

## Övningstenta i Elektromagnetisk fältteori,

2017-11-25 kl. 8.30-12.30

Kurskod EEF031

**Tillåtna hjälpmedel:** BETA, Physics Handbook,  
Formelsamling i Elektromagnetisk fältteori.  
Valfri kalkylator, minnet  
måste raderas innan tentamensstart.  
Inga egna anteckningar utöver egna formler på sista  
bladet i formelsamlingen i elektromagnetisk fältteori

**Förfrågningar:** Måns Larsson, tel. 073-376 97 84.

**Examinator:** Andreas Fhager, tel. 076-125 70 12

**Lösningar:** Anslås på kursens hemsida

**Resultatet:** Distribueras på föreläsning

**Granskning:** Plats och tid annonseras på kurshemsidan

**Till tentan:** Elektrostatiken (tal 1 och 2) och Magnetostatiken (tal 3 och 4) bedöms  
var för sig och poängen tillgodoräknas separat på tentan. Även teoridel och  
problemdel räknas separat. Duggaresultatet räknas om till en procentsats av  
maxpoängen och respektive tal på tentan kan om så önskas hoppas över med lika  
många procent av maxpoängen tillgodo. Om man trots poäng tillgodo från duggan  
väljer att räkna motsvarande tal på tentan gäller bästa resultatet. Resultat från duggan  
gäller på ordinarie tenta och de två närmast därpå följande omtentamina.

---

# OBS!

**Svaren på förståelsedelen skall ges direkt på tesen som ska lämnas in**

Förståelsefrågorna besvaras genom att markera en av rutorna efter varje  
påstående till höger. En och endast en ruta på varje rad skall markeras.  
De tre svarsalternativen (från vänster till höger är) Rätt, Vet ej och Fel.  
Riktigt svar ger +0.2 poäng oriktigt svar ger -0.2 p. Vet ej är neutralt och  
ger noll poäng. Förståelseuppgifterna ger maximalt 1 poäng och lägst -  
1poäng och man kan därför få 1 poäng även med ett vet ej svar.

Anonym kod: .....

# 1 Elektrostatik

## Problemlösningsdel (8 poäng)

En sfäriskt symmetrisk laddningsfördelning  $\rho$  har placerats i vakuum och ger upphov till potentialen

$$V(R) = \begin{cases} V_0 \left(1 - \frac{R}{a}\right), & R < a \\ 0, & R > a \end{cases}$$

A) Beräkna laddningsfördelningen,  $\rho(R)$ , överallt, samt den totala laddningen  $Q$ .

## Förståelsedel (4 poäng)

b) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

	ja	?	nej
Elektrostatiken bygger på två och endast två postulat.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Den elektromagnetiska teorin bygger på postulat som formulerats baserat på experimentella upptäckter.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Den grundläggande fysiken i problemlösningsdelen ovan bygger <b>bland annat</b> på Gauss lag.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Den grundläggande fysiken i problemlösningsdelen ovan bygger <b>bland annat</b> på att B-fältet är rotationsfritt.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Den grundläggande fysiken i problemlösningsdelen ovan bygger <b>bland annat</b> på att E-fältet är divergensfritt.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Den grundläggande fysiken i problemlösningsdelen ovan bygger <b>bland annat</b> på att rotationen av B-fältet är lika med den fria strömtätheten gånger permeabiliteten.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

c) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

	ja	?	nej
Det elektrostatiska fältet, $E$ , har enheten $V/m^3$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
I en makroskopisk teori är laddningsfördelningen homogen i ett infinitesimalt volymselement $dV$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
I den elektromagnetiska teorin kan laddning förstöras.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Definitionen av det elektriska fältet förutsätter att laddningen är bevarad.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Två positivt laddade sfärer påverkar varandra med en attraktiv kraft.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Elektrostatiska potentiallinjer är vinkelräta mot E-fältslinjerna.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

d) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

	ja	?	nej
Det elektrostatiska E-fältet är källfritt.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Det elektrostatiska E-fältet är rotationsfritt.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Det elektrostatiska E-fältet är konservativt.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Det elektrostatiska E-fältet i en perfekt ledare kan variera.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Vakuum har den relativa permittiviteten $\epsilon_r=0,0$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Vatten har en något lägre relativ permittivitet än vakuum.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

g) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

	ja	?	nej
Poissons ekvation kan ha mer än en lösning som uppfyller givna randvillkor.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Speglingsmetoden kan ibland användas för att lösa Poissons ekvation.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Speglingsmetoden kan alltid användas oavsett problemets geometri för att lösa Poissons ekvation.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Poissons ekvation kan alltid lösas analytiskt.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Laplaces ekvation är ett specialfall av Poissons ekvation.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Laplaces ekvation gäller bara om man antar att alla materialparametrar är konstanta i rummet.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

