Dugga i Elektromagnetisk fältteori F. för F2.
EEF031 5/12 1998 kl. 8.45-12.45

Tillåtna hjälpmedel:	BETA, Physics Handbook, Formelsamling i Elektromagnetisk fältteori, Valfri kalkylator men inga egna anteckningar utöver egna formler på sista bladet i formelsamlingen i Elektromagnetisk fältteori
Förfrågningar:	Mikael Persson Tel. ankn. 1576
Lösningar:	anslås efter duggans slut vid Fysik
Resultatet:	anslås senast 981211
OBS!	Endast svarsblanketten skall inlämnas

1

Vilken laddningsfördelning i rummet krävs för att man skall få en potential, som beror av x på nedanstående sätt?

$$V(x)=V_0(1-x^2/a^2) \quad ; \ |x|<a$$
$$V(x)=0 \quad ; \ |x|\geq a$$

Ledning: Se upp med ytladdningstätheter!

1a (10poäng)
Vilket av följande resultat är det riktiga?

A, $\rho=2\varepsilon_0 v_0/a^2$ för $|x|<a$, $\rho_s=2$ vid $|x|=a$

B, $\rho=2\varepsilon_0 v_0/a^2 x$ för $|x|<a$, $\rho_s= 0$ vid $|x|=a$

C, $\rho=0$ för $|x|<a$, $\rho_s= -2\varepsilon_0 v_0/a^2$ vid $|x|=a$

D, $\rho=2\varepsilon_0 v_0/a^2$ för $|x|<a$, $\rho_s= 2\varepsilon_0 v_0/a$ vid $|x|=a$

E, $\rho=-2\varepsilon_0 v_0/a^2$ för $|x|<a$, $\rho_s= -2\varepsilon_0 v_0/a$ vid $|x|=a$

F, $\rho=-2\varepsilon_0 v_0/a^2$ för $|x|<a$, $\rho_s= 2\varepsilon_0 v_0/a$ vid $|x|=a$

G, $\rho=2\varepsilon_0 v_0/a^2$ för $|x|<a$, $\rho_s= -2\varepsilon_0 v_0/a$ vid $|x|=a$

H, $\rho=-2\varepsilon_0 v_0/a^2$ för $|x|<a$, $\rho_s= 3\varepsilon_0 v_0/a$ vid $|x|=a$

I, $\rho=-4\varepsilon_0 v_0/a^2$ för $|x|<a$, $\rho_s= -3\varepsilon_0 v_0/a$ vid $|x|=a$

J, $\rho=-4\varepsilon_0 v_0/a^2$ för $|x|<a$, $\rho_s= 3\varepsilon_0 v_0/a$ vid $|x|=a$

K, $\rho=-4\varepsilon_0 v_0/a^2$ för $|x|<a$, $\rho_s= -3\varepsilon_0 v_0/a$ vid $|x|=a$

L, $\rho=-4\varepsilon_0 v_0/a^2$ för $|x|<a$, $\rho_s= 3\varepsilon_0 v_0/a$ vid $|x|=a$

1b, (5poäng)
Vilket eller **vilka** av följande påståenden är riktiga?

A, En potential med begränsad utsträckning i rummet har alltid begränsad energi.

B, För att ett fält skall ha begränsad energi måste potentialen vara begränsad överallt.

C, Ytladdningen i uppgift 1a, är en polarisationsytladdning.

D, Källan till D-fältet är alla laddningar

E, På stort avstånd från en linjeladdning med ändlig längd avtar E-fältet som $1/R^2$

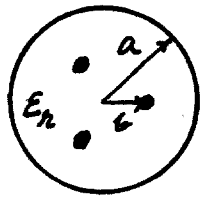
F, Potentialen från en punktladdning avtar med avståndet som $1/R^2$

G, E-fältet från en lång rak linjeladdning avtar som $1/R^2$

2

I en skärmad treledarkabel ligger ledarna som vardera har radien r_0 symmetriskt placerade som figuren visar. Avståndet från trådcentrum till skärmcentrum är b. Skärmradien är a. Beräkna kapacitansen/längdenhet hos den dubbelledning man får, om endast två av ledarna utnyttjas! Isolationsmaterialet som trådarna ligger inbäddade i har dieltalet ε_r.

