

Tentamen i Elektromagnetisk fältteori för F2.

EEF031 2015-01-15 kl. 14:00-18:00

Tillåtna hjälpmedel:	BETA, Physics Handbook, Formelsamling i Elektromagnetisk fältteori, Valfri kalkylator men inga egna anteckningar utöver egna formler på sista bladet i formelsamlingen i Elektromagnetisk fältteori
Förfrågningar:	Jinlin Liu, tel. 073-58 59 548
Examinator:	Andreas Fhager, tel. 076-125 70 12
Lösningar:	anslås på kursens hemsida
Resultatet:	anslås i LADOK
Granskning:	Sker på plats och tid annonseras på kurshemsidan
Kom ihåg	Poängavdrag görs för otydliga figurer, utelämnade referensriktningar, dimensionsfel och utelämnade motiveringar.

OBS!

Resultat från årets dugga får tillgodoräknas på elektrostatik- (tal 1) respektive magnetostatiktalet (tal 2). Bästa resultatet från duggan eller tentan räknas. Poäng på teoridelen respektive problemlösningsdelen räknas separat. Bonuspoäng från årets omgång av webb-frågorna får också tillgodoräknas till tentaresultatet.

Svaren på förståelsedelen skall ges på tesen som skall lämnas in.

Förståelsefrågorna besvaras genom att markera en av rutorna efter varje påstående till höger. En och endast en ruta på varje rad skall markeras.

De tre svarsalternativen (från vänster till höger är) Ja, Vet ej och Nej.

Riktigt svar ger +0,2 poäng oriktigt svar ger -0,2p. Vet ej är neutralt och ger noll poäng. Förståelseuppgifterna ger maximalt 1 poäng och lägst -1 poäng och man kan därför få 1poäng även med ett vet ej svar.

Anonym kod:

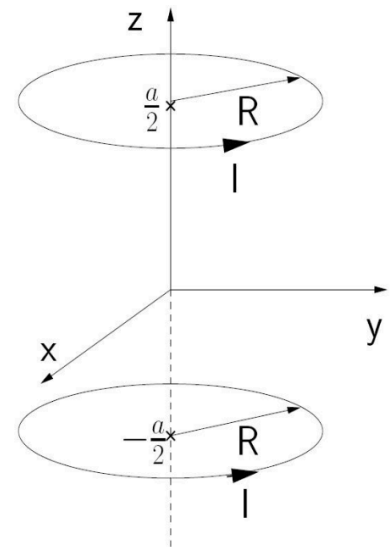
(Var vänlig ange den email-adress som används för inlämningsuppgifterna bland den dolda personinformationen på omslaget)

2 (Magnetostatik)

Problemlösningsdel (8 poäng)

Två identiska spolar ligger parallellt orienterade i x-y-planet. Spolarna har radien R och båda leder en ström I genom respektive spole, med riktningar enligt figur.

a) Beräkna $\mathbf{B}(z) = B_z \hat{z}$ på z-axeln mellan $-\frac{a}{2} < z < \frac{a}{2}$.



Förståelsedel (4 poäng)

b) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

	ja	?	nej
För att fullständigt beskriva den grundläggande fysiken i uppgiften ovan räcker ett av Maxwells postulat.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
För att fullständigt beskriva den grundläggande fysiken i uppgiften ovan behövs två av Maxwells postulat.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Den grundläggande fysiken i problemlösningsdelen ovan bygger bland annat på Gauss lag.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Den grundläggande fysiken i problemlösningsdelen ovan bygger bland annat på att B-fältet är källfritt.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Den grundläggande fysiken i problemlösningsdelen ovan bygger bland annat på att E-fältet är källfritt.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Den grundläggande fysiken i problemlösningsdelen ovan bygger bland annat på att rotationen av B-fältet är lika med den fria strömtätheten gånger permeabiliteten.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

c) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

	ja	?	nej
Magnetiseringsfältet härleds genom att summera magnetiska dipoler i en liten volym ΔV .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Ett homogent magnetiserat material har en magnetiseringsströmtäthet.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Ett homogent magnetiserat material har en magnetiseringsytströmtäthet.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Den magnetiska vektorpotentialen från en magnetisk dipol avtar som $1/R^3$ på stort avstånd från dipolen.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
B-fältet från en magnetisk dipol avtar som $1/R^2$ på stort avstånd från dipolen.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Div(J)=0 är en konsekvens av att laddningstätheten är konstant i tiden, vilket är fallet i statiken.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

d) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

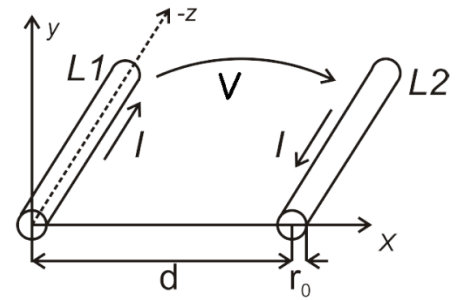
	ja	?	nej
Kontinuitetsekvationen för stationär ström följer om man tar divergensen av Amperes lag.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$ om vi har tidsvarierande laddningsfördelningar.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Från $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$ kan Kirchoffs strömlag härledas.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Från $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$ kan Kirchoffs spänningslag härledas.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$ är en konsekvens av att laddningen är bevarad.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Strömtäthetsfältet har enheten A/m^2 .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

e) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

	ja	?	nej
Två långa raka parallella ledare som leder en likström i samma riktning känner av en attraktiv kraft, som orsakas av likströmmen och att det uppstår ett B-fält runt ledarna.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Två långa raka parallella ledare känner av en attraktiv kraft om bara den ena ledaren leder en likström, som orsakas av likströmmen och att det uppstår ett B-fält runt ledarna.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Metoden att beräkna krafter kan härledas ur ett resonemang som baseras på att kontinuitetsekvationen ska vara uppfylld.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Om vi använder metoden med virtuella förflyttningar för att beräkna den magnetiska kraften kan både flöde och ström hållas konstanta samtidigt under den tänkta förflyttningen.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Om man håller strömmen konstant blir kraften större än om man håller flödet konstant eftersom batteriet i det fallet levererar energi till systemet för att hålla strömmen konstant.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Om vi håller det magnetiska flödet konstant ska vi ha ett minustecken framför derivatan av energin.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Problemlösningsdel (8 poäng)

En array av ett stort antal parallella ledningar kan styras så att den får en del speciella egenskaper, såsom negativ permittivitet och att den kan fås att fungera som ett hög-pass filter. Ett sådant material med negativ permittivitet används idag mycket inom antenn- och mikrovågsforskning för att utveckla nya antenntyper. I figuren visas en enhetscell av detta material. Den består av två mycket långa ledare, som leder ström i motsatta riktningar enligt figuren. Följande approximation kan antas gälla $r_0 \ll d$. Det intressanta för tillämpningen är effekttätheten i planet mellan de två ledarna.



a) Beräkna den elektriska fältstyrkan E i planet mellan de två ledarna. Skissa fältvektorer i figuren. Ledning:

För en enkel ledare är den elektriska potentialen $V = -\frac{Q}{2\pi\epsilon} \ln\left(\frac{r}{r_0}\right)$, r är avståndet från ledarens centrum och r_0 är ledarens radie.

b) Beräkna den magnetiska fältstyrkan H i planet mellan de två ledarna. Skissa fältvektorer i figuren.

c) Beräkna fältens effekttäthet i planet mellan de två trådarna med hjälp av Poyntingvektorn, S .

Förståelsedel (4 poäng)

d) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

	ja	?	nej
För att fullständigt beskriva den grundläggande fysiken i uppgiften ovan räcker två av Maxwells postulat.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
För att fullständigt beskriva den grundläggande fysiken i uppgiften ovan behövs alla fyra Maxwells postulat.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Den grundläggande fysiken i uppgiften ovan bygger bland annat på att rotationen av H-fältet är den fria strömtätheten plus tidsderivatan av förskjutningsfältet.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Den grundläggande fysiken i uppgiften ovan bygger bland annat på att B-fältet är konservativt.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Den grundläggande fysiken i uppgiften ovan bygger bland annat på att rotationen av E-fältet är lika med minus tidsderivatan av B-fältet.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Den grundläggande fysiken i uppgiften ovan bygger bland annat på att E-fältet är källfritt.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

e) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

	ja	?	nej
Gauss lag modifieras när man går från elektrostatik till elektrodynamik.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Amperes lag modifieras när man går från elektrostatik till elektrodynamik.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Kontinuitetsekvationen innehåller samma nollskilda termer i statiken som i dynamiken.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Man kan använda Lenz lag för att bestämma riktningen på strömmen i en stillastående slinga som befinner sig i ett tidsvarierande magnetfält.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Lenz lag följer av Faradays lag.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Lenz lag säger att en inducerad spänning förstärker förändringen i det pålagda magnetfältet.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

f) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

	ja	?	nej
Retarderade potentialer kan användas för att beskriva hur E-fältet från en punktladdning som rör sig breder ut sig i rummet.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Retarderade potentialer är en konsekvens av att inget kan färdas snabbare än ljuset.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Retarderade potentialer är lösningar till Poissons ekvation.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Den retarderade potentialen har formen $A(t-R/c)$.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Det är praktiskt att använda komplex notation då man beskriver retarderade potentialer.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Den retarderade potentialen kan endast uttryckas med hjälp av den magnetiska vektorpotentialen, A .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

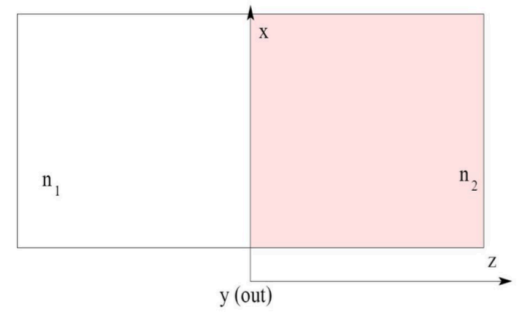
g) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

	ja	?	nej
Den skalära potentialen beskriver elektriska fält som härrör sig från laddningsseparation.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Den skalära potentialen kan även beskriva elektriska fält som härrör sig från induktion.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
En spoles självinduktans beror på hur stor strömmen är i spolen.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Det länkade flödet används då man beräknar den ömsesidiga induktansen.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Det länkade flödet används då man beräknar självinduktansen.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Det magnetiska flödet genom en slinga kan tecknas i termer av den magnetiska vektorpotentialen.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

4

Problemlösningsdel (8 poäng)

Betrakta gränssytan mellan två områden med olika linjära material, gränssytan befinner sig vid $z = 0$, se figuren. De två områdena har materialparametrarna, ϵ_1, μ_1 respektive ϵ_2, μ_2 , vilket markeras med respektive brytningsindex, n_1 och n_2 i figuren. En plan elektromagnetisk våg, med vågtal k_I , propagerar från område 1 in mot gränssytan.



a) Antag att den magnetiska vektorn hos den infallande vågen är parallell med gränssytan och rita en figur med de två fältvektorerna \mathbf{E} , och \mathbf{H} samt riktningvektorn \mathbf{k} för den infallande, reflekterade och transmitterade vågen.

b) Skriv upp allmänna uttryck för både de elektriska och magnetiska fälten för den infallande, reflekterade och transmitterade vågen. Uttryck även de magnetiska fälten i termer av det elektriska fältet.

c) Beräkna reflektions- och transmissionskoefficienterna i gränssytan med hjälp av uttrycken i uppgift b och randvillkoren i gränssytan.

Förståelsedel (4 poäng)

d) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

- Kontinuitetsekvationen kan härledas från Maxwells fyra postulat. ja ? nej
- Utöver Maxwells fyra postulat är kontinuitetsekvationen nödvändig för en fullständig beskrivning av den elektromagnetiska teorin. ja ? nej
- Utöver Maxwells fyra postulat är definitionen av elektrisk och magnetisk potential nödvändig för en fullständig beskrivning av den elektromagnetiska teorin. ja ? nej
- Utöver Maxwells fyra postulat är definitionen av konstitutiva relationer nödvändig för en fullständig beskrivning av den elektromagnetiska teorin. ja ? nej
- Den grundläggande fysiken i uppgiften ovan bygger **endast** på att rotationen av E-fältet är lika med minus tidsderivatan av B-fältet. ja ? nej
- Den grundläggande fysiken i problemlösningsdelen ovan bygger **endast** på att rotationen av B-fältet är lika med den fria strömtätheten gånger permeabiliteten. ja ? nej

e) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

- $j\omega$ -metoden för fältberäkningar fungerar bara för harmoniskt varierande fält. ja ? nej
- Tidsderivata i Maxwells ekvationer övergår i $j\omega$ -metoden till multiplikation med $j\omega^2$. ja ? nej
- Ett komplext uttryck på E-fältet kan inte innehålla ett tidsberoende. ja ? nej
- För att konvertera från komplext till reellt fält multiplicerar man med $e^{j\omega t}$ och tar realdelen. ja ? nej
- Komplexa fält kan användas för att beskriva plana vågor. ja ? nej
- Vektorfält kan uttryckas på komplex form men inte skalära fält. ja ? nej

f) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

- Vinkeln vid vilken totalreflektion sker härleds från Snells brytningslag. ja ? nej
- Totalreflektion sker vid Brewstervinkeln. ja ? nej
- Vid beräkning med Snells lag måste man ta hänsyn till vågens polarisering. ja ? nej
- Totalreflektion är möjlig då vågen går från ett optiskt tätare till ett optiskt tunnare medium. ja ? nej
- Funktionen hos en optisk fiber kan förklaras med fenomenet totalreflektion. ja ? nej
- Ytvågen som uppstår vid totalreflektion uppfyller inte vågekvationen. ja ? nej

g) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

- Vågimpedansen hos luft är $Z=377\Omega$. ja ? nej
- I en metall ligger H-fältet 90° före E-fältet. ja ? nej
- Absolutbeloppet av vågimpedansen för en *icke-ferromagnetisk* god ledare är lägre än för luft. ja ? nej
- Vågimpedansen kan vara ett komplext tal. ja ? nej
- Vågimpedansen relaterar E-fältet till J-fältet. ja ? nej
- Vågimpedansen *inte* frekvensberoende. ja ? nej

Problemlösningsdel (8 poäng)

Fjärrfältet från en antenn beskrivs av uttrycket,

$$E(r) = \begin{cases} E_0 \sqrt{(\sin \theta \cos^2 \varphi)} \frac{e^{-jkr}}{r} \hat{\varphi}, & 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \leq \varphi \leq 2\pi \\ 0, & \text{annars} \end{cases}$$

a) Skissa strålningsdiagrammet i de två planen med $\theta = \pi/2$ och $\varphi = 0$. Ange exakta värden på strålningsdiagrammet i följande punkter,

För planet $\theta = \pi/2$: $\varphi = \pi/4$ och $\varphi = \pi/2$

För planet $\varphi = 0$: $\theta = 0$, $\theta = \pi/6$, $\theta = \pi/3$, $\theta = \pi/2$.

b) Beräkna antennens direktivitet.

c) Är en matningseffekt $P = 4,712$ kW tillräckligt för att uppnå fältstyrkan $|E| = 1$ V/m i antennens huvudlob, (riktningen med högst strålningseffekt enligt strålningsdiagrammet) på ett avstånd av 1 km från antennen. Antag även att antennens effektivitet är 60%. (Effektiviteten anger hur stor del av antennens matningseffekt som omvandlas till strålningseffekt.) Om effektiviteten räcker för detta, hur stor måste antenneffektiviteten vara för att fältstyrkan ska bli $|E| = 1$ V/m?

d) Beräkna antennförstärkningen. Utgå från resultatet i uppgift b.

Ledning: $\int \sin^2 ax \, dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4a} \sin 2ax$ och $\int \cos^2 ax \, dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4a} \sin 2ax$

Förståelsedel (4 poäng)

e) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

	ja	?	nej
För att fullständigt beskriva den grundläggande fysiken i uppgiften ovan räcker två av Maxwells postulat.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
För att fullständigt beskriva den grundläggande fysiken i uppgiften ovan behövs alla fyra Maxwells postulat.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Den grundläggande fysiken i uppgiften ovan bygger bland annat på att rotationen av H-fältet är den fria strömtätheten plus tidsderivatan av förskjutningsfältet.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Den grundläggande fysiken i uppgiften ovan bygger bland annat på att E-fältet är rotationsfritt.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Den grundläggande fysiken i uppgiften ovan bygger bland annat på att rotationen av E-fältet är lika med minus tidsderivatan av B-fältet.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Den grundläggande fysiken i uppgiften ovan bygger bland annat på att B-fältet är källfritt.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

f) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

	ja	?	nej
En Hertzdipol är <i>mycket kortare</i> än en våglängd.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Strömmen i en Hertzdipol kan i varje ögonblick variera längs antennen.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Strömmen i en Hertzdipol kan vara tidsberoende.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Hertzdipoler kan användas som byggstenar, vars fältbidrag integreras, då man utför beräkningar på andra mer komplexa antenner eller antensystem.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
En kvartsvågsantenn är ekvivalent med en halv vågsantenn över ett ledande plan.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Strömmen antas vara noll i änden av en kvartsvågsantenn.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

g) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

	ja	?	nej
En monokromatisk våg innehåller flera frekvenskomponenter.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
För en god ledare är $\sigma/\omega\epsilon \ll 1$.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
I en god ledare är $\alpha \approx \beta$.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
För en god isolator är vågimpedansen $Z \approx \sqrt{j\omega\mu/\sigma}$.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
För höga frekvenser är inträngningsdjupet större än för låga frekvenser.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
En mycket god ledare har ett stort värde på σ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

h) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

	ja	?	nej
För att Snells lag ska gälla måste permeabiliteten vara samma på båda sidor om gränssytan.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Snells reflektionslag säger att infallande och reflekterande fält har samma vinkel mot gränssytans ytnormal.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Snells brytningslag säger att infallande och transmitterat fält har samma vinkel mot gränssytans ytnormal.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Snells brytningslag härleds genom att betrakta randvillkoren för normalkomponenterna av E- och H-fälten i gränssytan.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Enligt Snells lag kan reflektionsvinkeln i vissa fall vara skild från infallsvinkeln.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Totalreflektion uppstår då fältet går från ett optiskt tunnare till ett optiskt tätare medium.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Solution of final Examination.

Using Gauss's law.

$$(a) \quad \oint_{\text{cov}} \vec{E} \cdot d\vec{a} = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad Q = \iiint_V \rho \, dv$$

$$\cancel{2A} \quad E \cdot A = \frac{\sigma \cdot A}{\epsilon_0} = \frac{QA}{(\epsilon_0 \pi R^2)}$$

$$\Rightarrow \vec{E} = \frac{Q}{\pi \epsilon_0 R^2} (-\hat{z})$$

$$(b) \quad V = \int_0^d \vec{E} \cdot d\vec{z} = -\frac{Q}{\pi \epsilon_0 R^2} \cdot d$$

$$(c) \quad \vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$$

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0}$$

$$\vec{S} = \vec{E} \times \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} \right) = \frac{1}{\mu_0} (\vec{E} \times \vec{B})$$

$$\vec{E} = -\frac{Q}{\pi \epsilon_0 R_0^2} \hat{z}$$

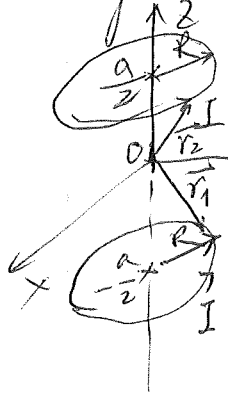
$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I r}{2\pi R_0^2} \hat{\varphi}$$

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \frac{Q}{\pi \epsilon_0 R_0^2} \times \frac{\mu_0 I r}{2\pi R_0^2} (-\hat{z}) \times \hat{\varphi}$$

$$= \frac{Q I r}{2\pi^2 \epsilon_0 R_0^4} (-\hat{r})$$

Solution of Helmholtz dipole:

By Using Cylindrical coordinate system:



$$\vec{r}_1 = (R \cos \varphi, R \sin \varphi, -\frac{a}{2})$$

$$\vec{r}_2 = (R \cos \varphi, R \sin \varphi, \frac{a}{2})$$

$$\vec{r} = (0, 0, z)$$

$$\vec{j} dV = I \cdot d\vec{s}, \quad d\vec{s} = d\varphi (-\sin \varphi, \cos \varphi, 0) ds$$

$$ds = R d\varphi$$

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}_1) \times (\vec{r} - \vec{r}_1) dV}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^3}$$

$$\vec{B}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}_2) \times (\vec{r} - \vec{r}_2) dV}{|\vec{r} - \vec{r}_2|^3}$$

