Distanstentamen i Elektromagnetisk fältteori för F2 och TM2.
EEF031   2020-08-20, kl. 14:00-18:00

Tillåtna hjälpmedel:	Alla hjälpmedel tillåtna. Det är dock absolut förbjudet att kommunicera muntligt eller skriftligt med andra personer än examinator och tentavakt. Det är förbjudet att använda alla former av hörlurar, hörsnäckor eller liknande anordningar.
Förfrågningar:	Andreas Fhager är tillgänglig för frågor via Zoom
Lösningar:	Anslås på kursens hemsida senast första vardagen efter tentan
Resultatet:	Anslås i LADOK
Granskning:	Plats och tid annonseras på kurshemsidan
Kom ihåg	Poängavdrag görs för otydliga figurer, utelämnade referensriktningar, dimensionsfel och utelämnade motiveringar.
Betygsgränser:	**Betyg 3:** Totalt 30, varav ≥ 16 på problemdelen och ≥ 8 på teorin **Betyg 4:** Totalt 40, varav ≥ 20 på problemdelen och ≥ 10 på teorin **Betyg 5:** Totalt 50, varav ≥ 24 på problemdelen och ≥ 12 på teorin

---

OBS!

Resultat från **läsårets** dugga får tillgodoräknas på elektrostatiktalet (tal 1) respektive magnetostatiktalet (tal 2). Bästa resultatet från duggan eller tentan räknas. Poäng på teoridelen respektive problemlösningsdelen räknas separat. Bonuspoäng från **läsårets** omgång av webb-frågorna får också tillgodoräknas till tentaresultatet.

Var vänlig ange den **email-adress** som används för bonusgrundande inlämningsuppgifter på den första sidan med lösningar som lämnas in.

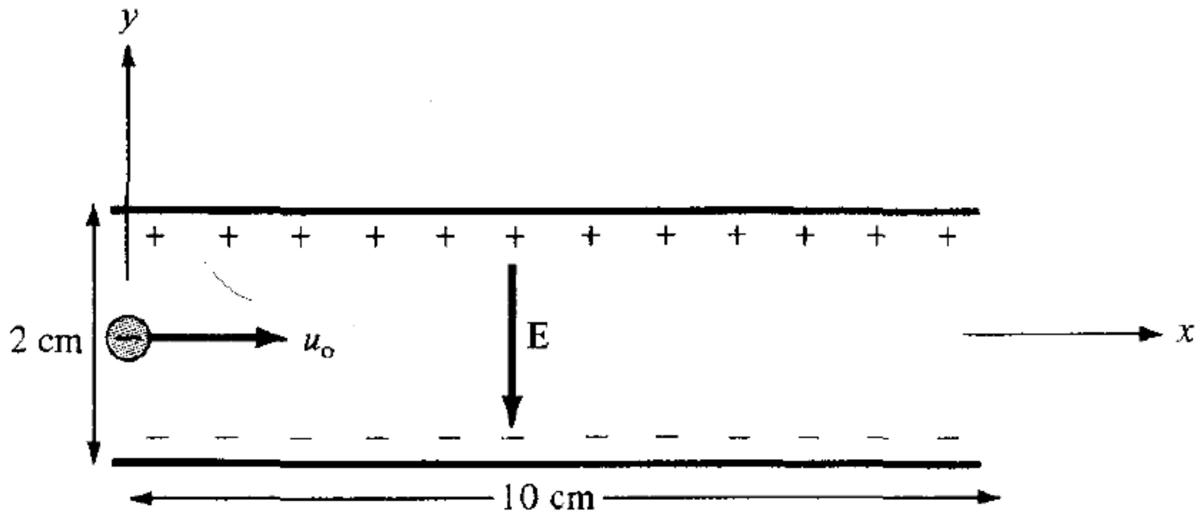
1 (Elektrostatik)

Problemlösningsdel (8 poäng)

En elektron skjuts med begynnelsehastigheten $U_0 = 10^7$ m/s in i det homogena E-fältet mellan två parallella kondensatorplattor, se figuren. (Man kan alltså anta att fältet har konstant storlek och riktning i hela området mellan plattorna.) Elektronen kommer in precis mitt mellan plattorna, se figuren. Elektronen passerar sedan ut mellan plattorna precis under kanten av den övre plattan.

a) Beräkna storleken (och riktningen) hos E-fältet för att elektronen skall passera ut i högeränden så som beskrivs ovan. (4p)

b) Beräkna elektronens hastighet precis då den lämnar området mellan plattorna. Bortse från kanteffekter hos E-fältet. (4p)



