

## Tentamen i Elektromagnetisk fältteori för F2 och TM2.

EEF031 2019-01-17, kl. 14:00-18:00

<b>Tillåtna hjälpmedel:</b>	BETA, Physics Handbook, Formelsamling i Elektromagnetisk fältteori, Valfri kalkylator men inga egna anteckningar utöver egna formler på sista bladet i formelsamlingen i Elektromagnetisk fältteori
<b>Förfrågningar:</b>	Andreas Fhager
<b>Lösningar:</b>	Anslås på kursens hemsida
<b>Resultatet:</b>	Anslås i LADOK
<b>Granskning:</b>	Sker på plats och tid annonseras på kurshemsidan
<b>Kom ihåg</b>	Poängavdrag görs för otydliga figurer, utelämnade referensriktningar, dimensionsfel och utelämnade motiveringar.

---

# OBS!

Resultat från **läsårets** dugga får tillgodoräknas på elektrostatik- (tal 1) respektive magnetostatiktalet (tal 2). Bästa resultatet från duggan eller tentan räknas. Poäng på teoridelen respektive problemlösningsdelen räknas separat. Bonuspoäng från **årets** omgång av webb-frågorna får också tillgodoräknas till tentaresultatet.

Svaren på förståelsedelen skall ges på tesen som skall lämnas in.

Förståelsefrågorna besvaras genom att markera en av rutorna efter varje påstående till höger. En och endast en ruta på varje rad skall markeras. De tre svarsalternativen (från vänster till höger är) Ja, Vet ej och Nej. Riktigt svar ger +0,2 poäng oriktigt svar ger -0,2p. Vet ej är neutralt och ger noll poäng. Förståelseuppgifterna ger maximalt 1 poäng och lägst -1 poäng och man kan därför få 1poäng även med ett vet ej svar.

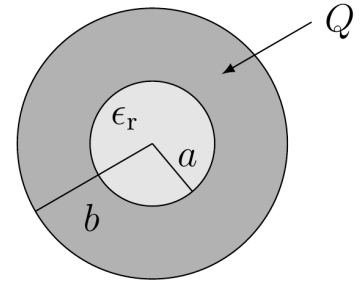
## Anonym kod:

(Var vänlig ange den **email-adress** som används för inlämningsuppgifterna bland den dolda personinformationen på omslaget)

# 1 (Elektrostatik)

## Problemlösningsdel (8 poäng)

a) Ett klot består av en oladdad dielektrisk kärna (ljusare gråfärgat i figur) med radie  $a$ . Materialet i kärnan har en permittivitet  $\epsilon_r$ . Utanpå kärnan finns ett metallskal (mörkare gråfärgat i figur) med ytterradie  $b$  och innerradie  $a$ . Metallskalet är uppladdat med laddningen  $Q$ . Klotet befinner sig i vakuum. Bestäm systemets totala elektrostatiska energi.



## Förståelsedel (4 poäng)

b) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

	ja	?	nej
För att fullständigt beskriva den grundläggande fysiken i uppgiften ovan räcker ett av Maxwells postulat.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
För att fullständigt beskriva den grundläggande fysiken i uppgiften ovan behövs två av Maxwells postulat.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Den grundläggande fysiken i problemlösningsdelen ovan bygger <b>bland annat</b> på Gauss lag.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Den grundläggande fysiken i problemlösningsdelen ovan bygger <b>bland annat</b> på att B-fältet är källfritt.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Den grundläggande fysiken i problemlösningsdelen ovan bygger <b>bland annat</b> på att E-fältet är källfritt.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Den grundläggande fysiken i problemlösningsdelen ovan bygger <b>bland annat</b> på att rotationen av B-fältet är lika med den fria strömtätheten gånger permeabiliteten.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

c) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

	ja	?	nej
Det elektrostatiska fältet är källfritt.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Det elektrostatiska fältet är rotationsfritt.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Det elektrostatiska fältet inuti en perfekt ledare kan variera från punkt till punkt i materialet.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Det elektrostatiska fältet inuti ett dielektriskt material kan variera från punkt till punkt i materialet.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Det elektrostatiska fältet är noll inuti ett laddat, sfäriskt metallskal, med jämnt fördelad laddning över skalet.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Det elektrostatiska fältet är noll inuti en laddad, kubisk metallbox, där boxen tillförts laddningen $Q$ på skalet.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

d) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

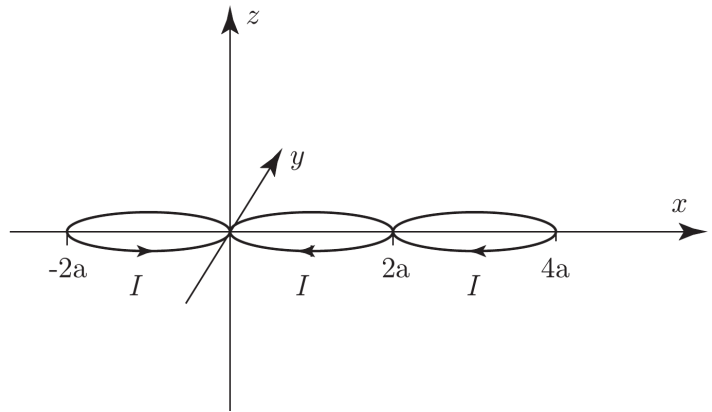
	ja	?	nej
Poissons ekvation kan härledas direkt från kontinuitetsekvationen och definitionen av elektrostatisk potential.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
I vissa fall kan vi lösa Poissons ekvation med hjälp av spegling i isolerade ytor.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
I vissa fall kan vi lösa Poissons ekvation med hjälp av spegling i metallytor.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
På stort avstånd från en elektrisk dipol avtar E-fältet som $1/R$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
På litet avstånd (av samma storleksordning som avståndet mellan laddningarna i en elektrisk dipol) avtar E-fältet som $1/R$ från en elektrisk dipol.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Coulombs lag uttrycker hur stor kraften är mellan två laddningar.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Ohms lag är ett av postulaten i elektrostatiken.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

e) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

	ja	?	nej
Om man definierar den elektrostatiska potentialen är som $E = -\nabla V$ betyder det att den elektriska lägesenergin hos en positiv testladdning minskar då man tillför arbete för att flytta laddningen från en punkt till en annan.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
En ekvipotentialyta definieras som den yta där E-fältet är konstant.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Elektrostatiken säger att det på ytan av ett dielektriskt material kan existera E-fältkomponenter som är riktade parallellt med ytan.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Elektrostatiken säger att det på ytan av ett dielektriskt material kan existera E-fältkomponenter som är riktade vinkelrätt ut från ytan.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Elektrostatiken säger att det på ytan av en metall kan existera E-fältkomponenter som är riktade parallellt med ytan.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Elektrostatiken säger att det på ytan av en metall kan existera E-fältkomponenter som är riktade vinkelrätt ut från ytan.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

## 2 (Magnetostatik)

Tre cirkulära metallslingor med radier  $a$  är placerade i  $xy$ -planet med sina mittpunkter i  $x$ -koordinaterna  $-a$ ,  $a$  och  $3a$ . Genom slingorna flyter en ström,  $I$ , med strömriktningar enligt figuren.



a) Bestäm den magnetiska flödestätheten  $\mathbf{B}$  i punkten  $(a, 0, -a)$ . (3 poäng)

b) Bestäm magnetiska flödestätheten  $\mathbf{B}$  i punkten  $(0, 100a, 0)$ . Ange om du använder någon form av approximation i din beräkning. (5 poäng)

### Problemlösningsdel (8 poäng)

#### Förståelsedel (4 poäng)

c) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

	ja	?	nej
För att fullständigt beskriva den grundläggande fysiken i uppgiften ovan räcker ett av Maxwells postulat.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
För att fullständigt beskriva den grundläggande fysiken i uppgiften ovan behövs två av Maxwells postulat.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Den grundläggande fysiken i problemlösningsdelen ovan bygger <b>bland annat</b> på Gauss lag.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Den grundläggande fysiken i problemlösningsdelen ovan bygger <b>bland annat</b> på att B-fältet är källfritt.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Den grundläggande fysiken i problemlösningsdelen ovan bygger <b>bland annat</b> på att E-fältet är källfritt.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Den grundläggande fysiken i problemlösningsdelen ovan bygger <b>bland annat</b> på att rotationen av B-fältet är lika med den fria strömtätheten gånger permeabiliteten.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

d) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

	ja	?	nej
B-fältets tangentialkomponent är alltid kontinuerlig i gränsen mellan två material.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
H-fältets tangentialkomponent är alltid kontinuerlig i gränsen mellan två material.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
B-fältets normalkomponent är alltid kontinuerlig i gränsen mellan två material.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
H-fältets normalkomponent är alltid kontinuerlig i gränsen mellan två material.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
B-fältet kan mätas direkt med en probe.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
H-fältet kan mätas direkt med en probe.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

e) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

	ja	?	nej
Lorentzkraften beror både på B- och E-fältet.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Laddningar i rörelse som utsätts för ett B-fält <i>kan</i> påverkas av en kraft orsakad av B-fältet.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Laddningar som rör sig <i>parallellt</i> med B-fältslinjerna utsätts för en kraft orsakad av B-fältet.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Laddningar i rörelse som utsätts för ett E-fält påverkas av en kraft orsakad av E-fältet.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Laddningar i <i>vila</i> som <i>endast</i> utsätts för ett B-fält <i>kan</i> påverkas av en kraft orsakad av B-fältet.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
I ett koordinatsystem som följer med en laddning som rör sig vinkelrätt mot B-fältslinjerna kommer $\mathbf{u} \times \mathbf{B}$ att bli noll och därmed påverkas inte laddningen av någon kraft.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

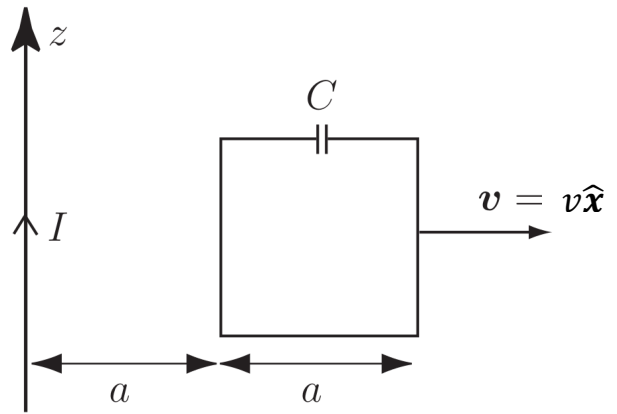
f) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

	ja	?	nej
Magnetiska dipoler används för att modellera magnetiska material.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Järn är ett exempel på ett ferromagnetiskt material.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
För järn är sambandet mellan B och H fälten i allmänhet ett linjärt samband.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Reluktans för en magnetfältskrets motsvarar ungefär resistans för en elektrisk krets.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
I en transformators järnkärna vill man ha ett ferromagnetiskt material med en smal hystereskurva.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Järnkärnan i en transformator syftar till att öka den ömsesidiga induktansen (mutual inductance) mellan transformatorns två lindningar.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Järnkärnan i en transformator syftar till att öka självinduktansen (self inductance) för var och en av transformatorns två lindningar.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

