Dugga i Vektorfält och elektromagnetisk fältteori, EEN190

Tid:	2023-02-11, kl. 8:30-12:30
Tillåtna hjälpmedel:	Physics Handbook Beta Mathematics Handbook Typgodkänd kalkylator Formelsamlingar i vektorfält och elektromagnetisk fältteori med egna formler skrivna på sista sidan. Inga andra anteckningar eller lösta tal är tillåtna.
Förfrågningar:	Andreas Fhager
Lösningar:	Anslås på kursens hemsida senast första vardagen efter duggan
Resultatet:	Distribueras via kurshemsidan
Granskning:	Plats och tid annonseras på kurshemsidan
Om rättningen:	Svar och lösningar skall motiveras och förklaras. Skriv tydligt och förklara vad ni gör i er lösning och vilken metod som används. Poängavdrag görs för otydliga figurer och lösningar samt lösningar som inte förklaras eller motiveras. Mindre allvarliga fel och rena räknefel leder till mindre avdrag. Mer allvarliga, principiella fel och metodfel leder till större avdrag. Poängavdrag görs även för utelämnade referensriktningar, dimensionsfel och uppenbart orimliga svar.

Lycka till!

Vektorfält

1

Visa följande vektoridentiteter med hjälp av indexnotation, antag att f är ett skalärt fält och $\boldsymbol{u}$ är ett vektorfält.

a) $\nabla \times (f\boldsymbol{u}) = \nabla f \times \boldsymbol{u} + f\nabla \times \boldsymbol{u}$
b) $\nabla \cdot (f\boldsymbol{u}) = \nabla f \cdot \boldsymbol{u} + f\nabla \cdot \boldsymbol{u}$
c) Visa följande samband med hjälp av indexnotation: $\nabla f(r) = f'(r)\boldsymbol{r}/r$
Antag att f är en skalär och $\boldsymbol{r}$ är en ortsvektor, $\boldsymbol{r} = (x_1, x_2, x_3)$, vars längd är r.
d) Visa vad $f(r)$ måste vara för att följande likhet ska gälla
$\nabla \cdot (f(r)\boldsymbol{r}) = |\nabla \times (f(r)\boldsymbol{r})|$. Använd er av resultaten i a-c.

2

Ett paraboliskt, cylindriskt koordinatsystem (σ, τ, w) beskrivs av följande samband

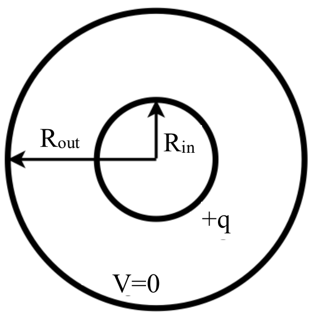
$$\begin{cases} x = \sigma\tau \\ y = \dfrac{1}{2}(\tau^2 - \sigma^2) \\ z = w \end{cases}$$

a) Visa hur divergensoperatorn ($\nabla \cdot \mathbf{v}$) uttrycks i detta koordinatsystem.
b) Visa genom explicita beräkningar att koordinatsystemet (σ, τ, w) är ortogonalt.

Elektrostatik

3

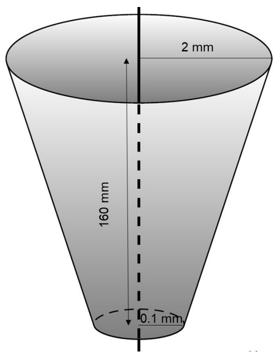
En sfärisk kondensator består av två koncentriska ledande skal det inre skalet har radie, R_in = 5 cm, och det yttre har radie R_out = 10 cm. Utrymmet mellan skalen fylls med ett inhomogent material, vars relativa dielektricitetskonstant varierar med radien, R, enligt $\varepsilon_r = \frac{a}{R}$ där $a = 20\ cm$. På den inre ledaren läggs laddningen $q = 10$ nC, och den yttre ledaren jordas så att potentialen blir noll.



a) Beräkna potentialfördelningen mellan skalen som funktion av radien, *R,* från centrum av sfärerna.
b) Beräkna de polarisationsladdningstätheter, yt- och volymladdningstätheter, som finns i materialet mellan ledarna.
c) Beräkna motsvarade totala polarisationsladdningar.

4

En avhuggen solid kon har höjden 16 cm. Den cirkulära bottenytan har radien 0,1 mm och den cirkulära toppytan har radie 2 mm. Materialet i konen har konduktiviteten $\sigma = 2 \cdot 10^6$ S/m. Antag att de två cirkulära ändytorna är täckta med en perfekt ledande elektrod, och att resistansen mäts mellan elektroderna. Beräkna konens resistans.



