n . Man har följande samband mellan vågimpedansen Z och n :

$$n = c_0 \gamma / j\omega = \mu_r Z_0 / Z$$

a/ Brytningslagen

$$\frac{\mu_1}{Z_1} \sin \theta_i = \frac{\mu_2}{Z_2} \sin \theta_t$$

Att Z_2 är komplex i brytningslagen innebär att θ_t blir komplex. – En komplex vinkel θ_t har **ingen geometrisk tolkning!** Det blir inga plana vågor i material 2, när θ_t är komplex.

b. Fresnekvationerna med vågimpedans

$\mathbf{E} \perp$ infallsplanet:

$$\left[\begin{array}{l} \frac{\bar{E}_{ro}}{\bar{E}_{io}} \Big|_{\perp} = \frac{(1/Z_1) \cos \theta_i - (1/Z_2) \cos \theta_t}{(1/Z_1) \cos \theta_i + (1/Z_2) \cos \theta_t} \\ \frac{\bar{E}_{to}}{\bar{E}_{io}} \Big|_{\perp} = \frac{(2/Z_1) \cos \theta_i}{(1/Z_1) \cos \theta_i + (1/Z_2) \cos \theta_t} \end{array} \right.$$

\mathbf{E} parallell med infallsplanet:

$$\left[\begin{array}{l} \frac{\bar{E}_{ro}}{\bar{E}_{io}} \Big|_{\parallel} = \frac{-Z_1 \cos \theta_i + Z_2 \cos \theta_t}{Z_1 \cos \theta_i + Z_2 \cos \theta_t} \\ \frac{\bar{E}_{to}}{\bar{E}_{io}} \Big|_{\parallel} = \frac{2 Z_2 \cos \theta_i}{Z_1 \cos \theta_i + Z_2 \cos \theta_t} \end{array} \right.$$

där $\cos \theta_t = \sqrt{1 - \left[\frac{\mu_1 Z_2}{\mu_2 Z_1} \right]^2 \sin^2 \theta_i}$ ur brytningslagen

För specialfallet $\theta_i = 0$, d.v.s. vinkelrätt infall, blir Fresnelformlerna lika för E_{\perp} och E_{\parallel} och identiska med r_{12} respektive t_{12} .

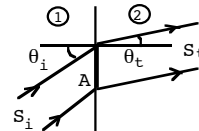
11.2.3 Poyntingvektorn

För överförd effekt gäller $P_{\text{trans}} = P_{\text{inf}} - P_{\text{refl}}$ enligt energiprincipen. Sätt in $P = \mathbf{S} \cdot \mathbf{A} = SA \cos \theta$ för resp. våg, där S = poyntingvektorns tidsmedelvärde och A en yta, se fig.!

Vi får

$$S_{\text{trans}} \cos \theta_t = (S_{\text{inf}} - S_{\text{refl}}) \cos \theta_i$$

Det är bara vid vinkelrätt infall som $S_{\text{trans}} = S_{\text{inf}} - S_{\text{refl}}$!



Kapitel 12

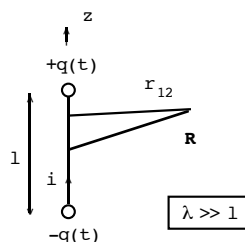
Antenner

Sändarantennor. Tidvarierande laddningar och strömmar ger vågor. För att få strålningen i en bestämd riktning använder man sig av antenner. Vi studerar först dipolantennen, därefter andra antenner. Sändarantennor kan också användas som mottagarantennor.

Det är lättast att börja med att beräkna vektorpotentialen A från en oscillerande dipol. Därefter beräknar man H - och E -fälten.