### 3

#### Problemlösningsdel (8 poäng)

En krets består av en liten kondensator, med kapacitans  $C$ , kortsluten via en kvadratisk slinga med sidan  $a$ . Kretsen rör sig med en konstant hastighet  $v = v\hat{x}$ , och är vid tiden  $t = 0$  placerad enligt figuren. Slingan har försumbar självinduktans och resistans. Längs  $z$ -axeln går en rak ledare som för den konstanta strömmen  $I$ .



a) Bestäm det magnetiska flödet genom slingan som funktion av tiden för  $t > 0$ . (4 poäng)

b) Bestäm den inducerade spänningen över kondensatorn, och även den resulterande laddningen på de båda kondensatorplattorna som en funktion av tiden för  $t > 0$ . Rita figur och ange tecknet på laddningen på respektive platta. (4 poäng)

#### Förståelsedel (4 poäng)

c) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

	ja	?	nej
För att fullständigt beskriva den grundläggande fysiken i uppgiften ovan räcker två av Maxwells postulat.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
För att fullständigt beskriva den grundläggande fysiken i uppgiften ovan behövs alla fyra Maxwells postulat.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Den grundläggande fysiken i problemlösningsdelen ovan bygger <b>bland annat</b> på Gauss lag.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Den grundläggande fysiken i problemlösningsdelen ovan bygger <b>bland annat</b> på att B-fältet är källfritt.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Den grundläggande fysiken i problemlösningsdelen ovan bygger <b>bland annat</b> på att E-fältet är källfritt.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Den grundläggande fysiken i problemlösningsdelen ovan bygger <b>bland annat</b> på att rotationen av E-fältet är lika med minus tidsderivatan av B-fältet.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

d) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

	ja	?	nej
Den skalära potentialen beskriver elektriska fält som härrör sig från laddningsseparation.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
En spoles självinduktans beror bland annat på hur stor strömmen är i spolen.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
En spoles självinduktans beror bland annat på hur många lindningsvarv som finns i spolen.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
En spoles självinduktans beror bland annat på radien hos spolen.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
En transformator bygger på självinduktans för sin funktion.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Det magnetiska flödet genom en slinga kan tecknas i termer av den magnetiska vektorpotentialen, $A$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

e) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

	ja	?	nej
Retarderade potentialer kan användas för att beskriva hur E-fältet från en tidsvarierande laddningsfördelning breder ut sig i rummet.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Retarderade potentialer uttrycker att ett elektromagnetiskt fält breder ut sig med ljusets hastighet.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Ett statiskt V-fält från en punktladdning är ett exempel på en retarderad potential.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Den retarderade potentialen har formen $A(t-R/c)$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Den retarderade potentialen kan endast uttryckas med hjälp av den magnetiska vektorpotentialen, $A$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Den magnetiska vektorpotentialen, $A$ , har enheten $Am$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

f) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

	ja	?	nej
Man kan välja divergensen av den magnetiska vektorpotentialen fritt i elektromagnetismen.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Man väljer ofta divergensen av den magnetiska vektorpotentialen till samma som i statiken för att förenkla beräkningarna.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Lentz lag uttrycker att ett elektriskt fält kan genereras utan laddningsseparation.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Lentz kan ofta användas för att riktningsbestämma en inducerad ström.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Lentz lag kan användas för att bestämma storleken på en inducerad ström.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Om slingan i problemlösningsdelen ovan rör sig i ett i rummet konstant statiskt B-fält induceras en spänning över kondensatorn.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

### Problemlösningsdel (8 poäng)

Fälten  $\bar{\mathbf{E}}$  och  $\bar{\mathbf{H}}$  uppfyller Maxwells ekvationer i ett homogent, oledande material med permittivitet  $\epsilon$  och permeabilitet  $\mu$ .

a) Visa att de två nya fälten  $\bar{\mathbf{E}}'$  och  $\bar{\mathbf{H}}'$  givna av sambanden  $\bar{\mathbf{E}}' = Z\bar{\mathbf{H}}$  och  $\bar{\mathbf{H}}' = -\frac{\bar{\mathbf{E}}}{Z}$  också uppfyller

Maxwells ekvationer i materialet. Vågimpedansen i materialet är  $Z = \sqrt{\mu/\epsilon}$ . *Ledtråd:* Utgå från Maxwells ekvationer i ett källfritt oledande material och visa att dessa fyra likheter stämmer för  $\bar{\mathbf{E}}'$  och  $\bar{\mathbf{H}}'$ , utnyttja att  $\bar{\mathbf{E}}$  och  $\bar{\mathbf{H}}$  redan uppfyller dessa. (5 poäng)

b) Givet att  $\bar{\mathbf{E}} = \hat{\mathbf{x}}E_0e^{-j\beta z}$ , skriv de tillhörande tidsuttrycken för  $\bar{\mathbf{H}}$ ,  $\bar{\mathbf{E}}'$  och  $\bar{\mathbf{H}}'$ .

