

Tentamen i Elektromagnetisk fältteori för F2.

EEF031 2011-12-15 kl. 14.00-18.00

Tillåtna hjälpmedel:	BETA, Physics Handbook, Formelsamling i Elektromagnetisk fältteori, Valfri kalkylator men inga egna anteckningar utöver egna formler på sista bladet i formelsamlingen i Elektromagnetisk fältteori
Förfrågningar:	Aidin Razavi, 0739-138 519, 031-772 4831
Lösningar:	anslås på kursens hemsida
Resultatet:	anslås på kursens hemsida
Granskning:	Sker på plats och tid enligt resultatlistan
Kom ihåg	Poängavdrag görs för otydliga figurer, utelämnade referensriktningar, dimensionsfel och utelämnade motiveringar.

OBS!

Resultat från **årets** dugga får tillgodoräknas på elektrostatik- (tal 1) respektive magnetostatiktalet (tal 2). Bästa resultatet från duggan eller tentan räknas. Poäng på teoridelen respektive problemlösningsdelen räknas separat. Bonuspoäng från **årets** omgång av webb-frågorna får också tillgodoräknas till tentaresultatet.

Svaren på förståelsedelen skall ges på tesen som skall lämnas in.

Förståelsefrågorna besvaras genom att markera en av rutorna efter varje påstående till höger. En och endast en ruta på varje rad skall markeras.

De tre svarsalternativen (från vänster till höger är) Ja, Vet ej och Nej.

Riktigt svar ger +0,2 poäng oriktigt svar ger -0,2p. Vet ej är neutralt och ger noll poäng. Förståelseuppgifterna ger maximalt 1 poäng och lägst -1 poäng och man kan därför få 1poäng även med ett vet ej svar.

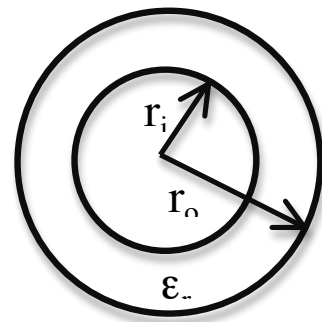
Anonym kod:

(Var vänlig ange den email-adress som används för inlämningsuppgifterna bland den dolda personinformationen på omslaget)

1 (Elektrostatik)

Problemlösningsdel (8 poäng)

a) En kondensator består av två koaxiala metallcylindrar med radierna $r_i=5\text{mm}$ respektive $r_o=7\text{mm}$, se figuren. Mellan cylindrarna finns ett dielektriskt material med en relativ permittivitet som varierar med radien $\epsilon_r(r) = 2 + \frac{4}{r}$, där r mäts i millimeter. Beräkna kapacitansen per längdenhet hos kondensatorn.



Förståelsedel (4 poäng)

b) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

	ja	?	nej
För att fullständigt beskriva den grundläggande fysiken i uppgiften ovan räcker två av Maxwells postulat.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
För att fullständigt beskriva den grundläggande fysiken i uppgiften ovan behövs alla fyra Maxwells postulat.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Den grundläggande fysiken i problemlösningsdelen ovan bygger bland annat på Gauss lag.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Den grundläggande fysiken i problemlösningsdelen ovan bygger bland annat på att B-fältet är källfritt.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Den grundläggande fysiken i problemlösningsdelen ovan bygger bland annat på att E-fältet är källfritt.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Den grundläggande fysiken i problemlösningsdelen ovan bygger bland annat på att rotationen av B-fältet är lika med den fria strömtätheten gånger permeabiliteten.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

c) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

	ja	?	nej
En elektrisk potential kan definieras tack vare att E-fältet är rotationsfritt.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Den elektriska potentialen har enheten V/m.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Den elektriska potentialen kan definieras som $E = -\nabla V$.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Den elektriska potentialen kan definieras som $E = \nabla V$.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Om vi använder $E = -\nabla V$ som definition av potentialen betyder det att om man rör sig i riktning mot E-fältslinjerna så kommer potentialen att öka.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Den elektrostatiska potentialen är en vektorstorhet.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

d) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

	ja	?	nej
P-fältet spelar ungefär samma roll i elektrostatiken som M-fältet i magnetostatiken.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
D-fältet spelar ungefär samma roll i elektrostatiken som H-fältet i magnetostatiken.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Potentialen V spelar ungefär samma roll i elektrostatiken som A-fältet i magnetostatiken.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Källan till förskjutningsfältet, \mathbf{D} , är de fria laddningarna plus polarisationsladdningarna.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Dielektriska egenskaper modelleras med elektriska dipoler.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Summan av alla polarisationsladdningar och ytpolarisationsladdningar i ett oladdat objekt kan vara skild från noll.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

e) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

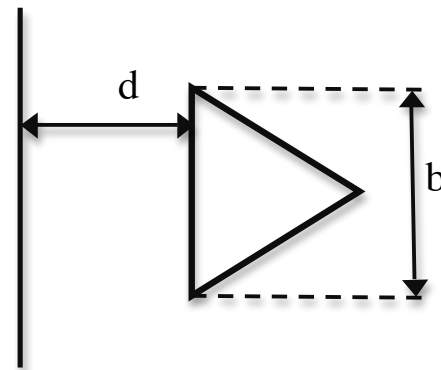
	ja	?	nej
I elektrostatiken är E-fältets tangentialkomponent kontinuerlig i gränsen mellan två material med olika permittivitet.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
I elektrostatiken är E-fältets normalkomponent kontinuerlig i gränsen mellan två material med olika permittivitet.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
I elektrostatiken är D-fältets tangentialkomponent kontinuerlig i gränsen mellan två material med olika permittivitet.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
I elektrostatiken är D-fältets normalkomponent kontinuerlig i gränsen mellan två material med olika permittivitet.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Randvillkoret för E-fältets tangentialkomponent härleds utifrån att E-fältet är konservativt.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Randvillkoret för E-fältets normalkomponent härleds utifrån att E-fältet är konservativt.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

2 (Magnetostatik)

Problemlösningsdel (8 poäng)

a) Bestäm den ömsesidiga induktansen mellan en mycket lång och rak ledare och en liksidig triangulär slinga enligt figuren.

Triangeln har sidan b , avståndet mellan ledaren och triangeln $d = \frac{\sqrt{3}}{2}b$.



Förståelsedel (4 poäng)

b) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

I uppgiften frågas efter ömsesidiga induktansen. I allmänhet är den lika med självinduktansen förvar och en av slingorna som ingår i systemet.

För att fullständigt beskriva den grundläggande fysiken i uppgiften ovan behövs endast ett av Maxwells postulat.

Den grundläggande fysiken i problemlösningsdelen ovan bygger **endast** på Gauss lag.

Den grundläggande fysiken i problemlösningsdelen ovan bygger **endast** på att B-fältet är källfritt.

Den grundläggande fysiken i problemlösningsdelen ovan bygger **endast** på att E-fältet är källfritt.

Den grundläggande fysiken i problemlösningsdelen ovan bygger **endast** på att rotationen av B-fältet är lika med den fria strömtätheten gånger permeabiliteten.

ja ? nej

c) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

Vid härledningen av Biot-Savarts lag kan man utgå från den magnetiska vektorpotentialen och dess allmänna lösning till Poissons ekvation.

Man kan teckna Biot-Savarts lag som en volymsintegral.

Man kan teckna Biot-Savarts lag för en ytström.

Man kan teckna Biot-Savarts lag för en strömförande tråd

Biot-Savarts lag kan endast användas för fältberäkning om strömmen beskriver en sluten slinga.

Amperes lag kan alltid användas istället för Biot-Savarts lag vid fältberäkningar.

ja ? nej

d) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

Lorentzkraften beror både på B- och E-fältet.

Laddningar i rörelse som *endast* utsätts för ett B-fält *kan* påverkas av en kraft.

Laddningar som rör sig *parallellt* med B-fältslinjerna utsätts för en kraft.

Laddningar i rörelse som *endast* utsätts för ett E-fält påverkas av en kraft.