12.1 Dipolstrålning, oscillerande elektrisk dipol - Hertzdipol

Dipolladdningarna $\pm q(t)$ varierar sinusformat. Vi skriver strömmen i den korta ledaren mellan laddningarna $i_0 = I_0 \cos \omega t$ eller komplext $\bar{i}_0 = I_0$. Eftersom $\bar{i}_0 = j\omega \bar{q}$ blir dipolmomentet då $\bar{p} = \hat{z} \bar{q} \ell = \hat{z} \bar{i}_0 \ell / j\omega$



Vi behöver retarderade potentialer, d.v.s. $i_0(t - r/c) = I_0 \cos \omega(t - r_{12}/c) = I_0 \cos(\omega t - \beta r_{12})$ eller komplext $\bar{i}_0 = I_0 e^{-j\beta r_{12}}$

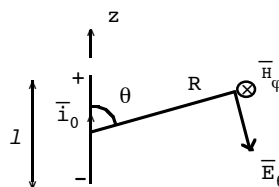
Vågutbredningen sker i luft $\beta = \omega/c$. Vi får **vektorpotentialen**

$$\bar{A}(r) = \hat{z} \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\bar{J}(r_1)}{r_{12}} dv_1 = \hat{z} \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\bar{i}_0}{r_{12}} dz_1 = \hat{z} \frac{\mu_0 I_0 \ell}{4\pi R} e^{-j\beta R}$$

Approximationer: **närzon** $\beta R \ll 1$; **fjärrzon** (vågzon) $\beta R \gg 1$; kan också uttryckas som $R \gg \lambda$

I **vågzonen**, $R \gg \lambda$, får vi fälten

$$\begin{aligned} \bar{H}(R, \theta, \varphi) &= \hat{\varphi} \frac{j\omega \ell \bar{i}_0 \sin \theta}{4\pi c R} e^{-j\beta R} \\ \bar{E}(R, \theta, \varphi) &= \hat{\theta} Z_0 \bar{H}_\varphi \\ \bar{S} &= \bar{E} \times \bar{H}^* = \hat{R} \bar{E}_\theta \bar{H}_\varphi^* \\ Z_0 &= \text{vågimpedans för vakuum} \end{aligned}$$



Det är inga plana vågor, men **TEM-vågor** så att sambandet $\bar{H} = \bar{E}/Z_0$ gäller i vågzonen.

En enklare ansats för \bar{E} och \bar{H} , om man inte är intresserad av antennstorheterna är

$$\bar{E}_\theta = C \frac{\sin \theta}{R} e^{-j\beta R}; \quad \bar{H}_\varphi = \bar{E}_\theta / Z_0;$$

Konstanten C kan t.ex. bestämmas ur uppgift om totalt utstrålad effekt från antennen.

[Fälten i strålningszonen från en Hertzdipol kan också skrivas:

$$\begin{aligned} \bar{H}(\mathbf{R}) &= \frac{j\omega \ell \bar{i}_0}{4\pi c R} e^{-j\beta R} \hat{p} \times \hat{R} \\ \bar{E}(\mathbf{R}) &= Z_0 \bar{H}(\mathbf{R}) \times \hat{R} = Z_0 \frac{j\omega \ell \bar{i}_0}{4\pi c R} e^{-j\beta R} [\hat{R}(\hat{p} \cdot \hat{R}) - \hat{p}] \end{aligned}$$

där \hat{p} är dipolmomentets riktning. Denna form kan vara "lättare" att använda, då dipolen inte ligger efter z -axeln och fältet ska bestämmas i en godtycklig punkt \mathbf{R} .

OBS! Använd de enkla formlerna i första hand!

Exempel: En Hertzdipol i fri rymd utstrålar den totala effekten 16 kW med frekvensen 100 MHz. Beräkna E-fältets maximala toppvärde på avståndet 100 km från antennen!

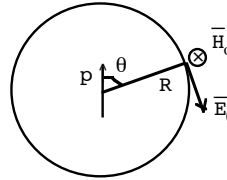
$f = 100 \text{ MHz} \Rightarrow \lambda = c/f = 3 \cdot 10^8 / 10^8 = 3 \text{ m} \ll R = 10^5 \text{ m}$. Vi söker alltså E-fältet i vågzonen och ansätter

$$\bar{E}_\theta = C \frac{\sin\theta}{R} e^{-j\beta R} \quad \text{och} \quad \bar{H}_\varphi = \bar{E}_\theta / Z_0$$

Det är också enklare att beräkna utstrålad effekt i vågzonen.

