Distanstentamen i Elektromagnetisk fältteori för F2 och TM2.
EEF031   2021-08-19, kl. 14:00-18:00

Hjälpmedel:	Alla hjälpmedel tillåtna. ***Det är dock inte tillåtet att kopiera eller skriva av lösningar direkt från kurslitteratur eller internet.*** *I det fall man tar hjälp av existerande lösningar skall dessa citeras med källhänvisning. Det är i sådant fall viktigt att motivera och förklara lösningen med egna ord. En direkt avskriven lösning visar inte att ni förstår lösningen av problemet och ger automatiskt noll poäng på talet.* Vidare är det absolut förbjudet att kommunicera muntligt eller skriftligt med andra personer än examinator och tentavakt. Det är förbjudet att använda alla former av hörlurar, hörsnäckor eller liknande anordningar.
Förfrågningar:	Andreas Fhager är tillgänglig för frågor via Zoom
Lösningar:	Anslås på kursens hemsida senast första vardagen efter tentan
Resultatet:	Anslås i LADOK
Granskning:	Tid annonseras på kurshemsidan och granskning sker digitalt direkt på tentans Canvassida.
Kom ihåg	Poängavdrag görs för otydliga figurer, utelämnade referensriktningar, dimensionsfel och utelämnade motiveringar.
Betygsgränser:	**Betyg 3:** Totalt 30, varav ≥ 16 på problemdelen och ≥ 8 på teorin
	Betyg 4: Totalt 40, varav ≥ 20 på problemdelen och ≥ 10 på teorin
	Betyg 5: Totalt 50, varav ≥ 24 på problemdelen och ≥ 12 på teorin

---

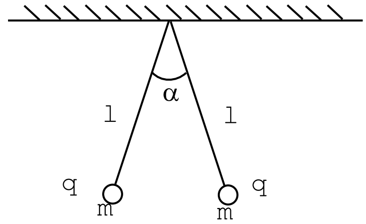
OBS!

Resultat från **läsårets** dugga får tillgodoräknas på elektrostatiktalet (tal 1) respektive magnetostatiktalet (tal 2). Bästa resultatet från duggan eller tentan räknas. Poäng på teoridelen respektive problemlösningsdelen räknas separat. Bonuspoäng från **läsårets** omgång av webb-frågorna får också tillgodoräknas till tentaresultatet.

1 (Elektrostatik)

Problemlösningsdel (8 poäng)

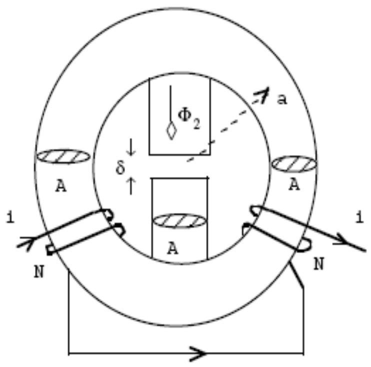
Två kulor med samma massa, *m*, och samma laddning *q,* är upphängda med hjälp av snören av längden *l* i en gemensam punkt. Beräkna vinkelseparationen mellan de två snörena pga. att kulorna repellerar varandra. Beräkna ett numeriskt värde på vinkeln α om *l* = 1 m, *m* = 2 kg och *q* = 2 μC.

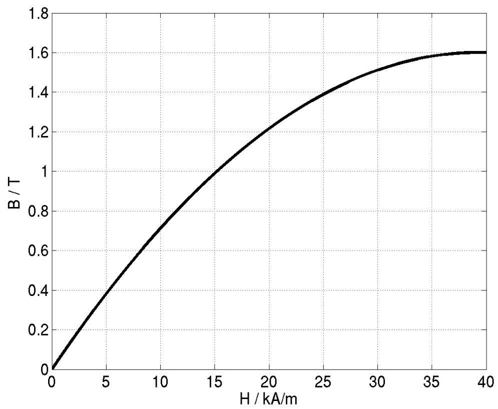


2 (Magnetostatik)

Problemlösningsdel (8 poäng)

I en magnetisk krets enligt figuren vill man ha ett magnetiskt flöde Φ_2 = 0,6 mVs genom luftgapet. Beräkna erforderlig ström, om de båda lindningarna är seriekopplade och samverkar i mittbenet. Luftgapslängden d = 1,5 mm, medelradien, a = 11 cm, tvärsnittsytan för flödet A = 6 cm^2, antalet lindningsvarv N = 3500 varv. Materialet är icke-linjärt och dess magnetiseringskurva finns i nedanstående graf. Gör nödvändiga avläsningar ur figuren för att lösa talet.