# 2 Elektrostatik

## Problemlösningsdel (8 poäng)

Anta att viloenenergi (givet av  $E=mc^2$ ) hos en elektron härstammar enbart från dess elektrostatiska energi. Beräkna då elektronens radie under dessa två olika antaganden:

**A)** elektronens laddning fördelas sfäriskt med jämn laddningsfördelning över dess volym. (5 poäng)

**B)** elektronens laddning fördelas sfäriskt med jämn laddningsfördelning över dess yta. (3 poäng)

Vi antar även att elektronen befinner sig i vakuum långt ifrån övriga laddningar.

## Förståelsedel (4 poäng)

### c) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

Gauss lag på punktform och Gauss lag på integralform är helt ekvivalenta och beskriver helt ekvivalent fysik.

Kontinuitetsekvationen kan härledas från de elektrostatiska postulaten.

Den grundläggande fysiken i problemlösningsdelen ovan bygger **endast** på Gauss lag.

Den grundläggande fysiken i problemlösningsdelen ovan bygger **endast** på att B-fältet är rotationsfritt.

Den grundläggande fysiken i problemlösningsdelen ovan bygger **endast** på att E-fältet är källfritt.

Den grundläggande fysiken i problemlösningsdelen ovan bygger **endast** på att rotationen av B-fältet är lika med den fria strömtätheten gånger permeabiliteten.

### d) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

**ja**      **?**      **nej**

En elektrisk dipol används som modell när man vill beskriva de dielektriska egenskaperna hos ett material.

Dipolmomentet hos en elektrisk dipol beror bland annat på avståndet mellan laddningarna.

E-fältet från en elektrisk dipol är rotationsfritt.

Permanentmagneter har ett permanent polarisationsfält P.

M fältet spelar samma roll i magnetostatiken som polarisationsfältet P i elektrostatiken.

Den elektriska suseptibiliteten är en materialparameter som beskriver sambandet mellan D- och P-fälten.

### e) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

**ja**      **?**      **nej**

En elektrisk potential kan definieras tack vare att divergensen av E-fältet är nollskild.

En elektrisk potential kan definieras tack vare att E-fältet är rotationsfritt.

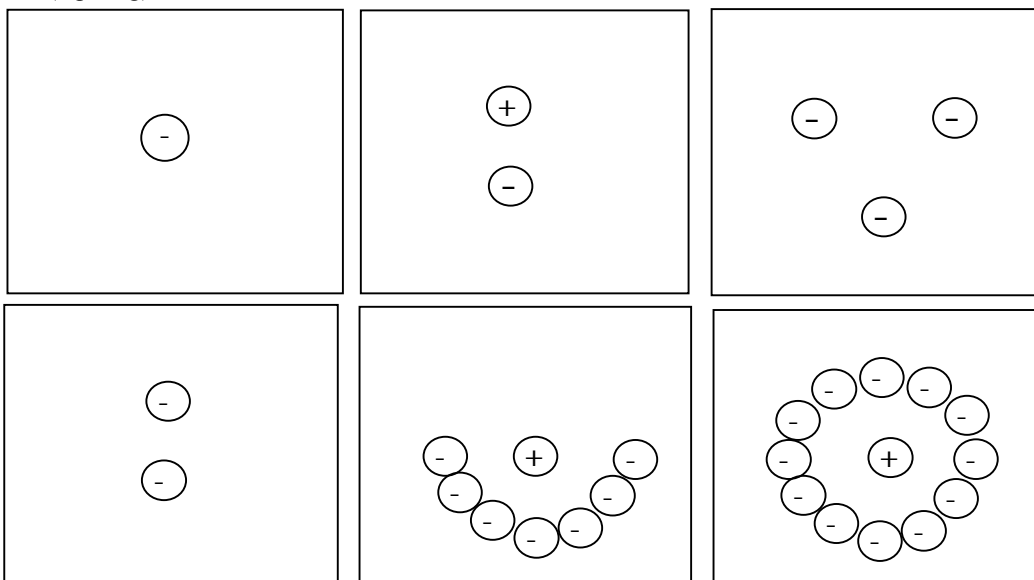
Den elektriska potentialen kan definieras som  $E = -\nabla V$ .