Totalt utstrålad effekt

$$P_{\text{medel}} = \frac{1}{2} \int \text{Re}\{\bar{E}_\theta \bar{H}_\varphi^*\} \cdot da$$



integrerat över en sfär runt om dipolen

Ett ytelement på sfärens yta $da = 2\pi R \sin\theta R d\theta \Rightarrow$

$$P_{\text{medel}} = \frac{|C|^2}{2Z_0} \int_0^\pi \frac{\sin^2\theta}{R^2} 2\pi R^2 \sin\theta d\theta = \frac{|C|^2 \pi}{Z_0} \cdot \frac{4}{3} = 16 \cdot 10^3$$

$$\Rightarrow |C| = 1,2 \cdot 10^3$$

Maximala toppvärdet av E har vi för $\theta = \pi/2$.

$$|\bar{E}|_{\text{max}} = |C| \frac{\sin(\pi/2)}{R} = 12 \cdot 10^{-3} \text{ V/m}$$

====

12.1.1 Strålningsdiagram

Strålningsdiagram är ett diagram, där $|\bar{E}|$ i strålningszonen kan avläsas – för konstant R – i olika riktningar från antennen. Diagrammet kan också visa effekten ($\sim |\bar{E}|^2$).

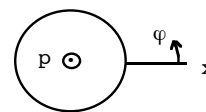
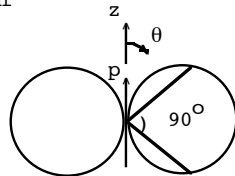
Exempel: En Hertzdipol har $\bar{E}_\theta = \frac{C}{R} \sin\theta e^{-j\beta R}$

$|\bar{E}_\theta| \sim \sin\theta$ (för visst R) med max för $\theta = \pi/2$

Strålningsdiagrammet blir

i θ -planet:
cirklar

i φ -planet: E= konst
oberoende av φ



Lobbredd (beamwidth på engelska): Vinkeln mellan halveffektpunkterna ($E = E_{\text{max}}/\sqrt{2}$ där). För Hertzdipolen får man lobbredden i θ -planet

$$\sin\theta = \sin\theta_{\text{max}}/\sqrt{2} = 1/\sqrt{2} \text{ för } \theta = 45^\circ \text{ och } \theta = 135^\circ.$$

Lobbredd $135^\circ - 45^\circ = 90^\circ$, se fig. t.v. ovan!

12.2 Varierande strömfördelning och längre antenner – sprötantenner

För den korta dipolantennen räknade vi med konstant strömapplitud I_0 längs antennen, $i(t) = I_0 \cos \omega t$. I praktiken varierar strömmens **amplitud** längs antennen $I_0 = I_0(z)$ och kan t.ex. vara z -beroende på dessa sätt:



För sinusformad variation i amplituden blir $I_0(z) = I_m \sin[\beta(\ell/2 - |z|)]$, där $I_m = \max$ strömapplitud och ℓ är antennlängden.

Beräkningsmetod: Dela in antennen i element Δz . Varje Δz betraktas som en Hertz-dipol, som ger ett E-fält ΔE . Addera bidragen, d.v.s. integrera över antennlängden ℓ .

Om antennlängden inte är mycket mindre än våglängden, blir integralerna komplicerade. För **halvvågsdipolen**, $\ell = \lambda/2$, se vidare i Cheng avsnitt 11-4.1; (avsnitt 10-4.1 i Lilla Cheng)! Uttrycken för $\vec{E}_{\lambda/2}$ och $\vec{H}_{\lambda/2}$ finns också i Formelsamlingen.

För $\ell < \lambda/4$ får man ett resultat som visar att man kan räkna med en **effektiv antennlängd** ℓ_{eff} i Hertzdipolformlerna. $\ell_{\text{eff}} = \ell/2$ för $\ell < \lambda/4$

Laddningsfördelning på antennen

Om strömapplituden är konstant, får man bara laddning i ändarna på antennen. När strömapplituden $I_m = I_m(z)$ får man en laddningsfördelning $\rho_\ell(z)$ på antennen. Kontinuitetsekvationen $\oint \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} = -\partial Q/\partial t$ tillämpad på elementet Δz ger $\rho_\ell(z)$. Se t.ex. uppgift P11-5 i Cheng, (P10-3 i Lilla Cheng)!