Alltså  $\mathbf{H}(z, t)$ ,  $\mathbf{E}'(z, t)$  och  $\mathbf{H}'(z, t)$  (3 poäng)

### Förståelsedel (4 poäng)

b) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

	ja	?	nej
För att fullständigt beskriva den grundläggande fysiken i uppgiften ovan räcker två av Maxwells postulat.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
För att fullständigt beskriva den grundläggande fysiken i uppgiften ovan behövs alla fyra Maxwells postulat.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Den grundläggande fysiken i problemlösningsdelen ovan bygger <b>endast</b> på att rotationen av H-fältet är den fria strömtätheten plus tidsderivatan av förskjutningsfältet.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Den grundläggande fysiken i problemlösningsdelen ovan bygger <b>endast</b> på att B-fältet är källfritt.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Den grundläggande fysiken i problemlösningsdelen ovan bygger <b>endast</b> på att rotationen av B-fältet är lika med strömtäthetsfältet plus förskjutningsströmmen (displacement current).	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Den grundläggande fysiken i problemlösningsdelen ovan bygger <b>endast</b> på att rotationen av E-fältet är lika med minus tidsderivatan av B-fältet.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

c) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

	ja	?	nej
En evanescent våg uppfyller vågekvationen.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Totalreflektion ger upphov till evanescenta vågor.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
En cirkulärpolariserad plan våg träffar en plan gränssyta till ett förlustfritt dielektrikum under Brewstervinkeln. Reflektionen blir då linjärpolariserad.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
En cirkulärpolariserad plan våg träffar en plan gränssyta till ett förlustfritt dielektrikum under Brewstervinkeln. Reflektionen blir då cirkulärpolariserad.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
En cirkulärpolariserad plan våg träffar en plan gränssyta till ett förlustfritt dielektrikum under Brewstervinkeln. Reflektionen blir då elliptiskt polariserad.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Brewstervinkeln definieras både för vågor med polarisering parallellt och vinkelrätt mot infallsplanet.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

d) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

	ja	?	nej
En plan våg (uniform plane wave) kan ha en rumsberoende utbredningsriktning.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
En plan våg (uniform plane wave) har alltid sin en E-fältsvektor riktad vinkelrätt mot utbredningsriktningen.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
En plan våg (uniform plane wave) har alltid sin en B-fältsvektor riktad vinkelrätt mot utbredningsriktningen.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
En plan våg (uniform plane wave) kan ha E- och H-fältsvektorer som är rumsberoende över ett plan som är vinkelrätt mot utbredningsriktningen.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
En plan våg (uniform plane wave) kan ha en E-fältsvektor riktad i utbredningsriktningen.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
E-fältet och H-fältet hos en plan våg (uniform plane wave) kan relateras till varandra via vågimpedansen hos materialet i vilken vågen propagerar.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

e) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

	ja	?	nej
$j\omega$ -metoden för fältberäkningar fungerar bara för harmoniskt varierande fält.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Tidsderivata i Maxwells ekvationer övergår i $j\omega$ -metoden till division med $j\omega$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Ett komplext uttryck på E-fältet kan inte innehålla ett tidsberoende.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
För att konvertera från komplext till reellt fält multiplicerar man med $e^{j\omega t}$ och tar realdelen.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Komplexa fält kan användas för att beskriva plana vågor.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Vektorfält kan uttryckas på komplex form men inte skalära fält.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

### Problemlösningsdel (8 poäng)

Två antenner modelleras som två elektriska Hertzdipoler riktade i z-led, och är placerade med sina mittpunkter i koordinaterna  $(0,0,0)$  och  $(0,0,d)$ . Antennerna drivs med strömmar som har fasskillnad  $\phi$  i förhållande till varandra. Bestäm det resulterande E-fältet från de två antennerna i de två punkterna  $p_1 = (R, 0,0)$  och  $p_2 = (R, 0, R)$ . Det gäller att  $R \gg d$  och  $R \gg \lambda$ .

a) Hur ska  $d$  och  $\phi$  väljas för att maximera mottagningen i  $p_1$  samtidigt som mottagningen i  $p_2$  minimeras? (6 poäng)

b) Med samma  $d$  som i uppgift a, vilket nytt värde på  $\phi$  minimerar mottagningen i  $p_1$ ? (2 poäng)

**Anmärkning:** Båda deluppgifterna har flera svar, svara med det minsta positiva värdet.

### Förståelsedel (4 poäng)

b) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

ja ? nej

Kontinuitetsekvationen kan härledas ifrån Maxwells fyra postulat.

Utöver Maxwells fyra postulat är kontinuitetsekvationen nödvändig för en fullständig beskrivning av den elektromagnetiska teorin.

Den grundläggande fysiken i problemlösningsdelen ovan bygger **bland annat** på att rotationen av B-fältet är lika med strömtäthetsfältet plus förskjutningsströmtätheten (displacement current).

Den grundläggande fysiken i problemlösningsdelen ovan bygger **bland annat** på att B-fältet är källfritt.

Den grundläggande fysiken i problemlösningsdelen ovan bygger **bland annat** på att rotationen av E-fältet är lika med minus tidsderivatan av B-fältet.

Den grundläggande fysiken i problemlösningsdelen ovan bygger **bland annat** på att E-fältet är källfritt.

c) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

ja ? nej

En Hertzdipol har ett isotropt strålningsdiagram, dvs den strålar lika mycket effekt i alla riktningar.

En Hertzdipol är ett exempel på en antenn med hög strålningsresistans, och den är därför en bra sändarantenn.