Figur 1. Figur för uppgift 1a och 1b

2 (Magnetostatik)

Problemlösningsdel (8 poäng)

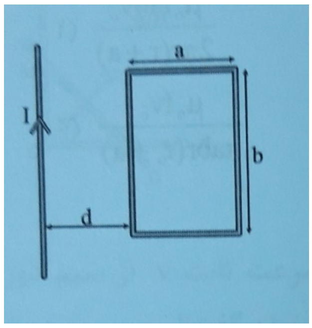
En lång rak koppartråd med radien a leder en ström I längs med tråden. Anta att kopparn har magnetiska egenskaper som kan uttryckas med en linjär magnetisk susceptibilitet χ_m, och att strömmen är jämnt fördelad över tvärsnittet.

a) Beräkna uttrycken för det magnetiska B-fältet i och utanför ledaren. (4 p)
b) Finn de magnetiseringsströmtätheter som resulterar från bundna strömmar i ledaren. Vad är den bundna nettoströmmen längs med ledaren? Kommentera ditt svar! (4 p)

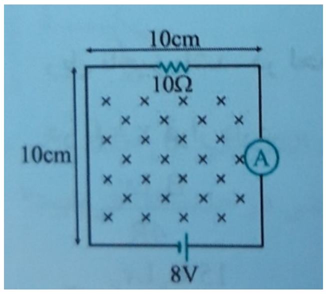
3

Problemlösningsdel (8 poäng)

a) Beräkna amplitud och riktning hos den inducerade strömmen i den rektangulära slingan i kretsen i vidstående figur. Man kan anta att resistansen hos den rektangulära slingan är R. Man kan också anta att strömmen i den raka ledaren beskrivs av uttrycket $I(t) = I_0 e^{-\beta t}$ där I_0 och β är konstanter. (4p)



b) Vad visar Amperemetern i följande krets (indikerat med ett A i en ring) om fältet innanför den rektangulära slingan avtar i en konstant takt av 100 Tesla per sekund. Man kan även anta att fältet är homogent innanför slingan och att det är riktat in i "papperet". (4p)



4

Problemlösningsdel (8 poäng)

Visa att plana elektromagnetiska vågor i en ledare ($\boldsymbol{J}_f \neq 0,\ \rho_f = 0$) nödvändigtvis är transversella (TEM), dvs att E- och H-fälten är riktade vinkelrätt mot propagationsriktningen.
Ledning: Använd ansatserna $\bar{\boldsymbol{E}}(z) = \tilde{\boldsymbol{E}}_0 e^{-\gamma z}$ och $\bar{\boldsymbol{B}}(z) = \tilde{\boldsymbol{B}}_0 e^{-\gamma z}$ (där $\tilde{\boldsymbol{E}}_0$ och $\tilde{\boldsymbol{B}}_0$är komplexa vektorer). Utgå sedan från Maxwells ekvationer.

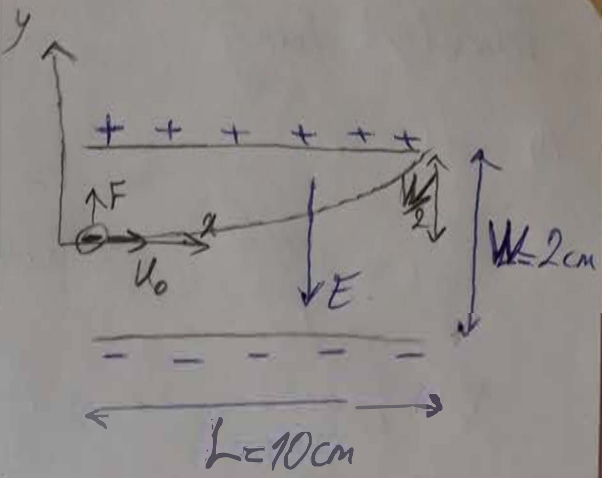
5

Problemlösningsdel (8 poäng)

En radiostation består av ett torn med höjd h med en Hertzdipol placerad i toppen. Hertzdipolen är riktad i z-led och har ett dipolmoment $\bar{p}$. Tornets totala utstrålade effekt är P.

a) Härled ett uttryck för magnituden av strålningsintensiteten, $|\boldsymbol{S}_{med}|$, vid marknivå på ett avstånd D från tornet. Uttryck detta i termer av total utstrålad effekt, P. (4p)
b) På vilket avstånd från tornet bör du utföra mätningar om ditt uppdrag är att avgöra om radiostationen håller sig under gränsvärdet för maximal utstrålad intensitet vid marknivå? Vad blir uttrycket för strålningsintensiteten på detta avstånd? (4p)

