

Övningstenta i Elektromagnetisk fältteori,

2015-11-28 kl. 8.30-12.30

Kurskod EEF031

Tillåtna hjälpmedel: BETA, Physics Handbook,
Formelsamling i Elektromagnetisk fältteori.
Valfri kalkylator, minnet
måste raderas innan tentamensstart.
Inga egna anteckningar utöver egna formler på sista
bladet i formelsamlingen i elektromagnetisk fältteori

Förfrågningar: Pegah Takook, tel 073-6872396.

Examinator: Andreas Fhager, tel. 076-125 70 12

Lösningar: Anslås på kursens hemsida

Resultatet: Distribueras på föreläsning

Granskning: Plats och tid annonseras på kurshemsidan

Till tentan: Elektrostatiken (tal 1 och 2) och Magnetostatiken (tal 3 och 4) bedöms
var för sig och poängen tillgodoräknas separat på tentan. Även teoridel och
problemdel räknas separat. Duggaresultatet räknas om till en procentsats av
maxpoängen och respektive tal på tentan kan om så önskas hoppas över med lika
många procent av maxpoängen tillgodo. Om man trots poäng tillgodo från duggan
väljer att räkna motsvarande tal på tentan gäller bästa resultatet. Resultat från duggan
gäller på ordinarie tenta och de två närmast därpå följande omtentamina.

OBS!

Svaren på förståelsedelen skall ges direkt på tesen som ska lämnas in

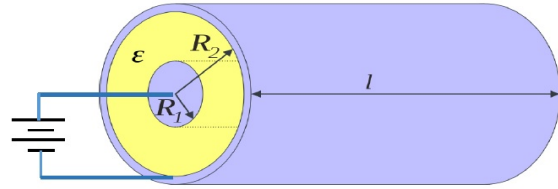
Förståelsefrågorna besvaras genom att markera en av rutorna efter varje
påstående till höger. En och endast en ruta på varje rad skall markeras.
De tre svarsalternativen (från vänster till höger är) Rätt, Vet ej och Fel.
Riktigt svar ger +0.2 poäng oriktigt svar ger -0.2 p. Vet ej är neutralt och
ger noll poäng. Förståelseuppgifterna ger maximalt 1 poäng och lägst -
1poäng och man kan därför få 1 poäng även med ett vet ej svar.

Anonym kod:

1 Elektrostatik

Problemlösningssdel (8 poäng)

Figuren illustrerar en kort sektion av en koaxialkabel. Den består av en innerledare med radie R_1 och en ytterledare med radie R_2 . Däremellan finns ett dielektriskt material med permittivitet ϵ . Kabelns längd är l , ytterledarens tjocklek kan försummas. En spänning kopplas till kabeln enligt figuren. Gör beräkningarna enligt uppgift A-D nedan. (I alla delar A-D nedan krävs en detaljerad matematisk beräkning av hur ni kommer fram till lösningen. Att tex använda en formel ur formelsamlingen för kapacitansen hos en koaxialkabel är inte godkänd lösningsmetod.)



- A) Antag att den elektriska laddningen $+Q$ placeras på ytan av innerledaren, och $-Q$ på ytterledaren. Använd Gauss lag för att beräkna E-fältet i hela rymden ($r < R_1$, $R_1 < r < R_2$, $r > R_2$).
- B) Beräkna potentialskillnaden mellan inner- och ytterledaren.
- C) Beräkna den elektrostatiska energin som lagras finns lagrad i denna kabellängd.
- D) Beräkna kabelns kapacitans.

Förståelsedel (4 poäng)

e) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

- Det inre och det yttre metall-skalet i problemlösningssdelen ovan påverkar varandra med en kraft.
- Om man ökar permittiviteten i kabeln ovan så ökar kabelns kapacitans.
- Den grundläggande fysiken i problemlösningssdelen ovan bygger **bland annat** på Gauss lag.
- Den grundläggande fysiken i problemlösningssdelen ovan bygger **bland annat** på att B-fältet är källfritt.
- Den grundläggande fysiken i problemlösningssdelen ovan bygger **bland annat** på att E-fältet är rotationsfritt.
- Den grundläggande fysiken i problemlösningssdelen ovan bygger **bland annat** på att rotationen av B-fältet är lika med den fria strömtätheten gånger permeabiliteten.