Antennen i en WiFi-mottagare i tex en Laptop bör ha så hög direktivitet som möjligt.

Sändar/mottagarantennen i en mobiltelefon bör ha så hög direktivitet som möjligt.

Man kan använda flera dipolantenner monterade bredvid varandra för att öka direktiviteten hos sin antennenordning jämfört med om man bara använder en enda halv vågsdipol.

Genom att variera amplituden hos strömmen som driver de olika individuella antennerna i en antennenordning med flera dipolantenner monterade bredvid varandra kan man styra i vilken riktning som maximal intensitet sänds ut.

d) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

ja ? nej

Poyntingvektorn för en plan våg (uniform plane wave) är riktad vinkelrätt mot utbredningsriktningen.

Poyntingvektorn på ytan av en lång rak ledare som för en ström är riktad radiellt in mot ledarens centrum.

Om fashastigheten är frekvensberoende kan det betyda att grupphastigheten skiljer sig från fashastigheten.

Grupphastigheten i vakuum skiljer sig från fashastigheten.

Grupphastigheten i vatten skiljer sig från fashastigheten.

Grupphasigheten kan definieras för en monokromatisk våg, dvs en våg med en frekvens.

e) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

ja ? nej

Vid snett infall mot en gränssyta skiljer sig uttrycken på reflektionskoefficienten för vinkelrät polarisering jämfört med parallell polarisering mot infallsplanet.

Snells lag kan härledas genom att studera randvillkoren i gränsen mellan olika material.

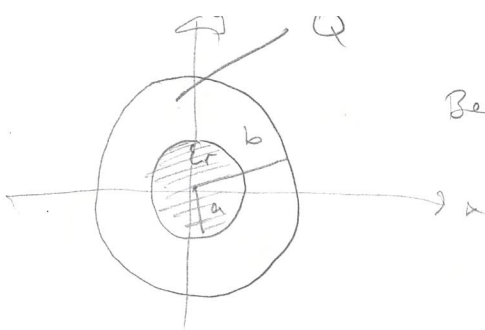
Snells lag säger att reflektionsvinkeln är samma som infallsvinkeln.

Snells lag säger att reflektionsvinkeln är samma som transmissionsvinkeln.

Funktionen hos en optisk fiber bygger på totalreflektion.

Totalreflektion sker vid Brewstervinkeln.

1



Beräkna det elektriska fältet för de tre olika områdena  
med hjälp av Gauss lag

$$\int D \, ds = Q_{\text{inneslutet}} \xrightarrow{\text{sför rik symmetry}} 4\pi r^2 D_r(r) = Q_{\text{inneslutet}}$$

$$\Rightarrow D_r(r) = \frac{Q_{\text{inneslutet}}}{4\pi r^2}$$

$r < a$

$$Q_{\text{inneslutet}} = 0 \Rightarrow D = 0 \Rightarrow E = 0$$

$a < r < b$

metallen  $\Rightarrow E = 0$

$b < r$

$$Q_{\text{inneslutet}} = Q \Rightarrow D(r) = \frac{Q}{4\pi r^2} \Rightarrow D = \frac{Q}{4\pi r^2} \hat{r}$$

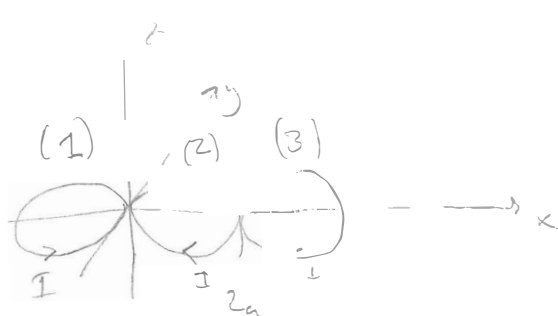
$$E = \frac{D}{\epsilon_0} = \frac{Q}{4\pi r^2 \epsilon_0} \hat{r}$$

Totala elektriska energin ges av

$$W_e = \frac{1}{2} \int_{V_\infty} E \cdot D \, dV = \int_{r < b} 0 \, dV + \int_{r > b} \frac{Q^2}{16\pi r^4 \epsilon_0} \, dV$$

$$= \frac{Q^2}{8\pi \epsilon_0} \int_{r=b}^{\infty} \frac{1}{r^2} \, dr = \frac{Q^2}{8\pi \epsilon_0} \left[ -\frac{1}{r} \right]_b^{\infty} = \frac{Q^2}{8\pi \epsilon_0 b}$$

(2)



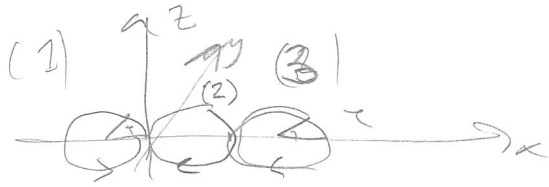
B)  $B_c(0, 100a, 0)$

Bidragen från slinga (1) och  
tar ut varandra

Avståndet från centrum av slinga (3)  
fältpunkten är  $d = \sqrt{(100a)^2 + (3a)^2}$   
vilket är mycket större än radien av  
slingan  $a$  vi kan därför använda  
dipol approximationen.



