

Distansdugga i Elektromagnetisk fältteori för F2 och TM2.
EEF031 2020-11-28, kl. 8:30-12:30

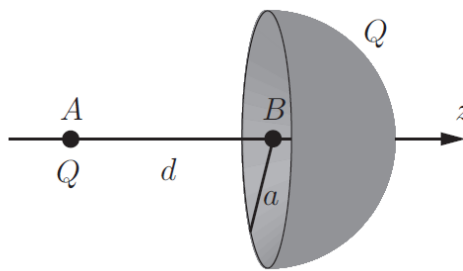
Tillåtna hjälpmedel:	Alla hjälpmedel tillåtna. Det är dock absolut förbjudet att kommunicera muntligt eller skriftligt med andra personer än examinator och tentavakt. Det är förbjudet att använda alla former av hörlurar, hörsnäckor eller liknande anordningar.
Förfrågningar:	Andreas Fhager är tillgänglig för frågor via Zoom
Lösningar:	Anslås på kursens hemsida senast första vardagen efter tentan
Resultatet:	Anslås i Canvas
Granskning:	Granskning sker online i Canvas
Kom ihåg	Poängavdrag görs för otydliga figurer, utelämnade referensriktningar, dimensionsfel och utelämnade motiveringar.

Till tentan: Elektrostatiken (tal 1 och 2) och Magnetostatiken (tal 3 och 4) bedöms var för sig och poängen tillgodoräknas separat på tentan. Även teoridel och problemdel räknas separat. Duggaresultatet räknas om till en procentsats av maxpoängen och respektive tal på tentan kan om så önskas hoppas över med lika många procent av maxpoängen tillgodo. Om man trots poäng tillgodo från duggan väljer att räkna motsvarande tal på tentan gäller bästa resultatet. Resultat från duggan gäller på ordinarie tenta och de två närmast därpå följande omtentamina.

1 Elektrostatik

Problemlösningsdel (8 poäng)

Ett halv-sfäriskt skal med radien a har laddats upp med en jämt fördelad laddningsfördelning. Den totala laddningen är Q . Hur stort arbete går åt för att flytta en punktladdning, med laddning Q , från punkten A $(0, 0, -d)$ till B $(0, 0, 0)$? Förflyttningen görs alltså längs z-axeln, vilket även är skalets symmetriaxel.

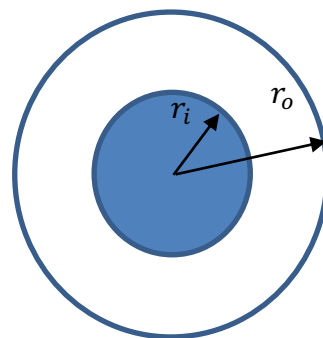


2 Elektrostatik

Problemlösningsdel (8 poäng)

Den inre ledaren på en koaxialkabel har radien $r_i = 5 \text{ mm}$ och ansluts till spänningen $U = 40 \text{ V}$. Ytterledaren har radien $r_o = 10 \text{ mm}$ och är jordad, dvs dess potential är $U = 0 \text{ V}$. Beräkna följande:

- Ett uttryck för ekvipotentialytorna mellan ledarna, samt positionen för den ekvipotentialyta som har potentialen $U = 10 \text{ V}$. (3 poäng)
- Den maximala fältstyrkan inuti koaxialkabeln. (2 poäng)
- Kapacitansen per längdenhet hos koaxialkabeln, samt den relativa permittiviteten hos det dielektriska materialet mellan ledarna om det ligger laddningen $\rho_l = 15 \text{ nC/m}$ på innerledaren. (3 poäng)

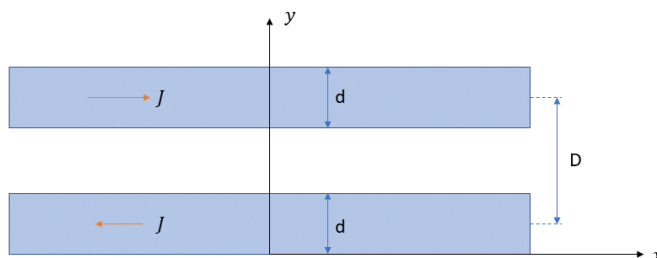


3 Magnetostatik

Problemlösningsdel (8 poäng)

Två strömförande ledare ligger placerade parallellt med varandra, se figuren. Båda ledarna har ett rektangulärt tvärsnitt. Båda ledarna är oändligt långa, (oändlig utsträckning i x-led), de är även oändligt breda, (oändlig utsträckning i z-led).