ja ? nej

f) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

- Den elektromagnetiska fältteori är ett exempel på en mikroskopisk teori.
- I en makroskopisk teori måste rymdladdningsfördelningar alltid vara konstanta i rummet.
- I en makroskopisk teori kan vi använda oss av differentialkalkyl och integralkalkyl.
- Den elektromagnetiska teorin bygger på postulat som formulerats baserat på experimentella upptäckter.
- Det elektriska fältet definieras utifrån en kraftverkan på en testladdning.
- Kontinuitetsekvationen gäller inte alltid utan den elektromagnetiska teorin rymmer även fall där laddning kan förstöras.

ja ? nej

g) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

- Enheten för den elektriska potentialen är V/m.
- Den elektriska potentialen är en vektorstorhet.
- E-fältet avtar som $1/h$ från den oändligt stor laddad skiva där h är höjden över skivan.
- Potentialen från en punktladdning avtar som $1/R$.
- Naturligt existerande material kan ha $\epsilon_r < 1,0$.
- Vakuum har den relativa permittiviteten $\epsilon_r = 1,0$.

ja ? nej

h) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

- Poissons ekvation kan ha mer än en lösning som uppfyller givna randvillkor.
- Speglingsmetoden kan ibland användas för att lösa Poissons ekvation.
- Speglingsmetoden kan alltid användas oavsett problemets geometri.
- Poissons ekvation kan lösas numeriskt.
- Laplaces ekvation är ett specialfall av Poissons ekvation.
- Laplaces ekvation gäller bara om man antar att alla materialparametrar är konstanta i rummet.

ja ? nej

2 Elektrostatik

Problemlösningsdel (8 poäng)

En icke ideal kapacitans, består av två parallella, kvadratiska plattor med sidan 10 cm, och avståndet 0,2 cm. Mellan plattorna ligger ett material med $\epsilon_r = 2$ and $\sigma = 4 \times 10^{-5}$. Genom att lägga potentialskillnaden 120 V över plattorna kommer en ström drivas i kretsen.

- A) Beräkna den elektriska fältstyrkan, **E**, mellan kondensatorplattorna.
- B) Denna kondensator är inte helt ideal, utan har en konduktivitet i materialet mellan plattorna. Beräkna den ström som flyter genom kondensatorn. Beräkna även motsvarande strömtäthet.
- C) Beräkna hur stor effektutvecklingen är i det dielektriska materialet mellan plattorna. Dvs hur stor är värmeutvecklingen.
- D) Beräkna resistansen hos materialet mellan plattorna.

Förståelsedel (4 poäng)

e) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

Gauss lag på punktform och Gauss lag på integralform är helt ekvivalenta och beskriver helt ekvivalent fysik.

Man kan härleda postulatet om rotationen på E-fältet utifrån postulatet om divergens.

Den grundläggande fysiken i problemlösningsdelen ovan bygger **bland annat** på Gauss lag.

Den grundläggande fysiken i problemlösningsdelen ovan bygger **bland annat** på att B-fältet är källfritt.

Den grundläggande fysiken i problemlösningsdelen ovan bygger **bland annat** på att E-fältet är källfritt.

Den grundläggande fysiken i problemlösningsdelen ovan bygger **bland annat** på att rotationen av B-fältet är lika med den fria strömtätheten gånger permeabiliteten.

f) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

ja **?** **nej**

Källan till förskjutningsfältet D är polarisationsladdningarna.

Sambandet $D = \epsilon E$ mellan E- och D-fältet följer från postulaten i elektrostatiken.

Polarisationsfältet P är alltid proportionellt beroende av E-fältet.

Dielektriska materialegenskaper modelleras med hjälp av elektriska strömmar.

För att göra en övre uppskattning av resistansen antar man en approximativ strömfördelning.

För att göra en undre uppskattning av resistansen antar man en approximativ potentialfördelning.

g) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

ja **?** **nej**

I elektrostatiken är E-fältets tangentialkomponent alltid kontinuerlig i gränsen mellan två material med olika permittivitet.

I elektrostatiken är E-fältets normalkomponent alltid kontinuerlig i gränsen mellan två material med olika permittivitet.