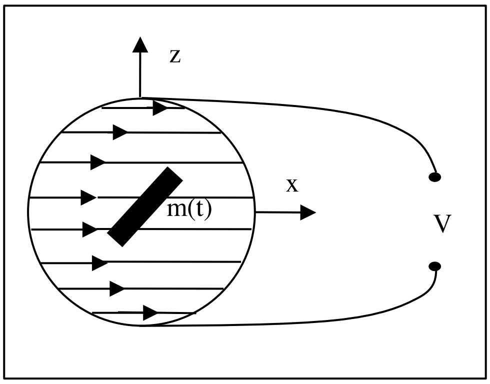




3

Problemlösningsdel (8 poäng)

En elektrisk generator är utformad enligt bilden. Den består av en isolerad ledningstråd som är lindad från botten till toppen utanpå ett tunt sfäriskt plastskal med ytterradien a. Tråden är mycket tätt lindad med konstant varvtäthet θ-led, där θ är vinkeln från positiva z-axeln, Vid sfärens poler (toppen och botten) är lindningen ansluten till ledningar där en yttre last kan kopplas in. I sfärens centrum finns en roterande permanentmagnet som roterar med vinkelhastigheten $\boldsymbol{\omega} = \omega\hat{\boldsymbol{y}}$, vinkelrätt mot dipolmomentaxeln så att det magnetiska dipolmomentet kan beskrivas som $\boldsymbol{m}(t) = m_0[\cos(\omega t)\,\hat{\boldsymbol{x}} + \sin(\omega t)\,\hat{\boldsymbol{z}}]$



Beräkna den inducerade spänningen, V.

Ledning: Använd den magnetiska vektorpotentialen för att beräkna flödet genom lindningarna.

4

Problemlösningsdel (8 poäng)

En elektromagnetisk våg utbreder sig i vakuum. Den elektriska fältstyrkan ges av uttrycket $\boldsymbol{E} = E_0 \sin(\omega t - ky)\,\hat{\boldsymbol{x}}]$ **.**

a) Ange vågens utbredningsriktning (svar med kort motivering räcker). (1 poäng)

b) Bestäm det magnetiska fältet ***B***. (3 poäng)

c) Bestäm hur stor energi som passerar ytan S på tiden Δt. Den plana ytan S är orienterad så att ytans normal pekar i vågens utbredningsriktning. Antag att tiden Δt är mycket större än periodtiden $T = 2\pi/\omega$. (3 poäng)

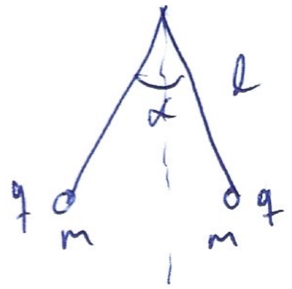
d) Antag att vi vill detektera denna våg med en halvvågsantenn. Hur ska antennens spröt orienteras (x-led, y-led eller z-led) för att den mottagna signalen ska bli så stor som möjligt? (svar med kort motivering räcker) (1 poäng)

5

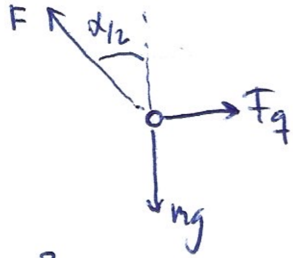
Problemlösningsdel (8 poäng)

En Hertzdipol med dipolmomentet ***p*** $=\hat{z}p_0 \sin(\omega t)$ befinner sig i punkten (x,y,z)=(0,0,a) över ett stort ledande plan. Det ledande planets yta ges av ekvationen z=0. Bestäm ytladdningstätheten ρ_s i metallplanet.