2A



Vi börjar med att beräkna bidragen från slinga (1) och (2) m. h. a. Biot-Savart

slinga (1) utgångspunkt  $(-a, 0, 0)$

$$R_1 = (-a, 0, 0) + (a \cos \varphi, a \sin \varphi, 0)$$

$$\varphi \in [0, 2\pi]$$

$$B(R_2) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{I \, dl_1 \times \hat{R}_{12}}{r_{12}^2}$$

$$R_2 = (a, 0, -a), \quad R_{12} = (2a - a \cos \varphi, -a \sin \varphi, -a)$$

$$dl_1 = a \hat{e} = a(-\sin \varphi, \cos \varphi, 0)$$

$$dl_1 \times R_{12} = a^2 \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 2 - \cos \varphi & -\sin \varphi & -1 \end{vmatrix} = a^2 \begin{pmatrix} -\cos \varphi & -\sin \varphi & \sin^2 \varphi - \cos \varphi(2 - \cos \varphi) \end{pmatrix}$$

$$R_{12} = \sqrt{(2a - a \cos \varphi)^2 + a^2 \sin^2 \varphi + a^2}$$

$$= a \sqrt{4 - 4 \cos \varphi + \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi + 1}$$

$$= a \sqrt{6 - 4 \cos \varphi}$$

Bidrag från slinga (1)

$$B_{(1)} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{a^2 (-\cos \varphi, -\sin \varphi, \sin^2 \varphi - \cos \varphi(2 - \cos \varphi))}{a^3 (6 - 4 \cos \varphi)^{3/2}}$$

För slinga (3)

mittpunkt ändras till  $(3a, 0, 0)$

$$dlz = a(\sin \varphi, -\cos \varphi, 0)$$

$$\vec{R}_{12} = (-2a - a \cos \varphi, -a \sin \varphi, -a)$$

$$\Rightarrow dlz \times \vec{R}_{12}$$

$$= a^2 (\cos \varphi, \sin \varphi, -\sin^2 \varphi + \cos \varphi (-2 - \cos \varphi))$$

$$R_{12} = \dots = a \sqrt{6 + 4 \cos \varphi}$$

bidraget från slinga (3)

$$\vec{B}_{(3)} = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{(\cos \varphi, \sin \varphi, -\sin^2 \varphi + \cos \varphi (-2 - \cos \varphi))}{(6 + 4 \cos \varphi)^{3/2}}$$

Beteckna vinkeln som parametererar slinga (3)

$\varphi_3$  och vinkeln  $\varphi_1$  (1)  $\varphi_1$

och betrakt  $\hat{x}, \hat{y}$  och  $\hat{z}$  var för sig.

$\hat{y}$ : Om  $\varphi_3 = \pi - \varphi_1$  blir

$$\hat{y} \cdot \vec{B}_{(3)} = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \int_{\varphi_1=0}^{2\pi} \frac{\sin(\pi - \varphi_1)}{(6 + 4 \cos(\pi - \varphi_1))^{3/2}} d\varphi_1 = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \int \frac{\sin \varphi_1}{(6 - 4 \cos \varphi_1)^{3/2}}$$

$$= - \hat{y} \cdot \vec{B}_{(1)}$$

Alltså tar bidragen från sling (1)

och (3) ut varandra i  $\hat{y}$ -led

$\hat{z}$  i Om  $e_3 = \pi - e_1$  litar

$$\hat{z} \cdot B_3 = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \int_{e_1=0}^{2\pi} \frac{-\sin^2(\pi - e_1) + \cos(\pi - e_1)(2 - \cos(\pi - e_1))}{(6 + 4\cos(\pi - e_1))^{3/2}}$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \int_{e_1=0}^{2\pi} \frac{-\sin^2(e_1) + \cos(e_1)(2 - \cos e_1)}{(6 - 4\cos e_1)^{3/2}}$$

$$= -\hat{z} \cdot B_3$$

Alltså tar bidragen från sling (1) och (3) ut varandra i  $\hat{z}$ -led

$\hat{x}$ -led  $e_3 = \pi - e_1$  ger

$$\hat{x} \cdot B_3 = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \int_{e_1=0}^{2\pi} \frac{\cos(\pi - e_1)}{(6 - 4\cos e_1)^{3/2}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \int_{e_1=0}^{2\pi} \frac{-\cos e_1}{(6 - 4\cos e_1)^{3/2}}$$

$$= \hat{x} \cdot B_2 \quad \text{Dessa bidrag adderas!!}$$

$$\Rightarrow B_1 + B_3 = -\frac{\mu_0 I}{2\pi a} \int_{e=0}^{2\pi} \frac{\cos e}{(6 - 4\cos e)^{3/2}} \quad \hat{x}$$

denna integral är svårast och löses som den är

Bidraget från sling (2) fås m.h.a.

formel ur formelsamling  $B = \hat{z} \frac{\mu_0 I a^2}{2(z^2 + a^2)^{3/2}} \quad (z \rightarrow -a, I \rightarrow -I)$

$$\Rightarrow B_2 = -\hat{z} \frac{\mu_0 I a^2}{2(a^2 + a^2)^{3/2}} = -\hat{z} \frac{\mu_0 I}{4\sqrt{2}a} \quad \text{OBS! riktning}$$

Totala fältet blir alltså

$$B = B_1 + B_2 + B_3 = - \frac{\mu_0 I}{2a} \left( \frac{1}{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{\cos \varphi}{(6-4\cos \varphi)^{3/2}} d\varphi \hat{x} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \hat{z} \right)$$

Notis:

Denna uppgift blev svårare än tänkt  
då det först var tänkt att bidragen  
från slinga (1) och (2) skulle ta ut  
varandra helt.