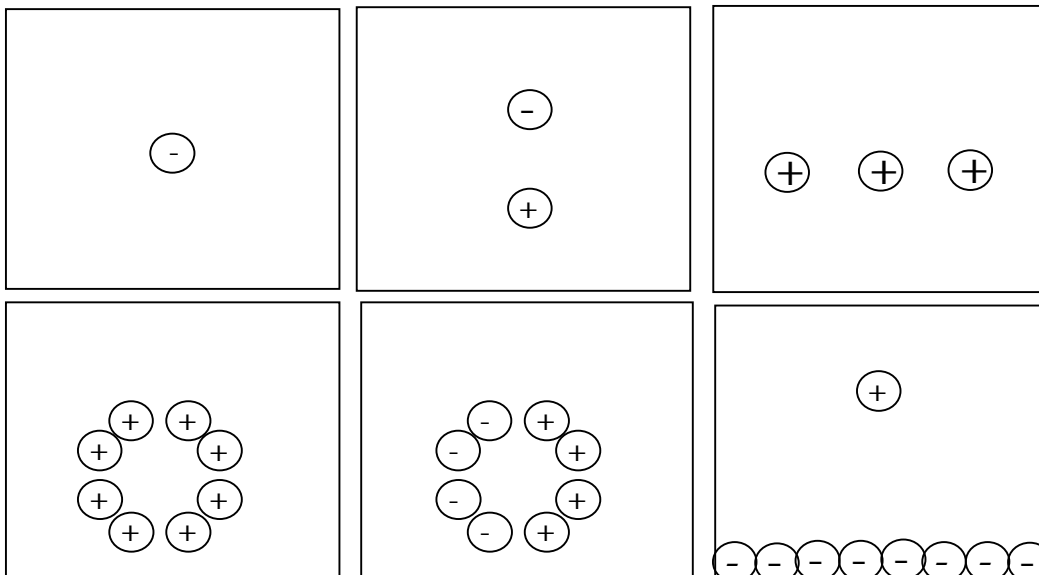
I elektrostatiken är D-fältets tangentialkomponent alltid kontinuerlig i gränsen mellan två material med olika permittivitet.

I elektrostatiken är D-fältets normalkomponent alltid kontinuerlig i gränsen mellan två material med olika permittivitet.

Randvillkoret för E-fältets tangentialkomponent härleds från postulatet om E-fältets divergens.

Randvillkoret för E-fältets normalkomponent härleds postulatet om E-fältets divergens.

h) Skissa fältlinjerna runt följande laddningsfördelningear. Alla bilder visar olika konfigurationer av positivt och negativt laddade linjeladdningar. För poäng ska det principiella utseendet vara korrekt i hela det markerade kvadratiska området för respektive konfiguration. (1 poäng)



3 Magnetostatik

Problemlösningsdel (8 poäng)

En ferromagnetisk sfär med radie b har magnetiserats med magnetiseringsvektorn $\mathbf{M} = M_0 \hat{z}$.

A) Beräkna motsvarande magnetiseringsströmtätheter, J_m and J_{ms} .

B) Beräkna den magnetiska flödestätheten, dvs B-fältet, i centrum av sfären.

Förståelsedel (4 poäng)

c) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?	ja	?	nej
Ett annat namn för den magnetiserade sfären ovan är "permanentmagnet"	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Kontinuitetsekvationen kan härledas från de magnetostatiska postulaten.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Den grundläggande fysiken i problemlösningsdelen ovan bygger bland annat på Gauss lag.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Den grundläggande fysiken i problemlösningsdelen ovan bygger bland annat på att B-fältet är källfritt.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Den grundläggande fysiken i problemlösningsdelen ovan bygger bland annat på att E-fältet är källfritt.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Den grundläggande fysiken i problemlösningsdelen ovan bygger bland annat på att rotationen av B-fältet är lika med den fria strömtätheten gånger permeabiliteten.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

d) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?	ja	?	nej
Enheten för det magnetiska fältet är A/m^2 .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Det magnetiska fältstyrkan, B , är en skalär storhet.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Det existerar inga magnetiska laddningar.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Den magnetiska potentialen är en skalär storhet.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Den magnetiska potentialen kan definieras tack vara att rotationen av B-fältet är noll. <input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
De magnetostatiska postulaten på punktform och på integralform uttrycker egentligen samma sak.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