[$r_0 \ll b$ och $r_0 \ll a-b$]



2a (10poäng)

Vilket av följande resultat är det riktiga?

A, $C=\pi\varepsilon/\ln\{(a^4-b^4)b\sqrt{3}/(r_0\sqrt{a^4+b^4+a^2b^2})\}$
B, $C=\pi\varepsilon \ln\{(a^4-b^4)b\sqrt{3}/(r_0\sqrt{a^4+b^4+a^2b^2})\}$
C, $C=\pi\varepsilon \ln\{(a^2-b^2)b\sqrt{3}/(r_0\sqrt{a^4+b^4+a^2b^2})\}$
D, $C=\pi\varepsilon/\ln\{(a^2-b^2)b\sqrt{3}/(r_0\sqrt{a^4+b^4+a^2b^2})\}$
E, $C=\pi\varepsilon/\ln\{(a^2-b^2)b\sqrt{3}/(r_0\sqrt{a^2+b^2+ab})\}$
F, $C=\pi\varepsilon/\ln\{(a-b)b\sqrt{3}/(r_0\sqrt{a^2+b^2+ab})\}$
G, $C=\pi\varepsilon \ln\{(a-b)b\sqrt{3}/(r_0\sqrt{a^2+b^2+ab})\}$
H, $C=\pi\varepsilon \ln\{(a^4-b^4)b\sqrt{3}/(r_0\sqrt{a^4+b^4+a^2b^2})\}$
I, $C=\ln\{(a^2-b^2)b\sqrt{3}/(r_0\sqrt{a^4+b^4+a^2b^2})\}/\pi\varepsilon$
J, $C= \ln\{(a-b)b\sqrt{3}/(r_0\sqrt{a^2+b^2+ab})\}/\pi\varepsilon$
K, $C= \ln\{(a^4-b^4)b\sqrt{3}/(r_0\sqrt{a^8+b^8+a^4b^4})\}/\pi\varepsilon$
L, $C= \ln\{(a^2+b^2)b\sqrt{3}/(r_0\sqrt{a^4+b^4+a^2b^2})\}/\pi\varepsilon$

2b (5poäng)

Vilket eller **vilka** av följande påståenden är riktiga?

A, Om man byter tecknen på ledarna byter kapacitansen tecken

B, Kapacitansen är ett mått på hur mycket laddning ett system håller för en given spänningsskillnad.

C, Kapacitansen ökar med ökande spänning.

D, Kapacitansen minskar med ökande spänning.

E, Kapacitansen minskar med laddningens storlek

F, Kapacitansen ökar med laddningens storlek

G, Resistans beräkningar och kapacitansberäkningar är helt oberoende för ett system med konstanta materialegenskaper.

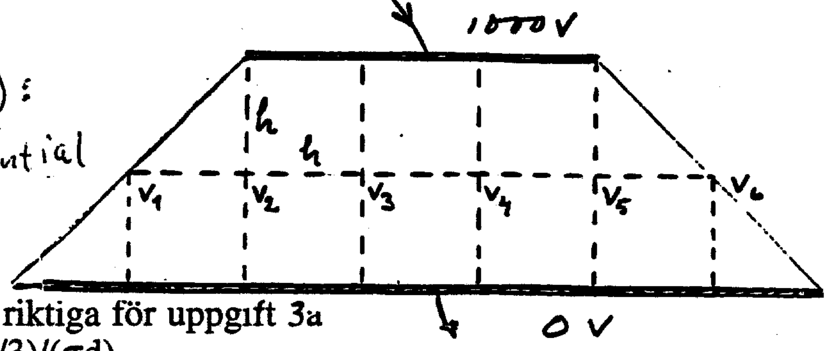
H, Kapacitansen beror bara på geometrin och materialegenskaperna.

3. **På en tunn plåt med tjockleken d=0.1 mm, ledningsförmågan σ=5 S/m och med utseende enligt figuren är två elektroder fästade.**

A) Beräkna en övre och en undre gräns för resistansen mellan elektroderna!

B) Använd figurens glesa rutnät för att göra en numerisk beräkning av potentialerna $V_1, V_2, \ldots, V_6$!