Den elektriska potentialen kan definieras som  $E = \nabla V$

Om vi använder  $E = -\nabla V$  som definition av potentialen betyder det att potentialen ökar om man rör sig i riktning mot E-fältslinjerna.

Den elektrostatiska potentialen är en vektorstorhet.

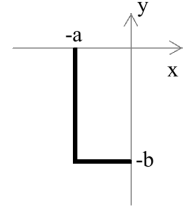
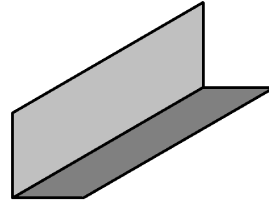
**f)** Skissa E-fältslinjerna runt följande laddningsfördelningar. Alla bilder visar olika konfigurationer av positivt och negativt laddade linjeladdningar. Alla bilder beskriver tvärsnitt av linjeladdningarna, som alltså leder in och ut papperet. För poäng ska det principiella utseendet vara korrekt i hela det markerade kvadratiska området för respektive konfiguration. (1 poäng)



# 3 Magnetostatik

## Problemlösningssedel (8 poäng)

En tunn metallplåt vars längd  $l$  är mycket längre än dess bredd  $w$  har böjts till formen av ett "L". Vecket har orienterats så att de två planen är parallella med  $xz$ - och  $yz$ -planen enligt figuren och plåten sträcker sig alltså från  $z = -l/2$  till  $z = l/2$ . Den totala bredden  $w$  är sålunda fördelad med en bit  $a$  och en bit  $b$  där  $a + b = w$  enligt figuren.



- A) En ström  $I$  flyter genom plåten med riktning in i papperet. Beräkna det resulterande magnetfältet  $\mathbf{B}$  (till storlek och riktning) i origo. (6poäng)
- B) Antag att vi istället för att böja plåten har delat den i två stycken. Dvs. De två plåtarna är isolerade från varandra längs med  $(-a, -b, z)$ . Den horisontella plåten ( $y = -b$ ) leder nu ström in i papperet som tidigare men den vertikala ( $x = -a$ ) leder den tillbaka ut ur papperet. Vilket  $\mathbf{B}$  fås vid specialfallet  $a = b$ ? (2 poäng)

## Förståelsedel (4 poäng)

### c) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

	ja	?	nej
I grunden bygger fysiken i problemlösningssedeln på ett och endast ett postulat om B-fältet.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
I grunden bygger fysiken i problemlösningssedeln på två och endast två postulat om B-fältet.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Den grundläggande fysiken i problemlösningssedeln ovan bygger <b>bland annat</b> på Gauss lag.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Den grundläggande fysiken i problemlösningssedeln ovan bygger <b>bland annat</b> på att B-fältet är rotationsfritt.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Den grundläggande fysiken i problemlösningssedeln ovan bygger <b>bland annat</b> på att E-fältet är källfritt.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Den grundläggande fysiken i problemlösningssedeln ovan bygger <b>bland annat</b> på att rotationen av B-fältet är lika med den fria strömtätheten gånger permeabiliteten.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

### d) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

	ja	?	nej
B-fältet är rotationsfritt.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
B-fältet är divergensfritt.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
B-fältet är konservativt.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
B-fältet definieras utifrån kraftverkan på en laddad partikel i vila.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
B-fältet har enheten Ampere.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
B-fältet härrör från magnetiska laddningar.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

### e) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

	ja	?	nej
Laddningar som rör sig <i>vinkelrätt</i> mot B-fältslinjerna utsätts för en kraft orsakad av B-fältet.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Laddningar som rör sig <i>parallellt</i> med B-fältslinjerna utsätts för en kraft orsakad av B-fältet.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Laddningar i rörelse som <i>endast</i> utsätts för ett E-fält påverkas av en kraft.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Laddningar i <i>vila</i> som <i>endast</i> utsätts för ett B-fält <i>kan</i> påverkas av en kraft.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Laddningar i <i>vila</i> som utsätts både för ett B-fält och ett E-fält påverkas <i>alltid</i> av en kraft.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Kraften på en laddning orsakad av ett B-fält har samma riktning som kraften orsakad av E-fältet.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