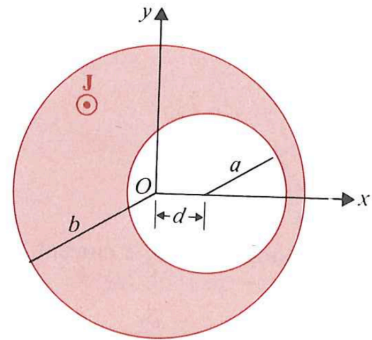
e) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?	ja	?	nej
Laddningar i rörelse som <i>endast</i> utsätts för ett B-fält <i>kan</i> påverkas av en kraft.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Laddningar som rör sig <i>parallellt</i> med B-fältslinjerna utsätts för en kraft.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Laddningar i rörelse som <i>endast</i> utsätts för ett E-fält påverkas av en kraft.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Laddningar i <i>vila</i> som <i>endast</i> utsätts för ett B-fält <i>kan</i> påverkas av en kraft.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Det magnetiska flödet genom en yta kan beräknas som en linjeintegral av den magnetiska vektorpotentialen längs den slinga som begränsar ytan.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Lorentzkraften beror på B- och E-fältet.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

f) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?	ja	?	nej
Man kan välja divergensen av den magnetiska vektorpotentialen fritt	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Man kan välja rotationen av den magnetiska vektorpotentialen fritt	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
En laddad partikel i vila påverkas av en kraft som är proportionell mot magnetfältet	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Varje komponent av den magnetiska vektorpotentialen uppfyller Poissons ekvation	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Den magnetiska susceptibiliteten uttrycker förhållandet mellan magnetiseringsfältet och B-fältet	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Man kan härleda Amperes lag utifrån att magnetfältet är källfritt	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

4 Magnetostatik

Problemlösningsdel (8 poäng)

Antag att det går en konstant ström längs z-axeln, $\mathbf{J} = J_0 \hat{z}$. Se figuren.



A) Beräkna storlek och riktning hos B-fältet i den cylindriska kaviteten vars centrumaxel ligger förskjuten i förhållande till centrumaxeln hos ledaren med ett avstånd d . (Ledning: Använd superposition och beräkna fältet \mathbf{B} i kaviteten som summan av strömmen i två långa cylindriska ledare med raderna b och a , och strömtätheterna \mathbf{J} och $-\mathbf{J}$.)

Förståelsedel (4 poäng)

b) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

- | | ja | ? | nej |
|---|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| I grunden bygger fysiken i problemlösningsdelen på ett och endast ett postulat om B-fältet. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| I grunden bygger fysiken i problemlösningsdelen på två och endast två postulat om B-fältet. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| Den grundläggande fysiken i problemlösningsdelen ovan bygger endast på Gauss lag. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| Den grundläggande fysiken i problemlösningsdelen ovan bygger endast på att B-fältet är källfritt. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| Den grundläggande fysiken i problemlösningsdelen ovan bygger endast på att E-fältet är källfritt. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| Den grundläggande fysiken i problemlösningsdelen ovan bygger endast på att rotationen av B-fältet är lika med den fria strömtätheten gånger permeabiliteten. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

c) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

- | | ja | ? | nej |
|--|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| Randvillkoret för B/H-fältets normalkomponent härleds från postulatet om B-fältets rotation. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| Randvillkoret för B/H-fältets tangentialkomponent härleds från postulatet om B-fältets rotation. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| B-fältets normalkomponent är alltid kontinuerlig i gränsen mellan två material. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| B-fältets tangentialkomponent är alltid kontinuerlig i gränsen mellan två material. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| H-fältets normalkomponent är alltid kontinuerlig i gränsen mellan två material. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| H-fältets tangentialkomponent är alltid kontinuerlig i gränsen mellan två material. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

d) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

- | | ja | ? | nej |
|---|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| Normalkomponenten av strömtäthetsfältet, \mathbf{J} , är alltid kontinuerlig i gränsen mellan två material. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| Tangentialkomponenten av strömtäthetsfältet, \mathbf{J} , är alltid kontinuerlig i gränsen mellan två material. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| Man kan teckna Biot-Savarts lag som en volymsintegral. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| Man kan teckna Biot-Savarts lag för en ytström | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| Man kan teckna Biot-Savarts lag för en strömförande tråd | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| Amperes lag kan alltid användas istället för Biot-Savarts lag vid fältberäkningar. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

e) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

- | | ja | ? | nej |
|--|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| Permanentmagneter har ett permanent magnetiseringsfält \mathbf{M} . | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| En permanentmagnet kan ses som ett homogent material där magnetiseringsvektorn pekar åt samma håll i alla delar av materialet. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| I en permanentmagnet vill man ha ett magnetiska material med en smal hystereskurva. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| En permanentmagnet genererar ett B-fält trots att H-fältet är noll. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| Ett ferromagnetiskt material har ett linjärt samband mellan B- och H-fälten. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| Ett diamagnetiskt material motverkar ett pålagt externt fält. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

Solution to Task 1:

a) 1) For $r < R_1$,

$$\oint_S \vec{E} d\vec{s} = \frac{Q_{in}}{\epsilon} \quad Q_{in} = 0 \Rightarrow \vec{E}_1 = 0$$

2) $R_1 < r < R_2$

$$\oint_S \vec{E} d\vec{s} = \frac{Q_{in}}{\epsilon}$$

$$E_r \cdot 2\pi L \cdot r = \frac{Q_{in}}{\epsilon}$$

$$E_r = \frac{Q_{in}}{2\pi \epsilon L r}$$

$$\vec{E}_2 = \frac{Q}{2\pi \epsilon L r} \hat{r}$$

3) $r > R_2$

$$\oint_S \vec{E} d\vec{s} = \frac{Q_{in}}{\epsilon} \Rightarrow \vec{E}_3 = 0$$

$$\vec{E} = \begin{cases} 0, & 0 < r < R_1 \\ \frac{Q}{2\pi \epsilon L r} \hat{r}, & R_1 < r < R_2 \\ 0, & R_2 < r \end{cases}$$

b) Definition of electric potential:

$$\psi = - \int_{\infty}^r \vec{E}(\xi) d\xi$$

$$\psi_{el} = - \int_{R_2}^{R_1} \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_{R_2}^{R_1} \left(\hat{r} \frac{Q}{2\pi \epsilon L r} \right) \cdot (\hat{r} dr)$$

$$= \frac{Q}{2\pi \epsilon L} \ln \left(\frac{R_2}{R_1} \right)$$

c) Definition:

$$W_e = \frac{1}{2} \iiint_V \vec{D} \cdot \vec{E} \, dv$$

$$\vec{E} \text{ is known as } \vec{E} = \frac{Q}{2\pi\epsilon L r} \hat{r}$$

$$W_e = \frac{1}{2} \int_{R_1}^{R_2} \epsilon \left(\frac{Q}{2\pi\epsilon L r} \right)^2 (L \cdot 2\pi r \, dr)$$

$$= \frac{Q^2}{4\pi\epsilon L} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r} = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon L} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$$

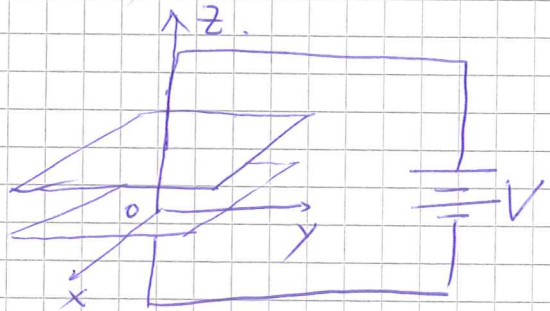
$$d) C = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{\frac{Q}{2\pi\epsilon L} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} = \frac{2\pi\epsilon L}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}$$

Solution to Task 2)

$$a) \vec{E} = \frac{V}{d} (-\hat{z})$$

$$= -\frac{120}{0,002} \hat{z}$$

$$= -60000 \hat{z} \, \text{V/m}$$



$$b) \text{ For } \sigma = 4 \times 10^{-5} \text{ S/m } \vec{J} = \sigma \vec{E} = -2,4 \hat{z} \text{ (A/m}^2\text{)}$$