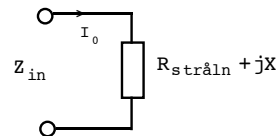
12.3 Strålningsresistans

Genom att integrera medelvärdet av poyntingvektorn $\frac{1}{2}\{\vec{E}\vec{H}^*\}$ över en sfärisk yta med radien R runt antennen får man totalt utstrålad effekt.

Definition av **strålningsresistans**:

$$P_{\text{utstrålad}} = R_{\text{stråln}} I_e^2 = R_{\text{stråln}} I_0^2 / 2$$

där I_e är antennströmmens effektivvärde, I_0 dess toppvärde (maximala toppvärde om strömmen beror av z)



Strålningsresistansen är en **tänkt** resistans med samma effektutveckling som den utstrålade effekten.

I antennens inimpedans ingår också förluster i antennen – beräknas i nästa avsnitt –.

Vi försummar oftast dessa och räknar med $R_{\text{in}} = R_{\text{stråln}}$, se fig. ovan! Vi får också en imaginärdel X i inimpedansen. X är kapacitiv (<0) för en kort dipolantenn, induktiv (>0) för en halvvågsantenn. – Vi beräknar inte X i kursen! –

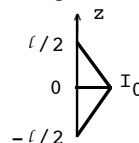
$$R_{\text{stråln,Hertz}} = 80\pi^2 (\ell/\lambda)^2; \quad R_{\text{stråln}, \lambda/2} = 73,1 \Omega;$$

Man vill ha stor strålningsresistans. Hertzdipolen har $\ell \ll \lambda$ och således en mycket låg strålningsresistans!

12.4 Förluster i antennen

Exempel: Beräkna den joulska effektförlusten för en sprötdipol med längden ℓ , radien a , konduktiviteten σ och med triangulär strömfördelning enl. fig. Frekvensen är så hög att vi har skineffekt.

Strömamplituden $I(z) = I_0 - \frac{2I_0}{\ell} z$



Eftersom $I=I(z)$ måste vi teckna effekten dP i elementet dz och integrera.

$$dP = \frac{1}{2} dR I^2(z) \quad \text{där resistansen } dR = \frac{dz}{\sigma 2\pi a \delta} \quad \text{och } \delta = \sqrt{\frac{2}{\omega \sigma \mu}}$$

$$P_{\text{förlust}} = 2 \frac{1}{2} \int_0^{\ell/2} I_0^2 \left(1 - \frac{2z}{\ell}\right)^2 \frac{dz}{\sigma 2\pi a \delta} = \dots = \frac{I_0^2 \ell}{12\pi \sigma a \delta} = \frac{1}{2} R_{\text{förlust}} I_0^2$$

$$\text{Antennens verkningsgrad } \eta = \frac{P_{\text{utstrålad}}}{P_{\text{utstrålad}} + P_{\text{förlust}}} = \frac{R_{\text{stråln}}}{R_{\text{stråln}} + R_{\text{förlust}}}$$

$R_{\text{stråln}}$ och $R_{\text{förlust}}$ är tänkta resistanser.

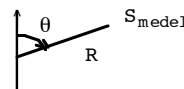
12.5 Antennförstärkning och direktivitet

Några begrepp för sändarantenn resp. mottagarantenn.

12.5.1 Sändarantenn

Antennförstärkning (directive gain) $G_D(\theta, \varphi)$
(ett mått på hur mycket antennen strålar i en viss riktning)

$$G_D(\theta, \varphi) = \frac{S_{\text{medel}}(R, \theta, \varphi) \cdot 4\pi R^2}{P_{\text{utstrålad}}}$$



S_{medel} = tidsmedelvärdet av poyntingvektorn i en viss punkt (R, θ, φ)

$P_{\text{utstrålad}}$ = tidsmedelvärde av från antennen utstrålad effekt.

$$\text{Direktivitet } D = G_{D_{\text{max}}}$$

$$D_{\text{Hertzdipol}} = 1,5; \quad D_{\lambda/2} = 1,64$$

Index

- Amperes lag
 - magn. material
 - med B, 40
 - med H, 41
 - vakuum, 36
- antenn, 70
 - förluster, 73
 - laddningsfördelning, 72
- antennförstärkning, 73