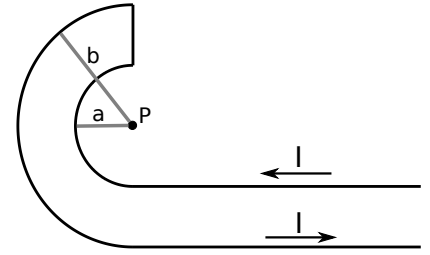
### f) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

	ja	?	nej
Om det går en ström i en kabel så är det ett exempel på en konvektionsström.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Ett blixtnedslag är ett exempel på en konduktionsström.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
En konduktionsström kan beskrivas med hjälp av Ohms lag.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
En konvektionsström kan beskrivas med hjälp av Ohms lag.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
H-fältets roll i magnetostatiken påminner om D-fältets roll i elektrostatiken.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
M-fältets roll i magnetostatiken påminner om E-fältets roll i elektrostatiken.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

# 4 Magnetostatik

## Problemlösningsdel (8 poäng)

A) En ledande slinga ligger i ett plan enligt figur. Den cirkulära delen närmast  $P$  har radien  $a$  och den cirkulära delen längst till vänster har radien  $b$ . De raka delarna är mycket långa. Hitta ett uttryck det magnetiska fältet  $B$  i punkten  $P$ .



## Förståelsedel (4 poäng)

b) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

Kontinuitetsekvationen kan härledas från de magnetostatiska postulaten.

I grunden bygger fysiken i problemlösningsdelen på två och endast två postulat om B-fältet.

Den grundläggande fysiken i problemlösningsdelen ovan bygger **endast** på Gauss lag.

Den grundläggande fysiken i problemlösningsdelen ovan bygger **endast** på att B-fältet är rotationsfritt.

Den grundläggande fysiken i problemlösningsdelen ovan bygger **endast** på att divergensen av E-fältet är lika med laddningstätheten genom  $\epsilon_0$ .

Den grundläggande fysiken i problemlösningsdelen ovan bygger **endast** på att rotationen av B-fältet är lika med den fria strömtätheten gånger permeabiliteten.

ja	?	nej
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

c) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

Normalkomponenten av strömtäthetsfältet,  $J$ , är alltid kontinuerlig i gränsen mellan två material.

Tangentialkomponenten av strömtäthetsfältet,  $J$ , är alltid kontinuerlig i gränsen mellan två material.

Man kan teckna Biot-Savarts lag som en volymsintegral.

Man kan teckna Biot-Savarts lag för en ytström

Användandet av Biot-Savarts lag för att beräkna vikt B-fältet en ström ger upphov till kan bara göras från strömmar som går i en sluten slinga.

Amperes lag kan alltid användas istället för Biot-Savarts lag vid fältberäkningar.

ja	?	nej
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

d) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

Permanentmagneter har ett permanent magnetiseringsfält  $M$ .

En permanentmagnet är ett exempel på ett material med linjär permeabilitet.

I en permanentmagnet vill man ha ett magnetiskt material med en bred hystereskurva.

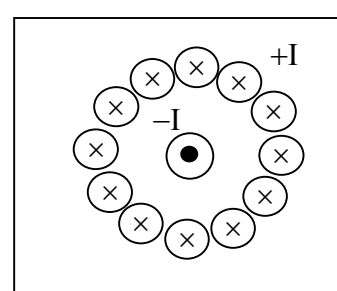
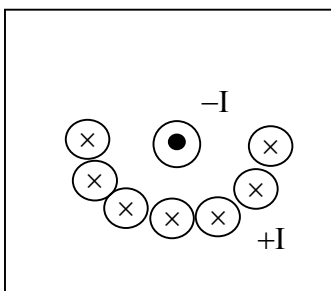
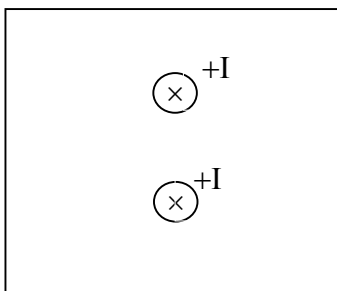
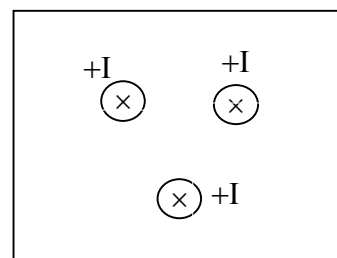
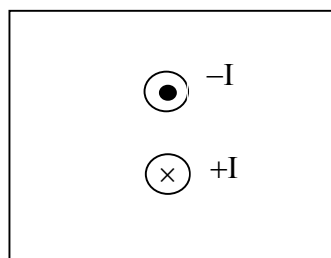
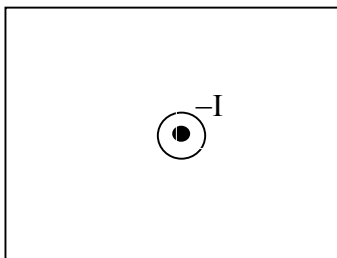
En permanentmagnet genererar ett B-fält trots att H-fältet är noll.