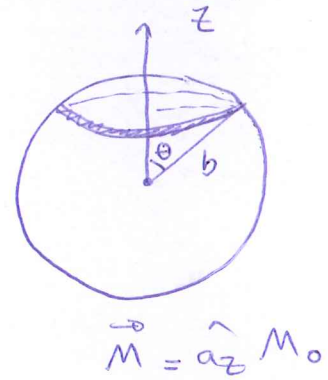
$$c) \overline{P} = \iiint_V \rho \, dv = \iiint_V \vec{J} \cdot \vec{E} \, dv = 2,88 \text{ W}$$

$$d) P = IR^2 \Rightarrow R = \frac{P}{I^2} = \frac{2,88}{(24 \times 10^{-3})^2} = 5000 \, \Omega$$

question 3:

$$a) \vec{J}_M = \vec{\nabla} \times \vec{M} = 0$$

$$\begin{aligned} \vec{J}_{ms} &= (\hat{a}_R \cos\theta - \hat{a}_\theta \sin\theta) M_0 \times \hat{a}_R \\ &= \hat{a}_\theta M_0 \sin\theta \end{aligned}$$



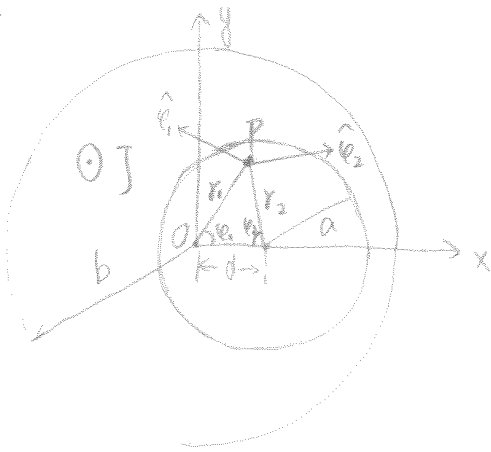
b) Apply equation (6.38) to a loop of radius $b \sin\theta$,

Carrying a current $J_{ms} b d\theta$:

$$d\vec{B} = \hat{a}_z \frac{\mu_0 (J_{ms} b d\theta) (b \sin\theta)^2}{2(b^2)^{3/2}} = \hat{a}_z \frac{\mu_0 M_0 \sin^2 \theta}{2}$$

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \int d\vec{B} = \hat{a}_z \frac{\mu_0 M_0}{2} \int_0^\pi \sin^2 \theta d\theta = \hat{a}_z \frac{2}{3} \mu_0 M_0 \\ &= \frac{2}{3} \mu_0 \vec{M} \end{aligned}$$

2.



The \vec{B} field at an arbitrary point P in the cavity is the superposition of two B fields: \vec{B}_1 and \vec{B}_2 . \vec{B}_1 is produced by a uniformly distributed cylindrical current $\vec{J} = J_0 \hat{z}$ with radius b . \vec{B}_2 is produced by a uniformly distributed cylindrical current $\vec{J} = -J_0 \hat{z}$ with radius a . According to the figure:

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 J_0 \pi r_1^2}{2\pi r_1} \hat{e}_1$$

$$= \frac{\mu_0 J_0}{2} r_1 \hat{e}_1$$

$$\hat{e}_1 = \cos e_1 \hat{y} - \sin e_1 \hat{x}$$

$$\vec{B}_2 = \frac{\mu_0 J_0 \pi r_2^2}{2\pi r_2} \hat{e}_2$$

$$= \frac{\mu_0 J_0}{2} r_2 \hat{e}_2$$

$$\hat{e}_2 = \cos e_2 \hat{y} + \sin e_2 \hat{x}$$

$$r_2 = \sqrt{(d - r_1 \cos e_1)^2 + (r_1 \sin e_1)^2} = \sqrt{r^2 + d^2 - 2dr \cos e_1}$$

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 = \frac{\mu_0 J_0}{2} [r_1 \cos e_1 \hat{y} - r_1 \sin e_1 \hat{x} + r_2 \cos e_2 \hat{y} + r_2 \sin e_2 \hat{x}]$$

$$= \frac{\mu_0 J_0}{2} [r_1 \cos e_1 \hat{y} - r_1 \sin e_1 \hat{x} + (d - r_1 \cos e_1) \hat{y} + r_1 \sin e_1 \hat{x}]$$

$$= \frac{\mu_0 J_0 d}{2} \hat{y}$$