- Biot-Savarts lag, 38
- Brewstervinkel, 68
- brytning, 67
- brytningsindex, 68
 - komplext, 69
- brytningslagen, 68
 - komplext, 69

- Coulombs lag, 5

- D-fält, 15
- deloperatör, 3
- dielektricitetskonstant
 - relativ, 15
 - vakuum, 5
- dieltal, 15
- dipol
 - elektrisk, 14
 - magnetisk, 39
 - punktdipol, 14
- dipolmoment, 70
 - laddningsfördelning, 14
 - magnetiskt, 39
 - punktdipol, 14
- direktivitet, 73
- Dirichlets randvillkor, 21
- divergens, 3
- divergensteoremet, 4
- dämpkonstant, 55

- E-fält
 - punkt-laddning, 6
 - laddningsfördelning, 7
 - sfärisk elektrod, 28
- E-fält
 - metall, 13
- effekt, 31
- effekt-förlust
 - komplext, 61
- effektiv antennlängd, 72
- egenenergi, 17
- elektret, 16
- elektrisk fältstyrka, 6
- elektromotorisk kraft, 29
- elektrostatik, 5
 - i vakuum, 5
 - med dielektrikum, 14
- emk, 29
- energi
 - elektrisk, 17
 - dipol, 20
 - kondensator, 18
 - laddade ledare, 18
 - laddningsfördelning, 18
 - med fält, 18
 - punkt-laddning, 17
 - magnetisk
 - dipol, 39
 - inre, 44
 - med fält, 44
 - strömfördelning, 44
 - strömslingor, 44
 - yttre, 44
- energitäthet
 - elektrisk, 19
 - komplext, 61
 - magnetisk, 45
- entydighetssatsen, 23

- fashastighet, 58, 61
- faskonstant, 55
- ferriter, 48
- ferromagnetiska material, 41
- fjärrzon, 70
- flöde, 3
 - magnetiskt, 37
- Fresnelekvationerna, 69
- fält, 2
 - elektromagnetiskt, 49
 - komplext, 54
- förlustfritt, 54
- förlusttangens, 67
- förskjutning, 15
- förskjutningsström, 49
- förskjutningsströmtäthet, 49

- Gauss lag för E
 - i dielektrikum, 15
 - i vakuum, 6, 8
- gradient, 2
- grupp-hastighet, 61

- H-fält, 41
- halvvågsantenn, 72
- Helmholtz teorem, 4
- Hertzdipol, 70
- homogent medium, 54
- högerhandsregeln, 1, 4, 36

- icke-plan våg, 61
- induktans, 43
 - inre, 44
 - yttre, 44
 - ömsesidig, 43
- induktion, 46
- infallplan, 67
- inträngningsdjup, 58
- iterationsmetod, 22

- Joules lag, 31

- kapacitans, 17
- Kirchhoffs spänningslag, 30
- Kirchhoffs strömlag, 31
- kondensator, 17
- konduktivitet, 28
- kontinuitetsekvationen, 31
- konvektionsström, 28
- kopplingsfaktor, 43
- kraft
 - elektrisk
 - dipol, 20
 - metall i diel., 19
 - metall i vakuum, 19
 - punkt-laddning, 5, 18
 - virtuell förflyttning, 18
 - elektromagnet, 45
 - magnetisk, 35
 - dipol, 39
 - ledare, 39
 - strömslinga, 45
 - virtuell förflyttning, 45
- kritisk vinkel, 68
- kryssprodukt, 1
- kvasistationärt, 46, 47
- kvasistatiskt, 46
- källa, 3
- källfritt, 3

- laddning
 - bunden, 15
 - fri, 15
 - makroskopisk, 5
 - mikroskopisk, 5
 - punkt-laddning, 5
 - laddningsfritt, 54

Index

- laddningstäthet
 - linjeladdningstäthet, 5
 - volym-laddningstäthet, 5
 - yt-laddningstäthet, 5
- laminering, 48
- Laplaces ekvation, 21
- Laplaces operator, 21
- ledningsström, 28
- linjeladdning
 - potential
 - referenspunkt, 12
- lobbredd, 71
- Lorentzkraft, 35
- längdelement, 2