Vi får då (från formelsamling)

$$B(R, \theta) = \frac{\mu_0 m}{4\pi R^3} (\hat{R} 2\cos\theta + \hat{\theta} \sin\theta)$$

för en dipol med magnetiskt moment  $m = m\hat{z}$   
i origo.

I vår fall är  $m = -I\pi a^2$

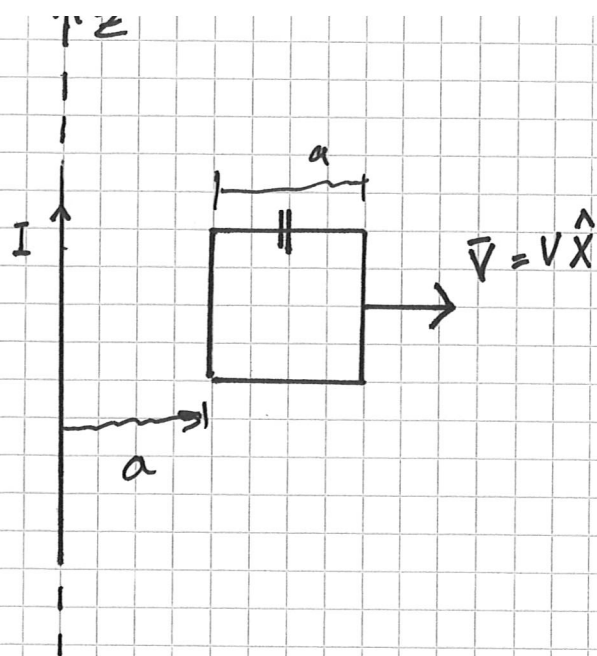
$$r = 100a, \quad \theta = \frac{\pi}{2} \quad \text{och} \quad \hat{\theta} = -\hat{z}$$

vilket ger

$$B(0, 100a, 0) = \frac{\mu_0 (-I\pi a^2)}{4\pi (100a)^3} (-\hat{z})$$

$$= \boxed{\frac{\mu_0 I a^2}{4 (100a)^3} \hat{z}}$$

U3  
①



B-fält från rak ledare:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \hat{\phi} = [i \text{ planet}] = \frac{\mu_0 I}{4\pi x} \hat{y}$$

a) flödet genom slingan ges av

$$\begin{aligned} \Phi(t) &= \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_{a+vt}^{2a+vt} \frac{1}{x} a dx = \\ &= \frac{\mu_0 I a}{2\pi} [\ln x]_{a+vt}^{2a+vt} = \\ &= \frac{\mu_0 I a}{2\pi} \ln\left(\frac{2a+vt}{a+vt}\right) \end{aligned}$$

b)

inducerad EMK ges av

$$\mathcal{E} = - \frac{d\Phi}{dt} = \frac{\mu_0 I a v}{2\pi} \left( \frac{1}{a+vt} - \frac{1}{2a+vt} \right)$$

Spänningen över kondensatorn

blir \$V = \mathcal{E}\$. Laddning ges av

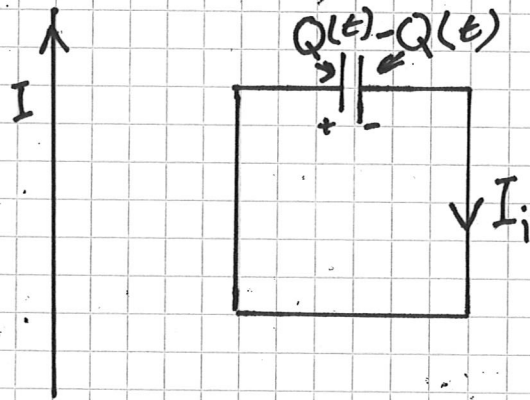
$$Q = CV = C \frac{\mu_0 I a v}{2\pi} \left( \frac{1}{a+vt} - \frac{1}{2a+vt} \right)$$

U3

②

Lenz säger att den inducerade strömmen flödar i den riktning som ger ett fält som motverkar ändringen i flöde.

Flödet genom slingan går i  $y$ -riktningen och är minskande. Alltså går en ström medurs genom slingan.



(4)

A) Ekvationer som ska vara uppfyllda:

$$(1) \quad \nabla \times \bar{E}' = -j\omega \bar{B}'$$

$$(2) \quad \nabla \times \bar{H}' = j\omega \bar{D}'$$

$$(3) \quad \nabla \cdot \bar{D}' = 0$$

$$(4) \quad \nabla \cdot \bar{B}' = 0$$

OBS! Det är givet i uppgiften att dessa är uppfyllda för  $\bar{E}$  och  $\bar{H}$ .