1

a) $[\nabla \times (f\vec{u})]_i = \epsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial x_j}(f u_k)$

$= \epsilon_{ijk}\frac{\partial f}{\partial x_j}u_k + f\epsilon_{ijk}\frac{\partial u_k}{\partial x_j}$

$= [\nabla f \times u + f\nabla\times u]_i$

b) $\nabla\cdot(f\vec{u}) = \frac{\partial}{\partial x_i}(f u_i) = \frac{\partial f}{\partial x_i}u_i + f\frac{\partial u_i}{\partial x_i}$

$= \nabla f\cdot\vec{u} + f\nabla\cdot\vec{u}$

c) $[\nabla f(r)]_i = \frac{\partial f(r)}{\partial x_i} = \frac{df(r)}{dr}\frac{\partial r}{\partial x_i} = f'(r)\frac{x_i}{r}$

$\xrightarrow{(4.19)} \nabla f(r) = f'(r)\frac{\vec{r}}{r}$

$\frac{\partial r}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}\right) = \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}}$

d) $|\nabla\times(f(r)\vec{r})| = \nabla f\times\vec{r} + f\underbrace{\nabla\times\vec{r}}_{0} = f'(r)\frac{\vec{r}}{r}\times\vec{r} = 0$

$\longrightarrow \nabla\cdot(f(r)\vec{r}) = 0 \longrightarrow \nabla f(r)\cdot\vec{r} + f\underbrace{\nabla\cdot\vec{r}}_{3} = 0$

$\longrightarrow f'(r)\frac{\overbrace{\vec{r}\cdot\vec{r}}^{r^2}}{r} + 3f = 0 \longrightarrow r f'(r) + 3f = 0$

$\longrightarrow r\frac{df(r)}{dr} + 3f = 0 \xrightarrow{\int} \int\frac{df}{f} = -3\int\frac{dr}{r}$

$\longrightarrow \log f = -3\log r + c \xrightarrow{e^{()}} f = A/r^3$ with $A = e^c$

(2)

$$\begin{cases} x = \sigma\tau \\ y = \frac{1}{2}(\tau^2-\sigma^2) \\ z = w \end{cases}$$

Beräkna skalfaktorer

$$h_\sigma = \left|\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \sigma}\right| = |(\tau, -\sigma, 0)| = \sqrt{\tau^2+\sigma^2}$$

$$h_\tau = \left|\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \tau}\right| = |(\sigma, \tau, 0)| = \sqrt{\tau^2+\sigma^2}$$

$$h_w = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial w} = |(0,0,1)| = 1$$

a) Divergensoperatorn fås enl. följande, $\nabla \cdot \mathbf{V}$

$$\nabla\cdot\mathbf{V} = \frac{1}{h_\sigma h_\tau h_w}\left(\frac{\partial}{\partial\sigma}(V_\sigma h_\tau h_w) + \frac{\partial}{\partial\tau}(V_\tau h_w h_\sigma) + \frac{\partial}{\partial w}(V_w h_\sigma h_\tau)\right)$$

sätt in i formeln $\Rightarrow$

$$\nabla\cdot\mathbf{V} = \frac{1}{(\sigma^2+\tau^2)}\left(\frac{\partial}{\partial\sigma}\left(V_\sigma\sqrt{\tau^2+\sigma^2}\right) + \frac{\partial}{\partial\tau}\left(V_\tau\sqrt{\tau^2+\sigma^2}\right) + \frac{\partial}{\partial w}\left(V_w(\tau^2+\sigma^2)\right)\right)$$

b) Beräkna först enhetsvektorerna

$$\mathbf{e}_\sigma = (\tau, -\sigma, 0)/h_\sigma = (\tau, -\sigma, 0)/(\tau^2+\sigma^2)^{1/2}$$

$$\mathbf{e}_\tau = (\sigma, \tau, 0)/h_\tau = (\sigma, \tau, 0)/(\tau^2+\sigma^2)^{1/2}$$

$$\mathbf{e}_w = (0,0,1)/h_w = (0,0,1)/1$$

För att systemet ska vara ortogonalt skall följande skalärprodukter gälla:

$$\mathbf{e}_\sigma\cdot\mathbf{e}_\tau = 0$$

$$\mathbf{e}_\tau\cdot\mathbf{e}_w = 0$$

$$\mathbf{e}_w\cdot\mathbf{e}_\sigma = 0$$

Delta vilas

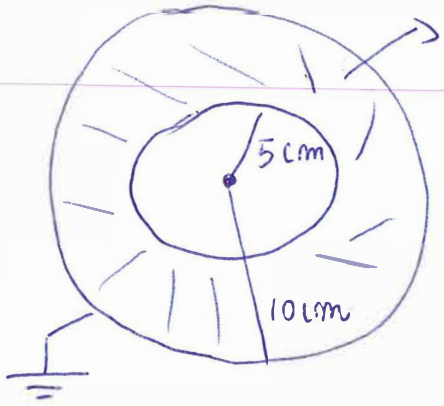
$$e_\sigma \cdot e_\tau = \frac{(\tau, -\sigma, 0)}{(\tau^2+\sigma^2)^{1/2}} \cdot \frac{(\sigma, \tau, 0)}{(\tau^2+\sigma^2)^{1/2}} = \frac{\sigma\tau - \sigma\tau}{(\tau^2+\sigma^2)^{1/2}} = 0$$