- magnetisering, 40
- magnetiseringsströmtäthet, 40
- magnetisk intensitet, 41
- magnetisk kraft
 - ledare, 39
- magnetkretsar, 41
- magnetmaterial, 40
- magnetostatik, 35
 - i vakuum, 35
 - med material, 40
- matrismetod, 22
- Maxwells ekvationer, 49
 - komplext, 54
- monokromatisk, 54
- mottagarantenn, 70

- Neumanns randvillkor, 22
- numerisk lösning
 - iterationsmetod, 22
 - matrismetod, 22
- närzon, 70

- partikelrörelse, 35
- permeabilitet, 41
- permittivitet
 - material, 15
 - vakuum, 5
- plan våg, 51, 54
- Poissons ekvation, 21
- polarisation, 15
 - cirkulär, 54
 - elliptisk, 54
 - linjär, 54
- polarisationsladdningstäthet, 15
- polarisationstyp, 54
- potential
 - elektrostatisk, 9
 - från laddningsfördelning, 10
 - från linjeladdning, 11
 - från punktladdning, 10
 - linjeelektrod, 28
 - referenspunkt, 9
 - retarderad, 50
 - sfärisk elektrod, 28
 - vektorpotential, 38
 - via E-fält, 11
- potentialskillnad, 10
- poyntingvektorn, 52
 - komplext, 60
 - plan våg, 60
 - tidsmedelvärde, 60
 - snett infall, 69
 - vinkelrätt infall, 64
- punktdipol
 - E-fält, 14
 - potential, 14

- randvillkor
 - Dirichlet, 23
 - elektrostatik, 16
 - elmagn. fält, 50
 - magnetostatik, 43
 - Neumann, 23
 - ström, 31
- reflexion
 - mot platta, 65
 - snett infall, 67
 - vinkelrätt infall mot en yta, 62
- reflexionskoefficient
 - effekt, 64
 - E-fält, 62
- reluktans, 42
 - komplext, 48
- resistans, 29
 - direkt
 - approximativt, 32
 - exakt, 32
 - numerisk beräkning, 34
 - undre gräns, 32
 - övre gräns, 32
- resistans-kapacitans, 29
- retardation, 50
- rotation, 3
- rotationsfritt, 3
- rörelseemk, 46

- skalärprodukt, 1
- skineffekt
 - plan våg, 58
 - rund tråd, 59
- skärmning, 58
- spegling
 - metallcylinder, 24
 - plan metallyta, 23
 - strömelektrod
 - isolerande yta, 31
 - ledande yta, 31
- speglingsmetoden, 23
- sprötantenner, 72
- spänning
 - inducerad, 46
 - kretsekvationer, 44
 - komplext, 53
- spänning-potentialskillnad, 46
- spänningskälla, 29
- stationär ström, 28, 29, 31
- Stokes teorem, 4
- strålningsdiagram, 71
- strålningsresistans, 72
- ström, 28
 - komplext, 53
 - stationär, 29
- strömtäthet, 28
- stående vågförhållande, 67
- supraledare, 43
- susceptibilitet
 - elektrisk, 15
 - magnetisk, 41
- sändarantenn, 70, 73

- TE-våg, 54
- TEM-våg, 54, 61
- TM-våg, 54
- totalreflexion, 68
- transformator, 47
 - ideal, 48
- transformatoremk, 46
- transmission
 - snett infall, 67
 - vinkelrätt infall, 62
- transmissionskoefficient
 - E-fält, 62
 - effekt, 64

- vektorpotential, 38
- vektorprodukt, 1
- verkningsgrad, 73
- virtuell förflyttning, 18
- virvelfritt, 3
- virvelströmmar, 48
- volymelement, 2
- vridande moment
 - elektrostatiskt
 - dipol, 20
 - magnetiskt
 - dipol, 39

- våg
 - icke-plan, 61
 - plan, 51, 55
 - utbredningsriktning, 51
- vågekvation
 - A och V, 50
 - komplex
 - E och H, 55
- vågimpedans, 55
 - vakuum, 51
- vågta, 61
- vågutbredningskonstant, 55
- vågzon, 70
- växelströmsresistans, 59

- ytelement, 2
- ytimpedans, 59
- ytresistans, 33, 59
- ytresistivitet, 33
- ytströmtäthet, 33, 59