Uppgift 1



a) $E = ?$ $\qquad \vec{E} = -E_0\hat{y} \Rightarrow E_0 = ?$

$\vec{F} = E_0 e\hat{y}$, $e = 1.6\times10^{-19}$ (C)

so the force coming from the uniform Electric field is only acting in the y-direction and will impact the trajectory of the particle in $\hat{y}$ only. As a result, the electron will get accelerated in y-direction while keeping the same velocity of u_0 in x-direction. $\Rightarrow \vec{u} = u_y\hat{y} + u_x\hat{x} = u_y\hat{y} + u_0\hat{x}$

$|\vec{F}| = ma \Rightarrow E_0 e = ma$, $m = 9\times10^{-31}$ (kg) , $a = \frac{du_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}$

$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{E_0 e}{m} \Rightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{e}{m}E_0 t + c_1 \Rightarrow y(t) = \frac{1}{2}\frac{e}{m}E_0 t^2 + c_1 t + c_2$

And we know that $y(t=0) = 0$ and $y(t=T) = \frac{W}{2}$

if T is the total time that the electron needs to complete the path, then $u_0 T = L \Rightarrow T = \frac{L}{u_0}$

$\Rightarrow \begin{cases} y(0) = c_2 = 0 \\ \text{and} \\ \left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=0} = u_y(0) = 0 \Rightarrow c_1 = 0 \end{cases}$, $y(T) = \frac{1}{\cancel{2}}\frac{e}{m}E_0T^2 = \frac{W}{\cancel{2}} \Rightarrow E_0 = mW$,

$$\boxed{E_0 = \frac{mWu_0^2}{eL^2}}$$

$$E_0 = \frac{9\times10^{-31}\times2\times10^{-2}\times10^{14}}{1.6\times10^{-19}\times10^{-2}} \approx 1125 \left(\frac{V}{m}\right)$$

b) $u_y(t=T) = \frac{eE_0}{m}T = \frac{1.6\times10^{-19}\times1125\times0.1}{9\times10^{-31}\times10^{7}} = 2\times10^{6} \left(\frac{m}{s}\right)$

$\vec{u} = u_0\hat{x} + u_y\hat{y} = (\hat{x} + 0.2\hat{y})\times10^{7} \left(\frac{m}{s}\right)$

Uppgift 2

a)Vi har två olika områden, för en cirkulär ampereslinga med radien $r < a$ får vi med Amperes lag

$$\begin{aligned}\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} &= \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} = i_{omsluten},\\ 2\pi r H_\phi &= I(r/a)^2,\\ H_\phi &= \frac{Ir}{2\pi a^2},\end{aligned}$$

där vi, givet symmetrin, har antagit att $\mathbf{H} = H_\phi \hat{\phi}$. Samma uträkning, fast för $r > a$, ger

$$H_\phi = \frac{I}{2\pi r}.$$

Vi har alltså

$$\mathbf{H} = \begin{cases} \frac{Ir}{2\pi a^2}\hat{\phi}, & r < a \\ \frac{I}{2\pi r}\hat{\phi}, & r > a \end{cases}$$

Då materialet i ledaren antas vara linjärt så gäller $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$ överallt. Permeabiliteten ges av

$$\mu = \begin{cases} \mu_0(1 + \chi_m), & r < a \\ \mu_0, & r > a \end{cases}$$

vilket alltså ger det magnetiska fältet

$$\mathbf{B} = \begin{cases} \frac{\mu_0(1+\chi_m)Ir}{2\pi a^2}\hat{\phi}, & r < a \\ \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\hat{\phi}, & r > a \end{cases}$$

b) Magnetiseringsströmtätheten ges i volymen av materialet av

$$\mathbf{J}_m = \nabla \times \mathbf{M},$$

och på ytan av

$$\mathbf{J}_{ms} = \mathbf{M} \times \hat{\mathbf{n}}.$$

I båda fallen ges magnetiseringen av $\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H}$. Alltså får vi

$$\begin{aligned}\mathbf{J}_m &= \frac{1}{r}\frac{\partial(r\chi_m H_\phi)}{\partial r}\hat{\mathbf{z}}\\ &= \frac{1}{r}\frac{\partial(r^2)}{\partial r}\frac{\chi_m I}{2\pi a^2}\hat{\mathbf{z}}\\ &= \frac{\chi_m I}{\pi a^2}\hat{\mathbf{z}},\end{aligned}$$

och på ytan

$$\begin{aligned}\mathbf{J}_{ms} &= \frac{\chi_m I}{2\pi r}\hat{\phi} \times \hat{\mathbf{r}}\\ &= -\frac{\chi_m I}{2\pi r}\hat{\mathbf{z}}\end{aligned}$$