C) Utnyttja $V_1, V_2, \ldots, V_6$ för att göra en approximativ beräkning av resistansen mellan elektroderna!



Ledning för uppgift A):
Använd lodräta strömrör och horisontella ekvipotential ytor

3a (4poäng)

Vilket av följande resultat är det riktiga för uppgift 3a

A	$R_{ö}=6/(\sigma d)$,	$R_u=\ln(7/3)/(\sigma d)$
B	$R_{ö}=4/(3\sigma d)$,	$R_u=-\ln(7/3)/(3\sigma d)$
C	$R_{ö}=\sigma d/2$,	$R_u=\ln(7/3)/(4\sigma d)$
D	$R_{ö}=3\sigma d/2$,	$R_u=\ln(7/3)/(2\sigma d)$
E	$R_{ö}=\sigma/d$,	$R_u=(2\sigma d)/\ln(7/3)$
F	$R_{ö}=3\sigma/d$,	$R_u=(2\sigma d)\ln(7/3)$
G	$R_{ö}=2/(3\sigma d)$,	$R_u=\sigma d\ln(7/3)$
H	$R_{ö}=6/(\sigma d)$,	$R_u=\ln(7/3)/(\sigma d)$
I	$R_{ö}=4/(3\sigma d)$,	$R_u=4\sigma d\ln(7/3)$
J	$R_{ö}=\sigma d/2$,	$R_u=6\sigma d\ln(7/3)$
K	$R_{ö}=2/(3\sigma d)$	$R_u=\ln(7/3)/(2\sigma d)$
L	$R_{ö}=3\sigma d/2$,	$R_u=8\sigma d\ln(7/3)$

3b (3poäng)

Vilket av följande resultat är det riktiga för uppgift 3b

A	$V_1=V_5\approx 210$ V	$V_2=V_3\approx 421$ V	$V_4=V_6\approx 473$ V
B	$V_1=V_5\approx 310$ V	$V_2=V_3\approx 321$ V	$V_4=V_6\approx 373$ V
C	$V_1=V_6\approx 210$ V	$V_2=V_5\approx 421$ V	$V_3=V_4\approx 473$ V
D	$V_1=V_6\approx 310$ V	$V_2=V_5\approx 321$ V	$V_3=V_4\approx 373$ V
E	$V_1=V_6\approx 410$ V	$V_2=V_5\approx 421$ V	$V_3=V_4\approx 473$ V
F	$V_1=V_6\approx 510$ V	$V_2=V_5\approx 521$ V	$V_3=V_4\approx 573$ V
G	$V_1=V_5\approx 410$ V	$V_2=V_3\approx 421$ V	$V_4=V_6\approx 473$ V
H	$V_1=V_5\approx 510$ V	$V_2=V_3\approx 521$ V	$V_4=V_6\approx 573$ V
I	$V_1=V_6\approx -210$ V	$V_2=V_5\approx -421$ V	$V_3=V_4\approx -473$ V
J	$V_1=V_6\approx -310$ V	$V_2=V_5\approx -321$ V	$V_3=V_4\approx -373$ V
K	$V_1=V_5\approx -310$ V	$V_2=V_3\approx -421$ V	$V_4=V_6\approx -473$ V
L	$V_1=V_5\approx -310$ V	$V_2=V_3\approx -321$ V	$V_4=V_6\approx -373$ V

3c (3poäng)
Vilket av följande resultat är det riktiga för uppgift 3c

A	$R \approx 0.37/(\sigma d)$	B	$R \approx 0.39/(\sigma d)$
C	$R \approx 0.43/(\sigma d)$	D	$R \approx 0.45/(\sigma d)$
E	$R \approx 0.47/(\sigma d)$	F	$R \approx 0.49/(\sigma d)$
G	$R \approx 0.37\ \sigma d$	H	$R \approx 0.39\ \sigma d$
I	$R \approx 0.43\ \sigma d$	J	$R \approx 0.45\ \sigma d$
K	$R \approx 0.47\ \sigma d$		

3d (5 poäng)
Vilket eller **vilka** av följande påståenden är riktiga?