Ett ferromagnetiskt material har ett linjärt samband mellan B- och H-fälten.

Ett paramagnetiskt material motverkar ett pålagt externt fält.

ja	?	nej
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

f) Skissa B-fältslinjerna runt följande strömfördelningar. Alla bilder visar olika konfigurationer av strömmar som går in eller ut ur papperet. (-I innebär att strömmen går ut ur papperet, +I att den går in i papperet.) För poäng ska det principiella utseendet vara korrekt i hela det markerade kvadratiska området för respektive konfiguration. (1 poäng)



# Elektrostatik

$$V(R) = \begin{cases} V_0 \left(1 - \frac{R}{a}\right) & , R < a \\ 0 & , R > a \end{cases}$$

Vi beräknar enklast laddningsfördelningen från Poissons ekvation.

$$\rho_v = -\epsilon_0 \nabla^2 V(R)$$

Laplace operatören ges i sfäriska koordinater av

$$\Delta V = \nabla^2 V = \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} \left( R^2 \frac{\partial V}{\partial R} \right) + \frac{1}{R^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{R^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2}$$

vilket i vårt fall förenklas till

$$\Delta V = \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} \left( R^2 \frac{\partial V}{\partial R} \right)$$

Vi utför deriveringarna och får

$$\Delta V = \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} \left( R^2 \cdot \left(-\frac{V_0}{a}\right) \right)$$

$$= \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} \left( -\frac{R^2 V_0}{a} \right)$$

$$= \frac{1}{R^2} \cdot \left( -\frac{2R V_0}{a} \right)$$

$$= -\frac{2V_0}{aR}$$

$$\Rightarrow \rho_v = \frac{2\epsilon_0 V_0}{aR}$$

för  $R < a$

Vi vet att  $V(R > a) = 0$  vilket dels säger att  $\rho_v(R > a) = 0$  men också att den totala inneslutna laddningen är noll. Det måste därför finnas en ytladdning på  $R = a$  med samma magnitud men motsatt tecken.

Vi integrerar först upp vårt funna  $\rho_v$ .

$$\begin{aligned} Q_v &= \int_V \rho_v dv \\ &= \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a dR R^2 \sin\theta \frac{2\varepsilon_0 V_0}{aR} \\ &= 4\pi \cdot \frac{2\varepsilon_0 V_0}{a} \cdot \left[ \frac{R^3}{3} \right]_0^a \\ &= 4\pi \cdot \varepsilon_0 V_0 a \end{aligned}$$

Och eftersom

$$Q = Q_v + Q_s = 0$$

$$\Rightarrow Q_s = -4\pi \varepsilon_0 V_0 a$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \rho_s &= -\frac{4\pi \varepsilon_0 V_0 a}{4\pi a^2} \\ &= -\frac{\varepsilon_0 V_0}{a} \end{aligned}$$

Alltså:

$$\rho_v(R) = \begin{cases} \frac{2\varepsilon_0 V_0}{aR}, & R < a \\ 0, & R > a \end{cases}$$

$$\text{och } \rho_s(R) = -\frac{\varepsilon_0 V_0}{a}, \quad R = a$$

Samt:  $Q = 0$

(Den som föredrar en mer kompakt form kan såklart skriva den totala fördelningen som  $\rho(R) = \rho_v(R) + \rho_s \cdot \delta(R-a)$ .)

Anta att en elektrons viloeenergi (givet av  $E = m_0 c^2$ ) härstammar enbart från dess elektrostatiska energi.