$$\vec{r} = r \hat{z}$$

$$d\vec{s}_1 \times (\vec{r} - \vec{r}_1) = -d\vec{s}_1 \times \vec{r}_1$$

$$d\vec{s}_2 \times (\vec{r} - \vec{r}_2) = -d\vec{s}_2 \times \vec{r}_2$$

$$|\vec{r} - \vec{r}_1| = \sqrt{R^2 + (z - \frac{a}{2})^2}$$

$$|\vec{r} - \vec{r}_2| = \sqrt{R^2 + (z + \frac{a}{2})^2}$$

$$B_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\vec{s}_1 \times (\vec{r} - \vec{r}_1)}{(R^2 + (z - \frac{a}{2})^2)^{3/2}} \hat{z} + \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\vec{s}_2 \times (\vec{r} - \vec{r}_2)}{(R^2 + (z + \frac{a}{2})^2)^{3/2}} \hat{z}$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{-d\vec{s}_1 \times \vec{r}_1}{(R^2 + (z - \frac{a}{2})^2)^{3/2}} \hat{z} + \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{-d\vec{s}_2 \times \vec{r}_2}{(R^2 + (z + \frac{a}{2})^2)^{3/2}} \hat{z}$$

$$-d\vec{s}_1 \times \vec{r}_1 \quad -d\vec{s}_2 \times \vec{r}_2 = d\vec{s}$$

$$-d\vec{s}_1 \times \vec{r}_1 = \left[-Rd\varphi \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} R\cos\varphi \\ R\sin\varphi \\ -\frac{a}{2} \end{pmatrix} \right] \hat{z}$$

$$= R^2 d\varphi \hat{z}$$

$$-d\vec{s}_2 \times \vec{r}_2 = \left[-Rd\varphi \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} R\cos\varphi \\ R\sin\varphi \\ -\frac{a}{2} \end{pmatrix} \right] \hat{z}$$

$$= R^2 d\varphi \hat{z}$$

$$B_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi} R^2 \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(R^2 + (z - \frac{a}{2})^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$+ \frac{\mu_0 I}{4\pi} R^2 \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(R^2 + (z + \frac{a}{2})^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi} R^2 2\pi \left[(R^2 + (z - \frac{a}{2})^2)^{-\frac{3}{2}} + (R^2 + (z + \frac{a}{2})^2)^{-\frac{3}{2}} \right]$$

$$b) \frac{\partial B_z(z)}{\partial z} =$$

$$\left(-\frac{3}{2} \right) \left\{ \left[R^2 + (z - \frac{a}{2})^2 \right]^{-\frac{5}{2}} \left(2(z - \frac{a}{2}) \right) + \left[R^2 + (z + \frac{a}{2})^2 \right]^{-\frac{5}{2}} \left(2(z + \frac{a}{2}) \right) \right\}$$

$$= -3 \left(z - \frac{a}{2} \right) \left[R^2 + (z - \frac{a}{2})^2 \right]^{-\frac{5}{2}} - 3 \left(z + \frac{a}{2} \right) \left[R^2 + (z + \frac{a}{2})^2 \right]^{-\frac{5}{2}}$$

$$\frac{\partial^2 B_z(z)}{\partial z^2} = \frac{15 \left(z - \frac{a}{2} \right)^2 - 3 \left[R^2 + (z - \frac{a}{2})^2 \right]}{\left[R^2 + (z - \frac{a}{2})^2 \right]^{\frac{7}{2}}}$$

$$+ \frac{15 \left(z + \frac{a}{2} \right)^2 - 3 \left[R^2 + (z + \frac{a}{2})^2 \right]}{\left[R^2 + (z + \frac{a}{2})^2 \right]^{\frac{7}{2}}}$$

$$\left. \frac{\partial^2 B_z(z)}{\partial z^2} \right|_{z=0} = \frac{15\frac{a^2}{4} - 3\left[R^2 + \frac{a^2}{4}\right]}{\left[R^2 + \frac{a^2}{4}\right]^{\frac{7}{2}}} + \frac{15\frac{a^2}{4} - 3\left[R^2 + \frac{a^2}{4}\right]}{\left[R^2 + \frac{a^2}{4}\right]^{\frac{7}{2}}}$$

$$B_z(z) = B(0) + \left. \frac{\partial B}{\partial z} \right|_{z=0} z + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 B}{\partial z^2} \right|_{z=0} z^2$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi} R^2 2\pi \left[\left(R^2 + \frac{a^2}{4}\right)^{-\frac{3}{2}} + \left(R^2 + \frac{a^2}{4}\right)^{-\frac{3}{2}} \right]$$

$$= \mu_0 I R^2 \left(R^2 + \frac{a^2}{4}\right)^{-\frac{3}{2}} - \frac{\mu_0 I R^2}{2} \cdot \frac{3(R^2 - a^2)}{\left[R^2 + \frac{a^2}{4}\right]^{\frac{7}{2}}} z^2$$