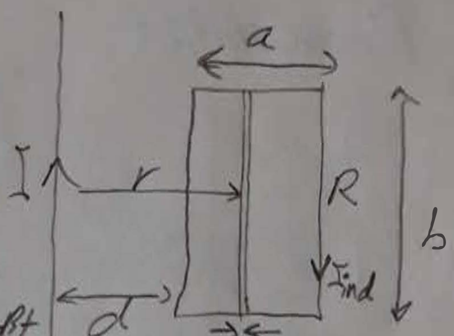
Den bundna nettoströmmen blir då

$$I_b = \pi a^2 J_m + 2\pi a J_{ms} = \chi_m I - \chi_m I = 0,$$

vilket även följer från Amperes lag.

Faraday's Law: Uppgift 3

A) $I(t) = I_0 e^{-\beta t}$ $\qquad I_{ind} = ?$



$$I_{ind} = \frac{emf}{R} \quad , \quad emf = -\frac{d\varphi}{dt}$$

$$\varphi(t) = \int \vec{B} \cdot d\vec{s} \quad , \quad \vec{B} = \hat{\varphi}\,\frac{\mu_0 I}{2\pi r} = \hat{\varphi}\,\frac{\mu_0 I_0 e^{-\beta t}}{2\pi r}$$

in polar coordinate (r, φ)

$$d\vec{s} = \hat{\varphi}\, b\, dr$$

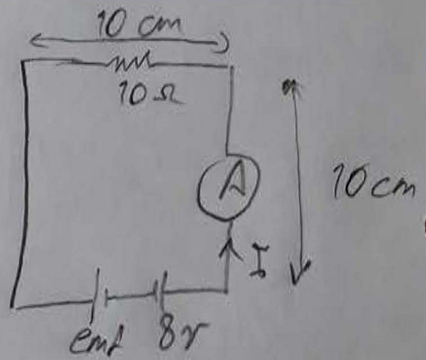
$$\varphi(t) = \int_d^{d+a} \frac{\mu_0 I_0 e^{-\beta t}}{2\pi r} \underbrace{\hat{\varphi} \cdot \hat{\varphi}}_{1}\, b\, dr$$

$$= \frac{\mu_0 I_0 b e^{-\beta t}}{2\pi} \ln \frac{d+a}{d}$$

$$\Longrightarrow I_{ind} = \frac{1}{R}\left[-\frac{d\varphi}{dt}\right] = \frac{\mu_0 I_0 b \beta e^{-\beta t}}{2\pi R} \ln \frac{d+a}{d}$$

And based on Lenz Law, the direction of the current will be clockwise because $I(t)$ is exponentially decreasing over time.

B) $\frac{dB}{dt} = -100 \; \left(\frac{T}{s}\right)$



Because the magnetic field is decreasing, according to Lenz law the induced emf will oppose this.

$$emf = -\frac{d\varphi}{dt} = -\frac{d}{dt}\int B \cdot ds = -\frac{dB}{dt}\underbrace{S}_{\text{area of the loop}} = 100 \times 1 \times 10^{-2} = 1\,v$$

$$I = \frac{8 - emf}{10} = \frac{7}{10} = 0.7\,(A)$$

Uppgift 4

Vi väljer koordinatsystemet så att vågorna propagerar längs med z-axeln, med phasor-notation får vi då:

$$\bar{\mathbf{E}}(z) = \tilde{\mathbf{E}}_0 e^{-\gamma z},$$
$$\bar{\mathbf{B}}(z) = \tilde{\mathbf{B}}_0 e^{-\gamma z},$$

där $\gamma = \alpha + j\beta = \sqrt{j\omega\mu(\sigma + j\omega\epsilon)}$, och $\tilde{\mathbf{E}}_0$ samt $\tilde{\mathbf{B}}_0$ är komplexa, konstanta vektorer.