Beräkna då dess radie under dessa två olika antaganden:

a) elektronens <sup>laddning</sup> fördelas starkt med jämn laddningsfördelning över dess volym

b) || ||  
— || — över dess yta

a) Hitta ett uttryck för den elektrostatiska energin hos en sfär med jämn laddningsfördelning  $E$  ges av, antätt radien  $a$

$$(R < a) \quad \text{Gauss} \Rightarrow \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \frac{4\pi R^3}{3\epsilon_0} \rho$$

$$\Rightarrow E_R \cdot 4\pi R^2 = \frac{4\pi R^3}{3\epsilon_0} \rho \Rightarrow E_R = \frac{\rho R}{3\epsilon_0}$$

( $R > a$ ) Gauss  $\Rightarrow$

$$E_R = \frac{1}{4\pi R^2} \cdot \frac{4\pi a^3}{3\epsilon_0} \rho = \frac{a^3 \rho}{3\epsilon_0 R^2}$$

$$V(R) = - \int_{\infty}^R E_R dR = - \int_{\infty}^R \frac{a^3 \rho}{3\epsilon_0 R^2} dR = \left[ \frac{a^3 \rho}{3\epsilon_0 R} \right]_{\infty}^R = \frac{a^3 \rho}{3\epsilon_0 R}$$



Potential for  $R < a$

$$\begin{aligned}
 V(R) &= - \int_{\infty}^R E_R dR = - \int_a^R \frac{K}{3\epsilon_0} \rho dR - \int_{\infty}^a E_R dR \\
 &= - \left[ \frac{R^2}{6\epsilon_0} \rho \right]_a^R + \frac{a^2}{3\epsilon_0} \rho \\
 &= - \frac{R^2}{6\epsilon_0} \rho + \frac{a^2}{6\epsilon_0} \rho + \frac{a^2}{3\epsilon_0} \rho = \frac{a^2}{2\epsilon_0} \rho - \frac{R^2}{6\epsilon_0} \rho
 \end{aligned}$$

$$W_e = \frac{1}{2} \int_V \rho V(R) dR = \frac{1}{2} \rho^2 \int_0^a \left( \frac{a^2}{2\epsilon_0} - \frac{R^2}{6\epsilon_0} \right) 4\pi R^2 dR$$

$$= \frac{\pi \rho^2}{\epsilon_0} \int_0^a \left( a^2 R^2 - \frac{1}{3} R^4 \right) dR$$

$$= \frac{\pi \rho^2}{\epsilon_0} \left[ \frac{a^2 R^3}{3} - \frac{R^5}{15} \right]_0^a = \frac{4\pi \rho^2 a^5}{15\epsilon_0}$$

$= \frac{4a^5}{15}$

$$= \frac{9e^2}{(4\pi)^2 a^6} \cdot \frac{4\pi a^5}{15\epsilon_0}$$

$$= \frac{3e^2}{4\pi \cdot 5 \cdot \epsilon_0 \cdot a}$$

laddring e. jämnt fördelat  
over  $\frac{4\pi a^3}{3} \Rightarrow \rho = \frac{3e}{4\pi a^3}$

$$W_e = E = mc^2$$

$$\Rightarrow mc^2 = \frac{3e^2}{20\pi \epsilon_0 a} \Rightarrow a = \frac{3e^2}{20\pi \epsilon_0 mc^2}$$

$$m_e = 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$$

$$\epsilon_0 = \frac{1}{36\pi} \cdot 10^{-9}$$

$$c = 3 \cdot 10^8$$

$$e = 1,6 \cdot 10^{-19}$$

$$a = \frac{3 \cdot 1,6^2 \cdot 10^{-38}}{9,11 \cdot 10^{-31} \cdot 9 \cdot 10^{16} \cdot 20\pi \cdot \frac{1}{36\pi} \cdot 10^{-9}} \text{ m}$$

$$\approx 0,169 \cdot 10^{-14} \text{ m} = 1,69 \cdot 10^{-15} \text{ m}$$

b)

$$p_s = \frac{e}{4\pi a^2}$$

( $a < R$ ) Beräkna potentialen på sfärens yta

$$E_R = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 R^2}$$

$$V(R=a) = - \int_{\infty}^a \frac{e}{4\pi\epsilon_0 R^2} dR = \left[ \frac{e}{4\pi\epsilon_0 R} \right]_{\infty}^a = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 a}$$

$$W_e = \frac{1}{2} \int_S p_s V(a) ds = \frac{1}{2} \cdot \frac{e}{4\pi a^2} \cdot \frac{e}{4\pi\epsilon_0 a} \cdot 4\pi a^2$$