3] For Infinite Line 1

$$V_1(x, y=0, z) = -\frac{Q_1}{2\pi\epsilon l} \ln\left(\frac{x}{r_0}\right)$$

$$V_2 = -\frac{Q_2}{2\pi\epsilon l} \ln\left(\frac{d-x}{r_0}\right)$$

$$V_{\text{total}} = V_1 + V_2$$

$$= -\frac{Q_1}{2\pi\epsilon l} \ln\left(\frac{x}{r_0}\right) - \frac{Q_2}{2\pi\epsilon l} \ln\left(\frac{d-x}{r_0}\right)$$

$$Q_1 = Q, \quad Q_2 = -Q$$

$$V_{\text{total}} = -\frac{Q}{2\pi\epsilon l} \ln\left(\frac{x}{r_0}\right) + \frac{Q}{2\pi\epsilon l} \ln\left(\frac{d-x}{r_0}\right)$$

$$= \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 l} \left[\ln\left(\frac{d-x}{r_0}\right) - \ln\left(\frac{x}{r_0}\right) \right]$$

$$= \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 l} \ln\left(\frac{d-x}{x} \cdot \frac{r_0}{r_0}\right)$$

$$= \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 l} \ln\left(\frac{d-x}{x}\right)$$

$$\vec{E} = -\nabla V$$

$$= \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 l} \left[\frac{2x-d}{x(d-x)} \right]$$

$$b) \quad \vec{H}_1 = -\frac{I}{2\pi|x|} \hat{y} \quad \text{for } r_0 \leq x \leq d-r_0$$

$$\vec{H}_2 = -\frac{I}{2\pi|d-x|} \hat{y} \quad \text{for } 0 \leq x \leq d-r_0$$

$$H_{\text{total}} = -\frac{I}{2\pi x} \hat{y} - \frac{I}{2\pi(d-x)} \hat{y}$$

$$= \frac{I}{2\pi} \left[\frac{1}{x-d} - \frac{1}{x} \right] \hat{y}$$

c) . The Poynting vector.

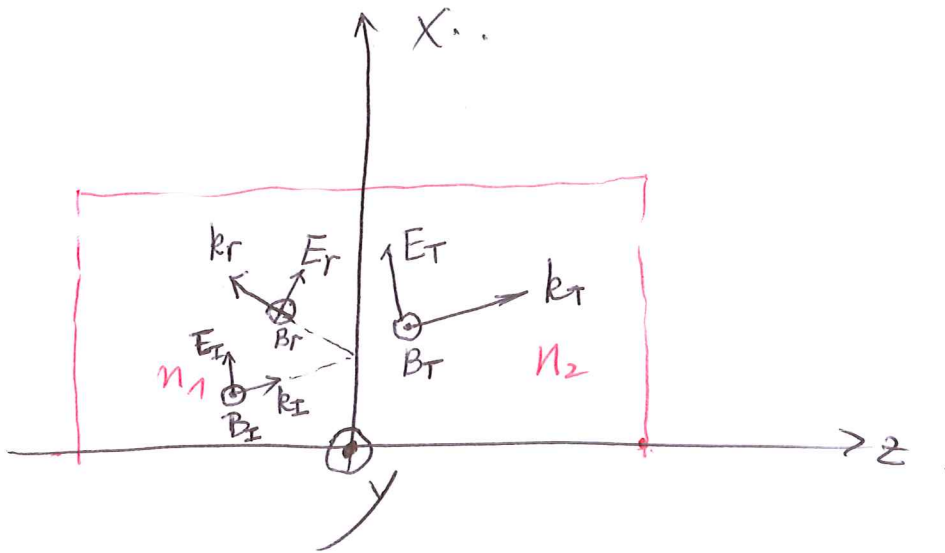
$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} = \frac{QI}{4\pi^2 \epsilon_0 l} \frac{d}{(x-d)x} \cdot \frac{(2x-d)}{x(d-x)} \begin{pmatrix} \hat{x} \\ x\hat{y} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{QI}{4\pi^2 \epsilon_0 l} \frac{(2x-d)d}{x^2(x-d)^2} (-\hat{x} \times \hat{y})$$

$$= \frac{QI}{4\pi^2 \epsilon_0 l} \frac{(2x-d)d}{x^2(x-d)^2} (-\hat{z})$$

4

a)