$$(1) \quad \nabla \times \bar{E}' = \epsilon (\nabla \times \bar{H}) = \epsilon (j\omega \epsilon \bar{E}) \\ = -j\omega \epsilon \underbrace{\epsilon^2}_{=\mu} \left(-\frac{\bar{E}}{\epsilon}\right) = j\omega \mu \bar{H}'$$

$$(2) \quad \nabla \times \bar{H}' = -\frac{1}{\epsilon} (\nabla \times \bar{E}) = -\frac{1}{\epsilon} (-j\omega \mu \bar{H}) \\ = j\omega \mu \underbrace{\frac{1}{\epsilon^2}}_{=\epsilon} (\epsilon \bar{H}) = j\omega \epsilon \bar{E}'$$

$$(3) \quad \nabla \cdot \bar{D}' = \epsilon (\nabla \cdot \bar{E}') = \epsilon \epsilon (\nabla \cdot \bar{H}) = 0$$

$$(4) \quad \nabla \cdot \bar{B}' = \mu (\nabla \cdot \bar{H}') = -\frac{\mu}{\epsilon} (\nabla \cdot \bar{E}) = 0$$



$$B) \quad \overline{\mathbf{E}} = \hat{x} E_0 e^{-j\beta z}$$

$$\overline{\mathbf{H}} = \frac{1}{Z} \hat{k} \times \overline{\mathbf{E}}$$

$$\hat{k} = \hat{z}$$

$$= \frac{1}{Z} \hat{y} E_0 e^{-j\beta z}$$

$$\overline{\mathbf{E}}' = Z \overline{\mathbf{H}} = \hat{y} E_0 e^{-j\beta z}$$

$$\overline{\mathbf{H}}' = -\frac{1}{Z} \overline{\mathbf{E}} = -\frac{1}{Z} \hat{x} E_0 e^{-j\beta z}$$

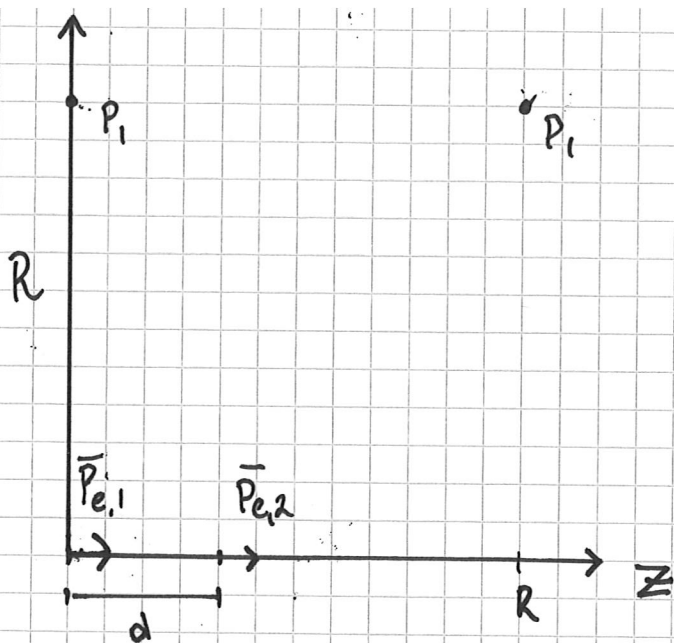
Tidouttryck

$$H(z, t) = \frac{E_0}{Z} \cos(\omega t - \beta z) \hat{y}$$

$$E'(z, t) = E_0 \cos(\omega t - \beta z) \hat{y}$$

$$H'(z, t) = -\frac{E_0}{Z} \cos(\omega t - \beta z) \hat{x}$$

U5



Finn array faktorn!

$$\bar{E}_1 = \hat{\theta} z_0 \frac{j\omega \mu \bar{I}}{4\pi c R} \sin \theta e^{-j\frac{\omega}{c} R}$$

$$\bar{E}_2 = \hat{\theta} z_0 \frac{j\omega \mu \bar{I}}{4\pi c R'} \sin \theta' e^{-j(\frac{\omega}{c} R' + \varphi)}$$

 $R, R' \gg d$  ger

$\theta' \approx \theta$

 $R' \approx R$  för avstånd $R' \approx R + d \cos \theta$  för fas

$$\bar{E}_{\text{tot}} = \underbrace{\hat{\theta} z_0 \frac{j\omega \mu \bar{I}}{4\pi c R} \sin \theta e^{-j\frac{\omega}{c} R}}_{\bar{E}_1} \left( 1 + e^{-j(\frac{\omega}{c} \cos \theta d + \varphi)} \right)$$

Array faktorn är alltså  $1 + e^{-j(\frac{\omega}{c} \cos \theta d + \varphi)}$ a) max i  $P_1$ , min i  $P_2$ För  $P_1$  är  $\theta = \frac{\pi}{2}$ :

$$1 + e^{-j(0 + \varphi)} = 2 \Rightarrow \varphi = 2\pi n,$$

U5

För  $P_2$  är  $\theta = \pi/4$  :

$$1 + e^{-j(\frac{\omega}{c} \cos \pi/4 d + \varphi)} = 0$$

$$\frac{\omega}{c} \cos \pi/4 d + \varphi = \pi(1 + 2n_2)$$

$$\frac{2\pi}{\lambda} \frac{1}{\sqrt{2}} d + 2\pi n_1 = \pi(1 + 2n_2)$$

$$d = \frac{\lambda \pi}{\sqrt{2} \pi} (1 + 2n_1 + 2n_2)$$

minsta  $d$  och  $\varphi$  ges av  $n_1 = n_2 = 0$ 

$$\varphi = 0$$

$$d = \frac{\lambda}{\sqrt{2}}$$

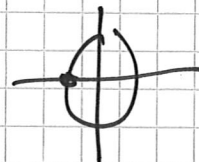
b)  $d = \frac{\lambda}{\sqrt{2}}$  från a)

vi vill nu minimera för

$$\theta = \pi/2$$

$$1 + e^{-j(\frac{\omega}{c} \cos \pi/2 d + \varphi)} = 0$$

$$e^{-j\varphi} = -1$$



$$\varphi = \pi(1 + 2n)$$

minst  $\varphi$  för  $n=0$  :  $\varphi = \pi$