$\uparrow$   
( $p=0$  i sfären)

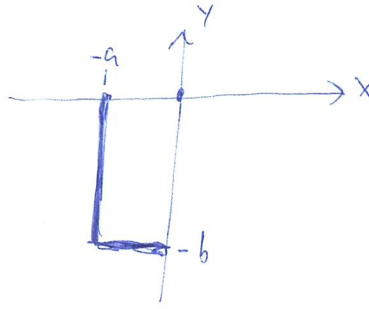
$$= \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 a}$$

$$W_e = E = m_e c^2 \Rightarrow m_e c^2 = \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 a}$$

$$\Rightarrow a = \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 m_e c^2}$$

$$a = \frac{1,6^2 \cdot 10^{-38}}{8\pi \cdot \frac{1}{36\pi} \cdot 10^{-9} \cdot 9,11 \cdot 10^{-31} \cdot 9 \cdot 10^{16}} \text{ m} = 0,14 \cdot 10^{-14} \text{ m} = 1,4 \cdot 10^{-15} \text{ m}$$

# Magnetostatik



a) Den totala strömmen  $I$  fördelas på en bredd  $w$  vilket ger en strömfördening

$$J_s = \frac{I}{w}$$

Strömmen genom en oändlig rak tråd ger enligt formelbladet upphov till ett magnetfält

$$B(r) = \hat{\varphi} \frac{\mu_0 i}{2\pi r}$$

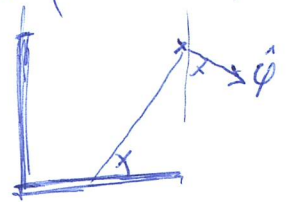
Om vi ser vår plåt som en uppsättning strömförande trådar får vi bidragen

$$dB = \hat{\varphi} \frac{\mu_0}{2\pi r} \cdot \frac{I}{w} dx$$

vilka vi integrerar upp.

Börja med delen i  $yz$ -planet. Då är  $\hat{\varphi} = \frac{1}{\sqrt{b^2+x^2}} \cdot (b\hat{x} + x\hat{y})$

$$B_i = \int_{-a}^0 \frac{\mu_0 I}{2\pi w} \cdot \frac{(b\hat{x} + x\hat{y})}{b^2+x^2} dx$$



Mha integral (111) och (112) i Beta  
(upplaga 5:7) fås lösningen

$$\begin{aligned} B_i &= \frac{\mu_0 I}{2\pi w} \cdot \left( \left[ \frac{b}{b} \arctan \frac{x}{b} \right]_{-a}^0 \hat{x} + \left[ \frac{1}{2} \ln |x^2+b^2| \right]_{-a}^0 \hat{y} \right) \\ &= \frac{\mu_0 I}{2\pi w} \cdot \left( \arctan \frac{a}{b} \hat{x} + \frac{1}{2} \ln \frac{b^2}{a^2+b^2} \hat{y} \right) \end{aligned}$$

På samma sätt fås

$$B_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi w} \left( -\frac{1}{2} \ln \frac{a^2}{a^2+b^2} \hat{x} - \arctan \frac{b}{a} \hat{y} \right)$$

Det totala fältet blir då

$$B = B_1 + B_2$$

$$= \frac{\mu_0 I}{2\pi w} \left[ \left( \arctan \frac{a}{b} - \frac{1}{2} \ln \frac{a^2}{a^2+b^2} \right) \hat{x} + \left( \frac{1}{2} \ln \frac{b^2}{a^2+b^2} - \arctan \frac{b}{a} \right) \hat{y} \right]$$

b) Om  $a=b$  fås

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \left( \arctan \frac{a}{a} \hat{x} + \frac{1}{2} \ln \frac{a^2}{2a^2} \hat{y} \right)$$

$$= \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \left( \frac{\pi}{4} \hat{x} + \ln \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{y} \right)$$