1 Kraften mellan laddningarna balanserar tyngdkraften



Krafter på en laddning



Elektrostatisk kraft $F_q = \dfrac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 x^2}$ där x är avståndet mellan laddningarna

Vid jämvikt $$mg\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0\left(2l\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\sin^3\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{q^2}{16mg\pi\varepsilon_0 l^2}$$

Antag $l = 1\,m$ $m = 2\,kg$ $q = 6\,nC$

Antag även små vinklar $\sin^3\frac{\alpha}{2} \approx \left(\frac{\alpha}{2}\right)^3$

$\cos\frac{\alpha}{2} \approx 1$

Detta ger

$$\left(\frac{\alpha}{2}\right)^3 = \frac{q^2}{16mg\pi\varepsilon_0 l^2} \rightarrow \alpha = 8{,}8^\circ$$

(Små vinklar ok)

2

Vill ha $\phi_2 = 0{,}6\,\text{mVs}$ i luftgapet

I ytterdelen av järnkärnan har vi ϕ_1

Symmetrin ger $2\phi_1 = \phi_2$

Vi behöver $\phi_1 = 0{,}3\,\text{mVs} \Rightarrow B_1 = \frac{\phi_1}{A} = 0{,}5\,\text{T}$

Enligt grafen motsvarar detta $H_1 = 7\,\text{kA/m}$

I mittenbenet fås $\phi_2 = 0{,}6\,\text{mVs} \Rightarrow B_2 = 1\,\text{T}$

$\Rightarrow H_2^{Fe} = 15\,\text{kA/m}$

I luftgapet fås $\phi_2 = 0{,}6\,\text{mVs} \Rightarrow B_2 = 1\,\text{T} \Rightarrow H_2^{luft} = \frac{B_2}{\mu_0} = 1{,}19\,\text{MA/m}$

Amperes lag ger

$N \cdot I = H_1 \pi a + H_2^{Fe} 2a + H_2^{luft} \cdot d$

Med givna numeriska värden fås

$I = 2{,}1\,\text{A}$

3. Inses att endast z-komponenten ger flödesbidrag.

Vektorpotentialen för z-komponenten kan skrivas

$$\mathbb{A}(r,\theta,\phi,t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\mathbf{m}_z \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2} = \frac{\mu_0 m_0}{4\pi}\sin(\omega t)\frac{\hat{z}\times\hat{r}}{r^2} = \frac{\mu_0 m_0}{4\pi}\sin(\omega t)\frac{\sin\theta}{r^2}\hat{\phi}$$

Flödet genom ett lindningsvarv:

$$\phi(\theta,t) = \oint \mathbb{A}\cdot d\mathbb{l} = \frac{\mu_0 m_0}{4\pi}\sin\omega t\,\frac{\sin\theta}{a^2}\int_0^{2\pi}\hat{\phi}\cdot(a\sin\theta\,\hat{\phi})\,d\phi =$$

$$= \frac{\mu_0 m_0}{2a}\sin(\omega t)\sin^2\theta$$

Jämn varvbeläggning i θ-led ger varvtätheten i $d\theta$

$$dN = \frac{N}{\pi}d\theta$$

Bidraget till totala flödet $d\phi = \phi\,dN = \frac{\mu_0 m_0 N}{2\pi a}\sin(\omega t)\sin^2\theta$

Totala flödet

$$\phi_{total}(t) = \frac{\mu_0 m_0 N}{2\pi a}\sin\omega t\int_0^{\pi}\sin^2\theta\,d\theta = \frac{\mu_0 m_0 N}{4a}\sin(\omega t)$$

Inducerad spänning

$$V = -\frac{d\phi_{total}}{dt} = \frac{-\mu_0 m_0 N\omega}{4a}\cos\omega t$$

4

a) Uttrycket $\sin(\omega t - ky)$ betyder att propagationen sker i y-led

b) $B = \mu H$ $\quad H = \frac{1}{Z}\hat{k} \times E$ $\quad Z = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$

$$B = \mu_0 \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\, \hat{y} \times E = -\frac{E_0}{c} \sin(\omega t - ky)\, \hat{z}$$

c) Poyntingvektorn ger energiflödet per areaenhet

$$P = E \times H = \frac{1}{\mu_0} E \cdot B \hat{y} = \frac{1}{\mu_0} \frac{E_0^2}{c} \sin^2(\omega t - ky)\, \hat{y}$$

d)

E-fältet är polariserat i x-led.