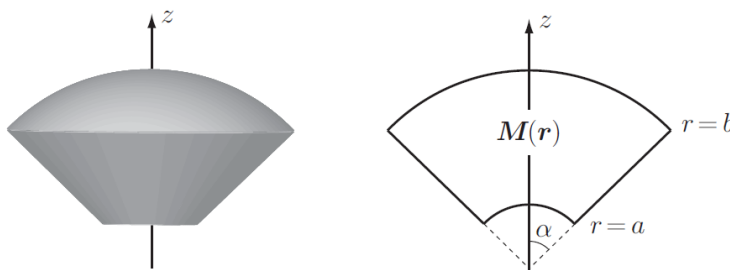
(Man kan därmed snarare prata om två oändligt stora ledande plan.) Dess tjocklek är d och de ligger placerade på ett avstånd D ifrån varandra. De båda planen leder en ström i motsatta riktningar, se figuren, och strömtätheterna i ledarna är J . Beräkna det magnetiska fältet B överallt. Tips: använd Amperers lag.



4 Magnetostatik

Problemlösningsdel (8 poäng)

Ett sfäriskt segment $\{(r, \theta, \varphi): a \leq r \leq b, 0 \leq \theta \leq \alpha, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$, se även nedanstående figur har en magnetisering som är orienterad i radiell led, och beskrivs av uttrycket $\vec{M}(r) = M_0 \frac{a^2}{r^2} \hat{r}$. Beräkna den magnetiska fältstyrkan, B , i origo.



$$\textcircled{1} W = (V_B - V_A) Q$$

$$\text{For } V_A: V_A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} dr_A$$

$$\text{contribution of an element (ring)} dr_A = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 |R|}$$

$$dq = f_s ds$$

$$f_s = \frac{Q}{2\pi a^2}, ds = a^2 \sin\theta d\theta d\phi$$

$$|R| = \sqrt{(d+z')^2 + a^2 \sin^2\theta}$$

$$z' = a \cos\theta$$

$$\Rightarrow V_A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \frac{Q \cdot a^2 \sin\theta d\theta d\phi}{8\pi^2 \epsilon_0 a^2 \sqrt{(d+a\cos\theta)^2 + a^2 \sin^2\theta}} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\theta d\theta}{\sqrt{d^2 + a^2 + 2ad\cos\theta}}$$

$$\text{change of variable: } \cos\theta = t \quad -\sin\theta d\theta = dt$$

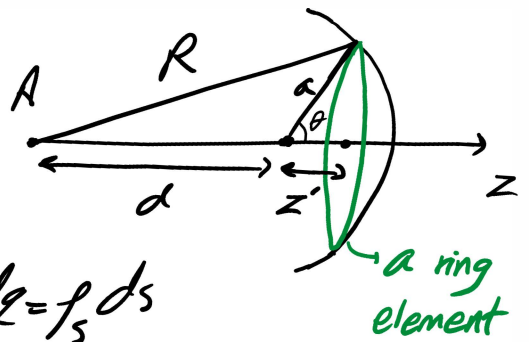
$$V_A = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{d^2 + a^2 + 2dat}} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 da} \left[\sqrt{d^2 + a^2 + 2dat} \right]_0^1 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 da} \left[a+d - \sqrt{a^2 + d^2} \right]$$

For V_B , one can repeat a similar process or as a shortcut

say that $\lim_{d \rightarrow 0} V_A = V_B$. so

$$V_B = \lim_{d \rightarrow 0} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 da} \left[a+d - \sqrt{a^2 + d^2} \right] = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a}$$

$$\Rightarrow W = Q \left[\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 ad} (d - a - d + \sqrt{a^2 + d^2}) \right] = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 ad} \left[\sqrt{a^2 + d^2} - a \right]$$



2



a. $\nabla^2 V = 0 \rightarrow \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial V}{\partial \rho} \right) = 0 \xrightarrow{\int} \rho \frac{\partial V}{\partial \rho} = A \xrightarrow{\int} V = A \ln \rho + B$

$$\begin{cases} \rho = r_o \\ V = 0 \end{cases} \Rightarrow 0 = A \ln r_o + B$$

$$\begin{cases} \rho = r_i \\ V = 40 \end{cases} \Rightarrow 40 = A \ln r_i + B$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -4.6 A + B = 0 \\ -5.2 A + B = 40 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -57.7 \\ B = -265.75 \end{cases}$$

$$V = -57.7 \ln \rho - 265.75 \quad (2P) \quad \text{or} \quad V = V_0 \frac{\ln(r_o/\rho)}{\ln(r_o/r_i)} \quad (V_o = 40)$$