I en Ohmsk ledare utan fria laddningar (med konstant μ och ϵ) tar Maxwells ekvationer följande form:

$$\nabla \cdot \bar{\mathbf{E}} = 0, \tag{1}$$
$$\nabla \cdot \bar{\mathbf{B}} = 0, \tag{2}$$
$$\nabla \times \bar{\mathbf{E}} = -j\omega\bar{\mathbf{B}}, \tag{3}$$
$$\nabla \times \bar{\mathbf{B}} = \mu\sigma\bar{\mathbf{E}} + j\omega\mu\epsilon\bar{\mathbf{E}}. \tag{4}$$

Ekvation 1 och 2 ger

$$\nabla \cdot \bar{\mathbf{E}} = -\gamma \tilde{E}_{0,z} e^{-\gamma z} = 0,$$
$$\nabla \cdot \bar{\mathbf{B}} = -\gamma \tilde{B}_{0,z} e^{-\gamma z} = 0.$$

För att detta skall vara uppfyllt för alla z måste $\tilde{E}_{0,z} = \tilde{B}_{0,z} = 0$. Detta innebär att båda fälten endast har komponenter i x- och y-led och ingen i propageringsriktningen, detta betyder att vågorna är transversellt elektromagnetiska (TEM).

Uppgift 5

a) För en Hertzdipol ges magnituden av strålningsintensiteten av

$$|\mathbf{S}_{med}| = \frac{|\bar{\mathbf{E}}|^2}{2Z_0}.$$

Där det elektriska fältet ges av

$$\bar{\mathbf{E}} = Z_0 \frac{j\omega l \bar{I} \sin\theta}{4\pi c R} e^{-j\omega R/c} \hat{\theta} = Z_0 \frac{-\omega^2 \bar{p} \sin\theta}{4\pi c R} e^{-j\omega R/c} \hat{\theta} \tag{1}$$

Inserting this yields

$$|\mathbf{S}_{med}| = Z_0 \frac{\omega^4 |\bar{p}|^2 \sin^2\theta}{32\pi^2 c^2 R^2}.$$

På marken, vid ett avstånd d från tornet så kan vi skriva

$$\sin\theta = \frac{D}{\sqrt{D^2 + h^2}},$$
$$R^2 = D^2 + h^2.$$

Detta ger

$$|\mathbf{S}_{med}| = Z_0 \frac{\omega^4 |\bar{p}|^2 D^2}{32\pi^2 c^2 (D^2 + h^2)^2}.$$

Vi vill skriva om detta i termer av total utstrålad medeleffekt, vilken ges av

$$P = \oint_S \mathbf{S}_{med} \cdot d\mathbf{s}.$$

Vi väljer ytan S som en sfär med radie r_0, och integerar:

$$\begin{aligned}
P &= Z_0 \frac{\omega^4 |\bar{p}|^2}{32\pi^2 c^2 r_0^2} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2\theta r_0^2 \sin\theta d\phi d\theta \\
&= Z_0 \frac{\omega^4 |\bar{p}|^2}{32\pi^2 c^2} \left(2\pi \int_0^{\pi} \sin^3\theta d\theta \right) \\
&= Z_0 \frac{\omega^4 |\bar{p}|^2}{32\pi^2 c^2} \left(2\pi \frac{4}{3} \right) \\
&= Z_0 \frac{\omega^4 |\bar{p}|^2}{12\pi c^2}
\end{aligned}$$

Vilket gör att vi kan skriva

$$|\mathbf{S}_{med}| = P \frac{3}{8\pi} \frac{D^2}{(D^2 + h^2)^2}.$$

b) För att kontrollera att gränsvärdet inte överstigs så krävs det att mätningen utförs där vi har maximal intensitet. Detta är en extrempunkt för $|\mathbf{S}_{med}|$, och vi söker därför D så att $\frac{d|\mathbf{S}_{med}|}{dD} = 0$:

$$\begin{aligned}
\frac{d|\mathbf{S}_{med}|}{dD} &= P \frac{3}{8\pi} \left[\frac{2D}{(D^2 + h^2)^2} - \frac{4D^3}{(D^2 + h^2)^3} \right] \\
&= P \frac{3}{8\pi} \left[\frac{2D(D^2 + h^2) - 4D^3}{(D^2 + h^2)^3} \right] \\
&= P \frac{3}{8\pi} \left[\frac{2D(D^2 + h^2 - 2D^2)}{(D^2 + h^2)^3} \right] \\
&= P \frac{3}{8\pi} \left[\frac{2D(h^2 - D^2)}{(D^2 + h^2)^3} \right] = 0,
\end{aligned}$$

vilket är uppfyllt för $D = h$. Vi ska alltså mäta intensiteten på ett avstånd h från masten. Vi får då uttrycket

$$\max_D |\mathbf{S}_{med}| = P \frac{3}{32\pi h^2},$$

för den maxmiala strålningsintensiteten.