$$b) \quad \vec{E}_I = E_{0I} e^{j(\vec{k}_I \cdot \vec{r} - \omega t)}, \quad \vec{B}_I = \frac{n_1}{c} (\hat{k}_I \times \vec{E}_{0I}) e^{j(\vec{k}_I \cdot \vec{r} - \omega t)}$$

$$\vec{E}_R = E_{0R} e^{j(\vec{k}_R \cdot \vec{r} - \omega t)}, \quad \vec{B}_R = \frac{n_1}{c} (\vec{k}_R \times \vec{E}_{0R}) e^{j(\vec{k}_R \cdot \vec{r} - \omega t)}$$

$$\vec{E}_T = E_{0T} e^{j(\vec{k}_T \cdot \vec{r} - \omega t)}, \quad \vec{B}_T = \frac{n_2}{c} (\vec{k}_T \times \vec{E}_{0T}) e^{j(\vec{k}_T \cdot \vec{r} - \omega t)}$$

c) Need two independent conditions to solve for the ratios.

$$\epsilon_r = \frac{E_{0R}}{E_{0I}} \quad \epsilon_t = \frac{E_{0T}}{E_{0I}}$$

Using the Maxwell Equation.

for linear material

$$\epsilon_1 E_1^\perp = \epsilon_2 E_2^\perp \text{ which here gives.}$$

$$\epsilon_1 (-E_{0I} + E_{0R}) \sin \theta_I = -\epsilon_2 E_{0T} \sin \theta_T$$

we can write:

$$1 - \epsilon_r = \frac{n_1 \epsilon_2}{n_2 \epsilon_1} \epsilon_t$$

Applying Maxwell's equation to the boundary
gives: $E_1'' = E_2''$.

$$(E_{oI} + E_{or}) \cos \theta_I = E_{oT} \cos \theta_T$$

$$1 + E_r = \frac{\cos \theta_2}{\cos \theta_1} E_T.$$

$$E_T = \frac{2n_2 \cos \theta_1 E_1}{n_2 \cos \theta_2 E_1 + n_1 \cos \theta_1 E_2}$$

$$E_r = \frac{n_2 \cos \theta_2 E_1 - n_1 \cos \theta_1 E_2}{n_2 \cos \theta_2 E_1 + n_1 \cos \theta_1 E_2}.$$

Problem 5

a). The radiation Pattern is define as.

$$|C(\theta, \varphi)| = \left| \frac{E(\theta, \varphi)}{E_{\max}} \right|$$

Since. $E_{\max} = E_0 e^{-\frac{ikr}{r}}$,

$$|C(\theta, \varphi)| = \sqrt{\sin\theta \cos^2\varphi}$$

Plane $\theta = \frac{\pi}{2}$.

φ	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
$ C $	1	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0

Plane $\varphi = 0$

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$ C $	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1.

b). The Directivity.

$$D_t = \frac{4\pi}{2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\pi} |C(\theta, \varphi)|^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi}$$

Denominator:

$$\begin{aligned} & 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \varphi d\varphi \int_0^{\pi} \sin^2 \theta d\theta \\ &= 2 \left[\frac{1}{2} \varphi + \frac{1}{4} \sin 2\varphi \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{1}{2} \theta - \frac{1}{4} \sin 2\theta \right]_0^{\pi} \\ &= \frac{\pi^2}{4} \end{aligned}$$

$$D_t = \frac{16}{\pi} = 10 \log |D_t| = 7.07 \text{ dB}$$

c). The relationship between power density and electric field.

$$S = \frac{|E|^2}{2Z_f}$$

$$S_{\max} = \frac{|E_{\max}|^2}{2Z_f}$$

$$D_t = \frac{S_{\max}}{S_I} = \frac{4\pi r^2 S_{\max}}{P_t} \Rightarrow S_{\max} = \frac{D_t P_t}{4\pi r^2}$$

$$\text{With } |E_{\max}| = 1 \text{ V/m}$$

$$P_t = \frac{2\pi r^2 |E_{\max}|^2}{Z_f \cdot D_t} = 3.27 \text{ kW}$$

$$P_{t0} = \frac{P_t}{\eta} = 5.45 \text{ kW}$$

$$\textcircled{b} \quad \eta = \frac{P_t}{4.712 \text{ kW}} = 69.45\%$$

$$\textcircled{d} \quad G_t = \eta D_t = 3.54 \triangleq 5.49 \text{ dB}$$