$$e_\tau \cdot e_w = \frac{(\sigma, \tau, 0)}{(\tau^2+\sigma^2)^{1/2}} \cdot \frac{(0,0,1)}{1} = 0$$

$$e_w \cdot e_\sigma = \frac{(0,0,1)}{1} \cdot \frac{(\tau, -\sigma, 0)}{(\tau^2+\sigma^2)^{1/2}} = 0$$

VSB

EX 3. - ELECTROSTATIC - SOLUTION



$$\epsilon = \epsilon_0 \frac{a}{r} \quad \text{with} \quad a = 20\,\text{cm}$$

$$q = 10^{-9}\,C$$

FOR THE GAUSS' THEOREM WE HAVE:

$$\mathbb{D} = \frac{q}{4\pi r^2}\,\hat{a}_R$$

SO THE ELECTRIC FIELD IS:

$$\mathbb{E} = \frac{D}{\epsilon_r \epsilon_0} = \frac{q}{4\pi r \epsilon_0 a}\,\hat{a}_R$$

TO CALCULATE THE POTENTIAL, WE CAN REFER TO THE EXTERNAL SHELL (V = 0)

$$V(R) - \cancel{V(R_{ext})}^{\,0} = \int_R^{R_{ext}} \mathbb{E}\cdot dr = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a} \ln r \Big|_R^{R_{ext}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a} \ln \frac{R_{ext}}{R}$$

SO, NOW:

$$\mathbb{P} = \mathbb{D} - \epsilon_0 \mathbb{E} = \mathbb{D} - \frac{\mathbb{D}}{\epsilon_r \cancel{\epsilon_0}} \cdot \cancel{\epsilon_0} = \mathbb{D}\left(1 - \frac{1}{\epsilon_r}\right) = \mathbb{D}\left(\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r}\right) =$$

$$= \frac{q}{4\pi a} \frac{a-r}{r^2}\,\hat{a}_R$$

THE POLARIZATION CHARGE DENSITY ON THE TWO SHELLS' SURFACES IS:

$$\rho_s(R_{int}) = \mathbb{P}(R_{int}) \cdot \hat{a}_{n_{int}} = -\frac{q}{4\pi a} \frac{a - R_{int}}{R_{int}^2} = -2.39 \cdot 10^{-5}\, C/m^2$$

$$\rho_s(R_{ext}) = \mathbb{P}(R_{ext})\,\hat{a}_{n_{ext}} = \frac{q}{4\pi a} \cdot \frac{a - R_{ext}}{R_{ext}^2} = 0.40 \cdot 10^{-8}\, C/m^2$$

FOR THE VOLUMETRIC CHARGE DENSITY WE CAN USE:

$$\rho_v = -\nabla \cdot \mathbb{P} = -\frac{q}{4\pi a} \nabla \cdot \left[\frac{a-r}{r^2} \cdot \hat{a}_R \right]$$

SINCE IN THIS CASE $\mathbb{P}$ DEPENDS JUST ON R (DISTANCE FROM THE CENTRE) WE CAN IGNORE THE PARTIAL DERIVATIVES W.R.T. θ and ϕ.

$$\left\{ \nabla \cdot A = \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} (R^2 \cdot A_R) \right\}$$

SO, WE GET:

$$\rho_v = -\nabla \cdot \mathbb{P} = \frac{q}{4\pi a} \frac{1}{r^2} = 0.40 \cdot 10^{-9} / r^2 \quad C/m^3$$

WE CAN NOW CALCULATE THE CHARGES:

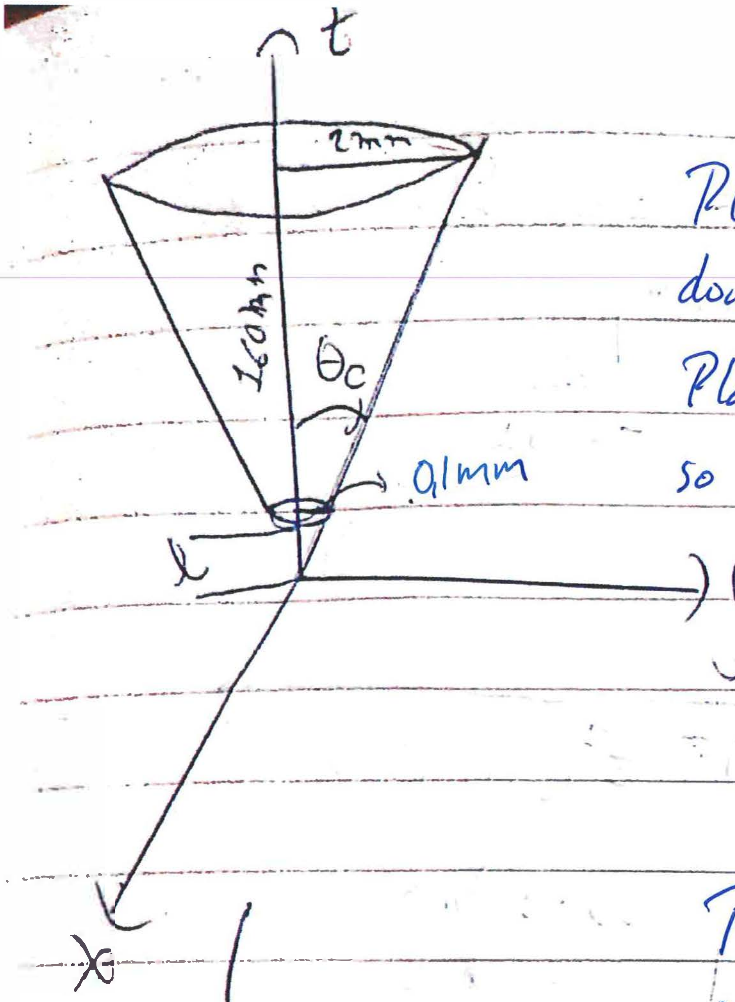
$$q(R_{int}) = 4\pi R_{int}^2 \cdot \rho_s(R_{int}) = \frac{q}{a}(a - R_{int}) = -0.75 \cdot 10^{-9} C$$

$$q(R_{ext}) = 4\pi R_{ext}^2 \cdot \rho_s(R_{ext}) = \frac{q}{a}(a - R_{ext}) = 0.50 \cdot 10^{-9} C$$

and,

$$q_{vol} = \int_{R_{int}}^{R_{ext}} \rho_{vol} \cdot 4\pi r^2 \, dr = \frac{q}{a}(R_{ext} - R_{int}) = 0.25 \cdot 10^{-9} C$$

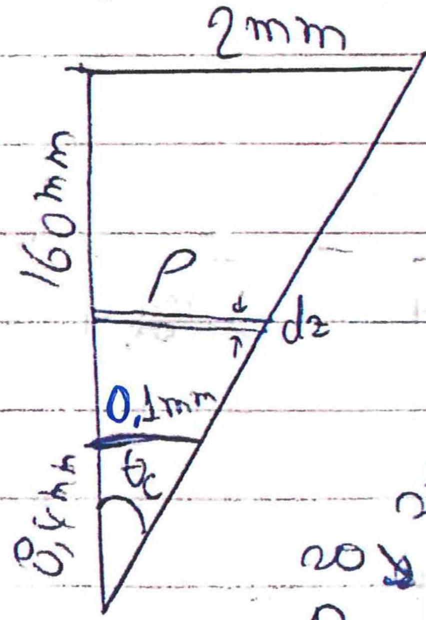
4



Place the cone upside down, centered around z axis. Place the cone at height l so that the cutaway top of the cone is in origo. By equilateral triangles l can be determined

$$\frac{2}{0,1} = \frac{160+l}{l} \Rightarrow l \approx 8{,}42\,\text{mm}$$

This placement makes the integration easy.



$$\tan\theta_c = \frac{2\,\text{mm}}{(160+8{,}4)\,\text{mm}} = 1{,}19\times10^{-2}$$

We divide into circular strips that are in series so

$$R = \int dR \quad \text{where } dR = \frac{dz}{\sigma\pi\rho^2}$$

$$P = z \tan \theta_c = z(1{,}19\times10^{-2})$$

$$\Rightarrow R = \int_{8{,}4mm}^{160+8{,}4mm} \frac{dz}{\sigma \pi p^2}$$

$$= \int_{8{,}4mm}^{(160+8{,}4)mm} \frac{dz}{(2\times10^{6})\pi z^2 (1{,}19\times10^{-2})^2}$$

$$= 0{,}0011 \int_{8{,}4mm}^{(160+8{,}4)mm} \frac{dz}{z^2}$$

$$= 0{,}0011 \left[\frac{1}{0{,}0084} - \frac{1}{0{,}1684}\right]$$

$$= \underline{0{,}127 \text{ ohm}}$$