Så antennen ska ligga i x-led också

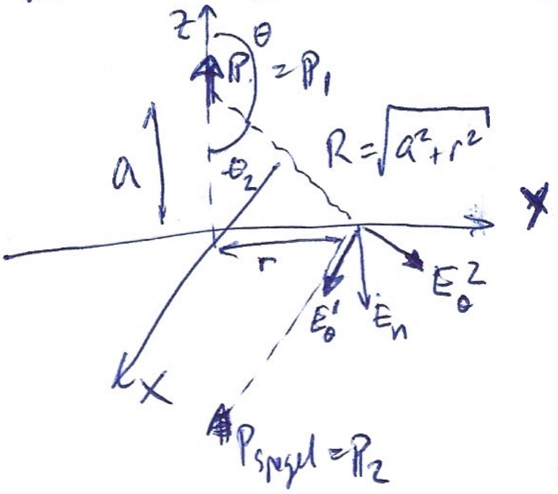
5 Hertzdipolen har dipolmoment $p = \hat{z} p_0 \sin \omega t$

Komplex form $\bar{p} = -j p_0$

I fjärrfältet har vi E-fältet

$$\bar{E}_\theta = j \frac{\bar{I} dl}{4\pi} \frac{e^{-j\beta R}}{R} Z_0 \beta_0 \sin\theta$$

Problemet löses m.h.a. spegling



$$\left\{ \begin{array}{l} \theta_2 = \pi - \theta \\ \sin\theta_2 = \sin\theta \end{array} \right\}$$

Randvillkor med $D = 0$ i metallen ger

$$\bar{\rho}_s = \bar{D}_n = \varepsilon_0 \bar{E}_n = \varepsilon_0 \cdot 2 \cdot \sin\theta_2 \bar{E}_\theta = \varepsilon_0 2 \cdot \sin\theta \bar{E}_\theta =$$

$$\varepsilon_0 2 \frac{r}{\sqrt{a^2+r^2}} \cdot j \frac{\bar{I} dl}{4\pi} Z_0 \beta \frac{r}{\sqrt{a^2+r^2}} \cdot \frac{e^{-j\beta R \sqrt{a^2+r^2}}}{\sqrt{a^2+r^2}}$$

$$= j \frac{\varepsilon_0 \bar{I} dl}{2\pi} Z_0 \beta \frac{r^2 e^{-j\beta\sqrt{a^2+r^2}}}{(a^2+r^2)^{3/2}} = \left\{ \begin{array}{l} Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \quad \varepsilon_0 Z_0 = \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} = \frac{1}{c} \\ \beta = \frac{\omega}{c} \end{array} \right\}$$

$$= j \frac{\bar{I} dl}{2\pi} \frac{\omega}{c^2} \frac{r^2 e^{-j\beta\sqrt{a^2+r^2}}}{(a^2+r^2)^{3/2}} = \left\{ \begin{array}{l} \bar{p} = \frac{\bar{I} dl}{j\omega} = -j p_0 \\ \Rightarrow \bar{I} dl = \omega p_0 \end{array} \right\}$$

$$= j \frac{p_0}{2\pi} \frac{\omega^2}{c^2} \frac{r^2 e^{-j\beta\sqrt{(a^2+r^2)}}}{(a^2+r^2)^{3/2}}$$

$$= j \frac{p_0 \beta^2}{2\pi} \frac{r^2 e^{-j\beta\sqrt{a^2+r^2}}}{(a^2+r^2)^{3/2}}$$