$$10 = -57.7 \ln \rho - 265.75 \Rightarrow \rho = 8.4 \text{ mm} \quad (1P)$$

b. $\vec{E} = -\nabla V = -\frac{\partial V}{\partial \rho} \hat{a}_\rho = -\frac{dV}{d\rho} \hat{a}_\rho = -\frac{d}{d\rho} (-57.7 \ln \rho - 265.75) \hat{a}_\rho = \frac{57.7}{\rho} \hat{a}_\rho \quad (1P)$

$$E_{\text{max}} = E|_{\rho=5 \text{ mm}} = \frac{57.7}{5 \times 10^{-3}} = 11.5 \text{ kV/m} \quad (1P)$$

c. $V = V_0 \frac{\ln(r_o/\rho)}{\ln(r_o/r_i)} \xrightarrow{-\nabla} \vec{E} = \frac{V_0}{\rho} \frac{1}{\ln \frac{r_o}{r_i}} \hat{a}_\rho$

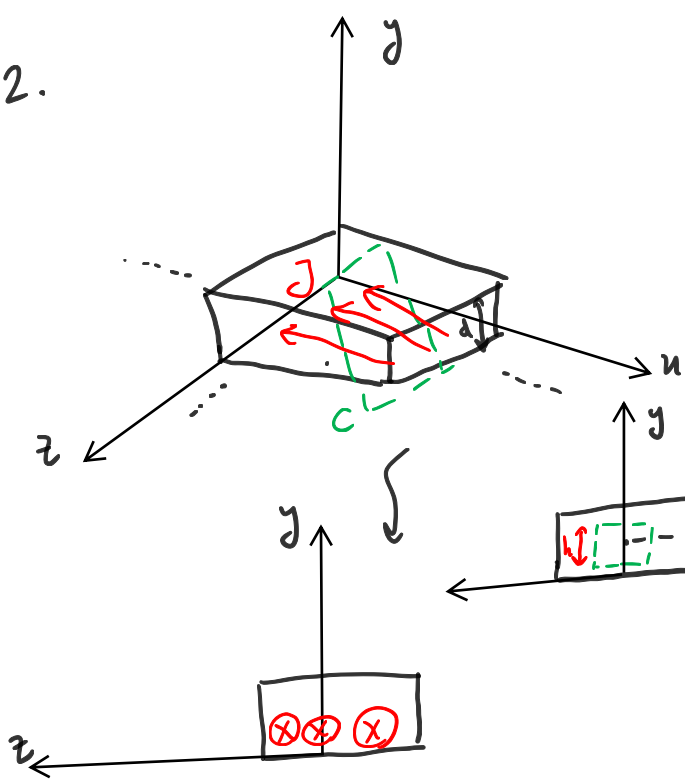
$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{Q}{\epsilon} \Rightarrow \vec{E} = \frac{Q}{2\pi L \epsilon \rho} \hat{a}_\rho$$

$$\frac{V_0}{\ln \frac{r_o}{r_i}} = \frac{Q}{2\pi L \epsilon} \quad \downarrow$$

$$C = \frac{Q}{V_0} = \frac{2\pi L \epsilon}{\ln r_o/r_i} \quad (2P)$$

$$\frac{Q}{L} = \frac{V_0 \cdot 2\pi \epsilon}{\ln r_o/r_i} = 15 \text{ nC} \Rightarrow E_r = \frac{15 \times 10^{-9} \times \ln \frac{10 \times 10^{-3}}{5 \times 10^{-3}}}{40 \times 2\pi \times 8.85 \times 10^{-12}} = 4.67 \quad (1P)$$

2.



$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu I = \mu \int \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s}$$

a) inside the slab:

$$2 B_{in} \times w = \mu w \times 2 \left(y - \frac{d}{2}\right) J$$

$$d/2 \Rightarrow B_{in} = \mu J \left(y - \frac{d}{2}\right) \Rightarrow B_{in} = \begin{cases} -\mu J \left(y - \frac{d}{2}\right) \hat{a}_z & \frac{d}{2} < y < d \\ \mu J \left(y - \frac{d}{2}\right) \hat{a}_z & 0 < y < \frac{d}{2} \end{cases}$$

b) outside the slab

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu \int \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s}$$

$$2 B_{out} \times w = \mu w \times d \times J$$

$$\Rightarrow B_{out} = \mu \frac{Jd}{2} \Rightarrow B_{out} = \begin{cases} -\frac{\mu Jd}{2} \hat{a}_z & y > d \\ \mu \frac{Jd}{2} \hat{a}_z & y < 0 \end{cases}$$