Utgår

A Potentialen är konstant längs de diagonala sidoränderna i figuren

X B Om h i figuren ökar så ökar resistansen

X C Om h i figuren ökar så minskar resistansen

X D Resistansen är oberoende av h.

E Om man byter polaritet på spänningen ändrar strömmen riktning och resistansen byter tecken.

F V_1, V_2, V_3, V_4, V_5 och V_6 är alla oberoende

G Laplaces ekvation är exakt uppfyld av de approximativa utrycken på V_1, V_2, V_3, V_4, V_5 och V_6

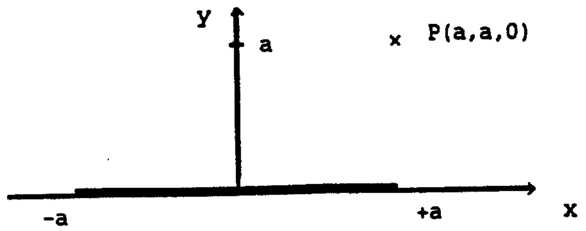
H Resistansen beror bara på geometrin och materialegenskaperna.

I Entydighetsatsen för lösningen till Laplace's ekavation bevisas tex genom att man antar att det finns två olika lösningar som uppfyller randvilkoren. Man bildar skillnaden för dessa lösningar och visar att denna lösning är identiskt noll.

J Dipolegenskaperna i vatten gör att det elektriska fältet runt en källa skärmas så att fältet på ett givet avstånd blir lägre än det skulle blivit i luft.

4.

Ett mycket långt platt metallband med bredden 2a ligger i xz-planet och för strömmen i_0 i $\hat{z}$-riktningen. Strömmen är jämnt fördelad över bandets bredd. Beräkna storlek och riktning på magnetfältet i punkten P!



4a (10 poäng)
Vilket av följande resultat är det riktiga för 4a

A $B = i(-\hat{x}\arctan 4 + \hat{y}\ln\sqrt{5})/4\pi a$

B $B = i(-\hat{x}\arctan 4 + \hat{y}\ln\sqrt{5})/4\pi\mu_0 a$

C $B = \mu_0 i(-\hat{x}\arctan 2 - \hat{y}\ln\sqrt{5})/4\pi a$

D $B = \mu_0 i(\hat{x}\arctan 2 - \hat{y}\ln\sqrt{5})/4\pi a$

E $B = \mu_0 i(-\hat{x}\arctan 2 - \hat{y}\ln 5)/4\pi a$

F $B = \mu_0 i(-\hat{x}\arctan 2 + \hat{y}\ln\sqrt{5})/4\pi a$

G $B = \mu_0 i(-\hat{x}\arctan 2)/4\pi a$

H $B = \mu_0 i(\hat{y}\ln\sqrt{5})/4\pi a$

I $B = \mu_0 i(-\hat{y}\ln\sqrt{5})/4\pi a$

J $B = \mu_0 i(\hat{x}\arctan 2)/4\pi a$

K $B = -\mu_0 i(-\hat{x}\arctan 2 + \hat{y}\ln\sqrt{5})/4\pi a$

L $B = -\mu_0 i(\hat{x}\arctan 2 - \hat{y}\ln\sqrt{5})/4\pi a$

4b (5 poäng)
Vilket eller **vilka** av följande påståenden är riktiga?

A Biot-Savarts lag motsvaras av Gauss lag i elektrostatiken

B Biot-Savarts lag motsvaras av Amperes lag i elektrostatiken

C Biot-Savarts och Amperes lag kan båda användas för att beräkna magnetfälten i situationer med tillräcklig symmetri

D Amperes lag i magnetostatiken motsvaras av Gauss lag i elektrostatiken

E Magnetfältet från en lång rak ledare avtar som $1/R^2$

F Magnetiska laddningar ger upphov till virvelströmmar

G Magnetiseringen **M** beror alltid på pålagt magnetfält.

H Magnetiseringsströmmar ger upphov till magnetfält

I När man härleder randvilkoret för normalkomponeten av magnetfältet vid gräsnskiktet mellan två olika material använder man Amperes lag

J När man härleder randvilkoret för tnagentialkomponenten för H-fältet i gräsnskiktet mellan två olika material använder man Gauss lag.