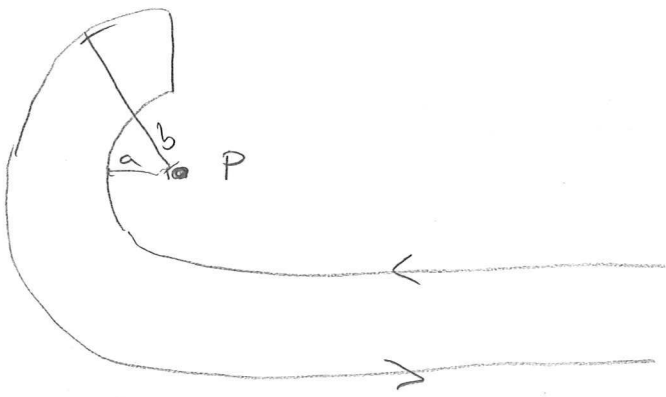
Notera att vi nu har  $J_s = \frac{I}{a}$  och inte  $\frac{I}{w}$ .

Den motriktade strömmen i den vertikala plåten ger

$$B_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \left( \ln \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{x} + \frac{\pi}{4} \hat{y} \right)$$

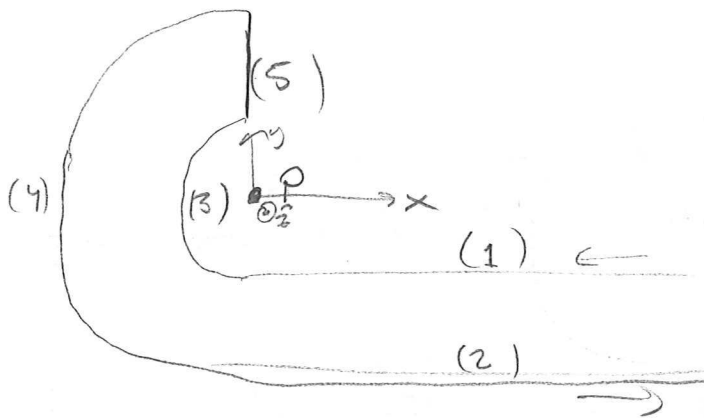
och summan blir

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \left( \frac{\pi}{4} + \ln \frac{1}{\sqrt{2}} \right) (\hat{x} + \hat{y})$$



Delat in i 5 delar,

Beräkna bidraget från varje del för sig.



placera P i origo enligt fig.

Biot - Savart  $B = \oint_C dB$   $dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dl \times R}{R^3}$

(1)

$$dl = -\hat{x} dx \quad R = x\hat{x} + a\hat{y}, \quad R = \sqrt{x^2 + a^2}$$

$$dl \times R = -a dx \hat{z}$$

$$B_1 = \int_{x=0}^{\infty} \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{-a \hat{z}}{(x^2 + a^2)^{3/2}} dx = -\hat{z} \frac{a\mu_0 I}{4\pi} \int_0^{\infty} \frac{1}{(x^2 + a^2)^{3/2}} dx$$

$$= -\hat{z} \frac{a\mu_0 I}{4\pi} \left[ \frac{x}{a^2 \sqrt{x^2 + a^2}} \right]_0^{\infty} = -\hat{z} \frac{\mu_0 I}{4\pi a}$$

$= \frac{1}{a^2}$

(2)

$$dl = \hat{x} dx \quad R = x\hat{x} + b\hat{y}$$

← Summe  
Werte für (2)

$$\Rightarrow B_2 = \frac{1}{z} \frac{\mu_0 I}{4\pi b}$$

(3)

$$dl = -a\hat{y} a d\varphi$$

$$R = -ar a$$

$$R = a$$

$$dl \times R = -a^2 \hat{z} d\varphi$$

$$B_3 = \int_{\varphi = \frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{-a^2 d\varphi}{a^3} \frac{1}{z} = - \frac{\mu_0 I}{4a} \hat{z}$$

(4)

$$dl = a\hat{y} b d\varphi$$

$$R = -ar b$$

$$R = b$$

$$dl \times R = b^2 \hat{z} d\varphi$$

$$\Rightarrow B_4 = \frac{\mu_0 I}{4b} \hat{z}$$

(5)

$$dl = \hat{y} dy$$

$$R = y\hat{y}$$

$$\Rightarrow dl \times R = 0 \Rightarrow B_5 = 0$$

$$B = B_1 + B_2 + B_3 + B_4 + B_5$$

$$= \frac{1}{z} \frac{\mu_0 I}{4} \left( \frac{1}{z} \left( \frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right) + \left( \frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right) \right)$$