(2p)

(2p)

The vertical component of H of each current line is canceled out by the adjacent current line

for two slabs, we can use superposition. ($J \rightarrow -J$ for second slab)

$$\vec{B}_{total} = \begin{cases} \mu \frac{Jd}{2} + \mu \frac{(-J)d}{2} = 0 & y < 0 \text{ \& } y > d+d \\ \mu J \left(y - \frac{d}{2}\right) + \mu \frac{(-J)d}{2} = \mu J \left(y - d\right) \hat{a}_z & 0 < y < \frac{d}{2} \\ \mu J \left(y - \frac{d}{2}\right) + \mu \frac{(-J)d}{2} = -\mu J \hat{a}_z & \frac{d}{2} < y < d \\ -\mu \frac{Jd}{2} + \mu \frac{(-J)d}{2} = -\mu J d \hat{a}_z & d < y < d \end{cases}$$

(4p)

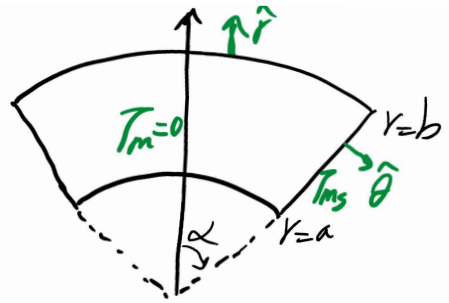
$d + \frac{d}{2}$ is the mid point of the upper slab

$$\begin{cases} -\mu \frac{Jd}{2} + \mu (-J) \left(y - d - \frac{d}{2}\right) = -\mu J \left(y - d\right) \hat{a}_z & d < y < d + \frac{d}{2} \\ -\mu \frac{Jd}{2} - \mu (-J) \left(y - d - \frac{d}{2}\right) = \mu J \left(y - d - d\right) \hat{a}_z & d + \frac{d}{2} < y < d + d \end{cases}$$

$$\vec{B}(0) = ?$$

$$(4) \vec{J}_m = \nabla \times \vec{M} = \nabla \times \left(M_0 \frac{a^2}{r^2} \hat{r} \right) = 0$$

M is purely radial, so there is no rotation.



$$\vec{J}_{ms} = \vec{M} \times \hat{n}$$

On the two top & bottom spherical caps $\hat{n} = \hat{r}$ and $\hat{n} = -\hat{r}$ respectively, which results in $\vec{J}_{ms} = 0$ on those surfaces. But on the lateral surface $\hat{n} = \hat{\theta}$ which gives rise to a surface current in the direction of $\hat{\phi}$.

$$\vec{J}_{ms} = M_0 \frac{a^2}{r^2} \hat{r} \times \hat{\theta} = M_0 \frac{a^2}{r^2} \hat{\phi}$$

Now by stratifying the shell into ribbons and taking each at a time, we integrate over r from 'a' to 'b' as follows:

Contribution of one ring $d\vec{B} = \hat{z} \mu_0 I b^2$

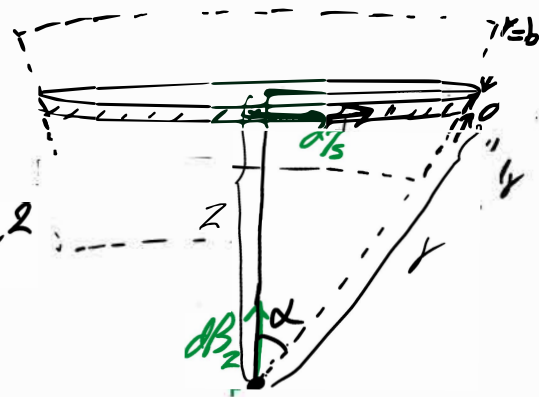
[See Cheng ex. 6-6, pp. 238]

$$\frac{2(z^2 + b^2)^{3/2}}$$

$$I = \int_{ms} dr = M_0 \frac{a^2}{r^2} dr$$

$$, z^2 + b^2 = r^2$$

$$b = r \sin \alpha$$



$$\vec{B}(0) = \int_a^b d\vec{B} = \hat{z} \int_a^b \frac{\mu_0 M_0 a^2 r^2 \sin^2 \alpha}{2r^2 \times r^3} dr = \hat{z} \frac{\mu_0 M_0 a^2 \sin^2 \alpha}{2} \left[-\frac{1}{2r^2} \right]_a^b$$

$$= \hat{z} \frac{\mu_0 M_0 a^2 \sin^2 \alpha}{4} \left[\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} \right]$$