K Ömsesidig induktans är ett mått på den magnetiska kopplingen mellan två magnetiska kretsar

L Självinduktansen ökar när man ökar strömmen.

1

② Vilken laddningsfördelning i rummet krävs för att man skall få en potential, som beror av x på nedanstående sätt?

$$V(x)=V_0(1-x^2/a^2) \quad ; \ |x|<a$$

$$V(x)=0 \quad ; \ |x|\geq a$$

<u>Ledning:</u> Se upp med ytladdningstätheter!

②
$$\mathbf{E} = -\nabla V \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{E}(x) = -\hat{x}\frac{\partial}{\partial x}\left[V_0\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\right] = \hat{x}\,\frac{2V_0 x}{a^2}, & \text{för } |x|<a \\ \mathbf{E}(x) = 0, & \text{för } |x|>a \end{cases}$$

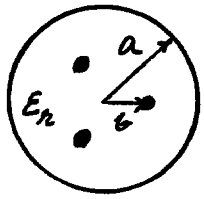
$$\rho = \varepsilon_0 \nabla\cdot\mathbf{E} \Rightarrow \begin{cases} \rho(x) = \varepsilon_0\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{2V_0 x}{a^2}\right] = \frac{2\varepsilon_0 V_0}{a^2}, & \text{för } |x|<a \\ \rho(x) = 0, & \text{för } |x|>a \end{cases}$$

$$\rho_s = D_{1n} - D_{2n} \Rightarrow \begin{cases} \rho_s = \varepsilon_0 \underbrace{E(a^+)}_{=0} - \varepsilon_0 E(a^-) = -\frac{2\varepsilon_0 V_0}{a}, & \text{vid } x=a \\ \rho_s = \varepsilon_0 E(-a^+) - \varepsilon_0 \underbrace{E(-a^-)}_{=0} = -\frac{2\varepsilon_0 V_0}{a}, & \text{vid } x=-a \end{cases}$$

ρ_s

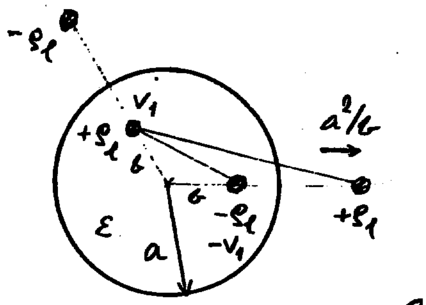
2. I en skärmad treledarkabel ligger ledarna som vardera har radien r_o symmetriskt placerade som figuren visar. Avståndet från trådcentrum till skärmcentrum är b. Skärmradien är a. Beräkna kapacitansen/längdenhet hos den dubbelledning man får, om endast två av ledarna utnyttjas! Isolationsmaterialet som trådarna ligger inbäddade i har dieltalet ε_r.

[r_o<<b och r_o<<a-b]



---

(2)



$$V_1 = \frac{\varrho_l}{2\pi\varepsilon}\ln\left(\frac{\frac{a^2}{b}-b}{r_o}\right) + \frac{\varrho_l}{2\pi\varepsilon}\ln\left(\frac{b\sqrt{3}}{\sqrt{b^2+a^4/b^2+a^2}}\right)$$

$$= \frac{\varrho_l}{2\pi\varepsilon}\ln\left(\frac{(a^2-b^2)b\sqrt{3}}{r_o\sqrt{a^4+b^4+a^2b^2}}\right)$$

$\varepsilon = \varepsilon_r\varepsilon_o$

$$C = \frac{\varrho_l}{2V_1} = \frac{\pi\varepsilon}{\ln\left\{\frac{(a^2-b^2)b\sqrt{3}}{r_o\sqrt{a^4+b^4+a^2b^2}}\right\}} \qquad (F/m)$$

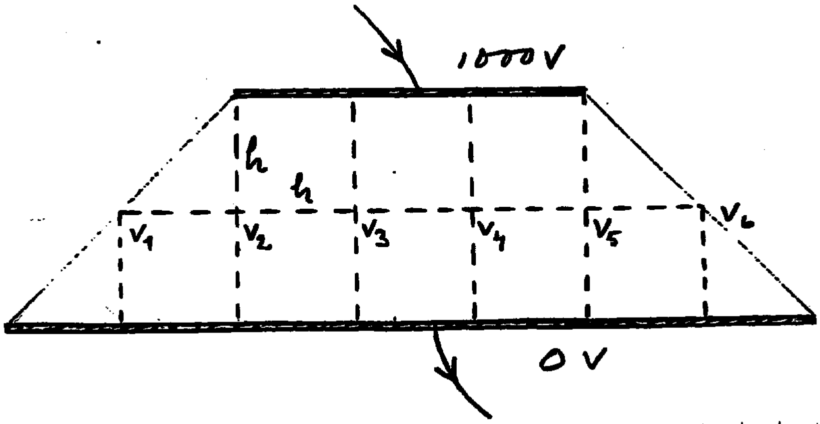
3

2 På en tunn plåt med tjockleken d=0.1 mm, ledningsförmågan σ=5 S/m och med utseende enligt figuren är två elektroder fästade.

A) Beräkna en övre och en undre gräns för resistansen mellan elektroderna!

B) Använd figurens glesa rutnät för att göra en numerisk beräkning av potentialerna $V_1, V_2, \dots, V_6$!

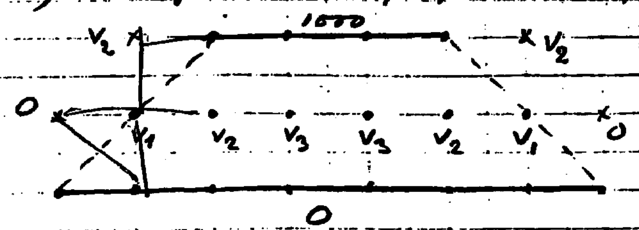
C) Utnyttja $V_1, V_2, \dots, V_6$ för att göra en approximativ beräkning av resistansen mellan elektroderna!



2 A) $R_ö = \frac{1}{\sigma d} \cdot \frac{2h}{3h} = \frac{1}{\sigma d} \cdot 0.6667$ (Lodräta strömrör)

$R_u = \int_0^{2h} \frac{1}{\sigma d} \cdot \frac{d\xi}{3h + 2\xi} = \frac{1}{\sigma d} \cdot \frac{1}{2} \ln\left(\frac{7}{3}\right) = \frac{1}{\sigma d} \cdot 0.4236$ (Vågräta ekvipot. ytor)

B) Av symmetrin följer att $V_4 = V_3$, $V_5 = V_2$ och $V_6 = V_1$



$$\begin{cases} 4V_1 = V_2 + V_2 + 0 + 0 \\ 4V_2 = V_3 + 1000 + V_1 + 0 \\ 4V_3 = V_3 + 1000 + V_2 + 0 \end{cases} \Rightarrow$$

C) $\frac{1}{\sigma d} = 2000\,\Omega$

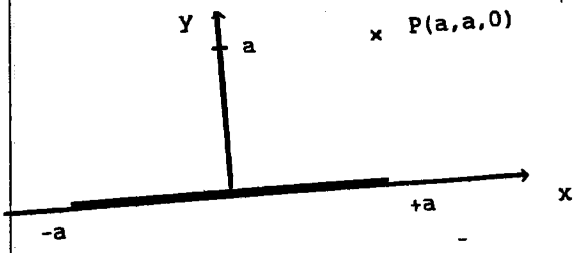
$V_1 = 210.53$; $V_2 = 421{,}05$; $V_3 = 473.68$

$i \approx \sigma d \frac{h}{h} [V_1 + V_2 + V_3 + V_3 + V_2 + V_1] = \sigma d \cdot 2210.53$

$R = \frac{1000}{i} \approx \frac{1}{\sigma d} \cdot 0.4524$ [Ladizien ger $R = \frac{1}{\sigma d} \cdot 0.486$]

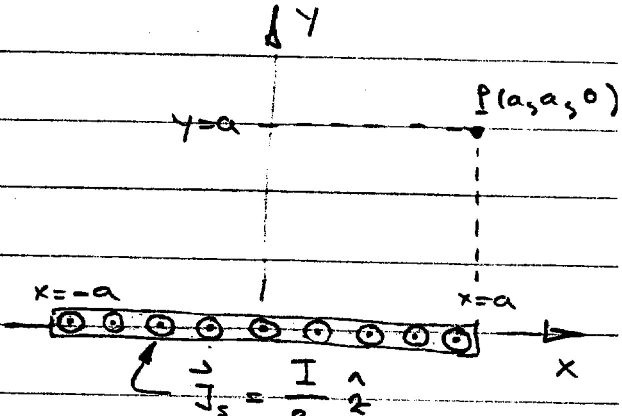
4

7-2 Ett mycket långt platt metallband med bredden 2a ligger i xz-planet och för strömmen i_0 i $\hat{z}$-riktningen. Strömmen är jämnt fördelad över bandets bredd. Beräkna storlek och riktning på magnetfältet i punkten P!



$\boxed{7-2}$ φ

Man beräknar den magnetiska flödes-tätheten i fältpunkten $\vec{r}_2 = (a, a, 0)$ härörande från strömrör i källpunkterna $\vec{r}_1 = (x_1, 0)$ genom att summera bidrag av typen



$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 J_s \, dx_1}{2\pi R_{12}} \hat{\varphi}$$

Jmf med fallet med lång rak strömbana

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi R_{12}} \hat{\varphi}$$

Man har nu att

$$\vec{R}_{12} = \vec{R}_2 - \vec{R}_1 = \hat{x}(a - x_1) + \hat{y}\, a$$

$$R_{12} = \sqrt{(a - x_1)^2 + a^2}$$

$$\hat{\varphi} = \frac{\hat{z} \times \vec{R}_{12}}{R_{12}} = \frac{\hat{y}(a - x_1) - \hat{x}\, a}{\sqrt{(a - x_1)^2 + a^2}}$$

$$\Rightarrow d\vec{B} = \frac{\mu_0 (I/2a)}{2\pi} \cdot \frac{-\hat{x}\, a + \hat{y}(a - x_1)}{(a - x_1)^2 + a^2} \, dx_1$$

Man beräknar först x-komponenten

$$\hat{x}\cdot\vec{B}(\vec{R}_2) = -\frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_{x_1=-a}^{a}\frac{dx_1}{(a-x_1)^2+a^2}$$

$$= \left\{\begin{array}{l} \text{Subs. } \xi = a-x_1 \Rightarrow d\xi = -dx_1 \\ x_1 = -a \Rightarrow \xi = 2a \\ x_1 = a \Rightarrow \xi = 0 \end{array}\right\}$$

$$= +\frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_{\xi=2a}^{0}\frac{d\xi}{\xi^2+a^2}$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi}\left[\frac{1}{a}\arctan\left(\frac{\xi}{a}\right)\right]_{\xi=2a}^{0}$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi a}\left(0 - \arctan(2)\right)$$

$$= -\frac{\mu_0 I}{4\pi a}\arctan(2)$$

och sedan y-komponenten

$$\hat{y}\cdot\vec{B}(\vec{R}_2) = \frac{\mu_0 I}{4\pi a}\int_{x_1=-a}^{a}\frac{(a-x_1)}{(a-x_1)^2+a^2}\,dx_1$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{Subs.} \quad \xi = a - x_1 \Rightarrow d\xi = -dx_1 \\ x_1 = -a \quad \Rightarrow \quad \xi = 2a \\ x_1 = a \quad \Rightarrow \quad \xi = 0 \end{array} \right\}$$

$$= -\frac{\mu_0 I}{4\pi a} \int_{\xi=2a}^{0} \frac{\xi}{\xi^2 + a^2} \, d\xi$$

$$= -\frac{\mu_0 I}{4\pi a} \left[\frac{1}{2} \ln(\xi^2 + a^2) \right]_{\xi=2a}^{0}$$

$$= \frac{\mu_0 I}{8\pi a} \ln\left(\frac{4a^2 + a^2}{a^2} \right) = \frac{\mu_0 I}{8\pi a} \ln(5)$$

Man erhåller då

$$\vec{B}(\vec{R}_2) = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \left(-\hat{x} \arctan(2) + \hat{y} \ln(\sqrt{5}) \right)$$