Laddningar i *vila* som *endast* utsätts för ett B-fält *kan* påverkas av en kraft.

I ett koordinatsystem som följer med en laddning som rör sig vinkelrätt mot B-fältslinjerna kommer $\mathbf{u} \times \mathbf{B}$ att bli noll och därmed påverkas inte laddningen av någon kraft.

ja ? nej

e) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

Kontinuitetsekvationen för stationär ström följer om man tar divergensen av Amperes lag.

$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$ om vi har tidsvarierande laddningsfördelningar.

Från $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$ kan Kirchoffs strömlag härledas.

Från $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$ kan Kirchoffs spänningslag härledas.

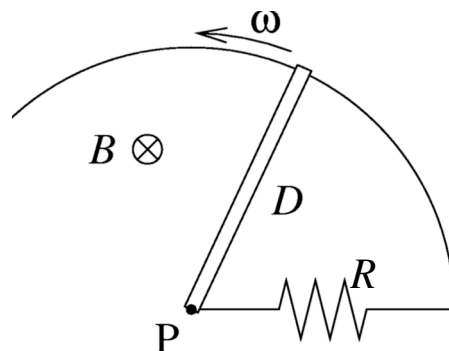
$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$ är en konsekvens av att laddningen är bevarad.

Strömtäthetsfältet har enheten A/m^2 .

ja ? nej

Problemlösningsdel (8 poäng)

a) En ledande stång med längd D roterar med vinkelfrekvens ω runt en punkt P . Den andra änden glider i kontakt över en fix cirkulär ledare. (Observera att endast en del av den cirkulära ledaren visas i figuren.) Mellan punkt P och den cirkulära ledaren sitter också en resistor, R , enligt bilden. Således formar stången, den cirkulära ledaren och resistorn en sluten slinga. Antag att resistansen hos stången och den cirkulära slingan är försumbar. Stången roterar i ett konstant magnetiskt fält \mathbf{B} som existerar i hela planet och är vinkelrätt mot papperets plan, se figuren. Beräkna storlek och riktning på den inducerade strömmen.



Förståelsedel (4 poäng)

b) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

Ovanstående problemuppgift kan lösas genom att betrakta den rörliga ledaren och studera de krafter som uppstår och kan uttryckas med hjälp av $\mathbf{u} \times \mathbf{B}$.

Ovanstående problemuppgift kan lösas genom att betrakta termen $-d\phi/dt$ för kretsen och dess relation till den inducerade spänningen.

Den grundläggande fysiken i uppgiften ovan bygger **bland annat** på att rotationen av H-fältet är den fria strömtätheten plus tidsderivatan av förskjutningsfältet.

Den grundläggande fysiken i uppgiften ovan bygger **bland annat** på att B-fältet är konservativt.

Den grundläggande fysiken i uppgiften ovan bygger **bland annat** på att rotationen av E-fältet är lika med minus tidsderivatan av B-fältet.

Den grundläggande fysiken i uppgiften ovan bygger **bland annat** på att B-fältet är källfritt.

ja ? nej

c) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

Gauss lag modifieras när man går från elektrostatik till elektrodynamik.

Kontinuitetsekvationen innehåller samma nollskilda termer i statiken som i dynamiken.

Faradays induktionslag uttrycker att ett elektriskt fält kan genereras utan laddningsseparation.

Lenz lag följer av Faradays lag.

Lenz lag säger att en inducerad spänning motverkar förändringen i det pålagda magnetfältet.

Man kan inducera spänning i en ledare trots att $-dB/dt$ termen i Faradays lag är noll.

ja ? nej

d) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

$j\omega$ -metoden för fältberäkningar fungerar bara för fält med godtyckligt tidsberoende.

Tidsderivata i Maxwells ekvationer övergår i komplexa metoden till multiplikation med $j\omega$

Enda sättet att definiera tidsberoendet för komplexa fält är $e^{-i\omega t}$.

Om β är direkt proportionellt mot ω är materialet dispersionsfritt.

Rent och perfekt vakuum är dispersivt.

För att ett material ska vara dispersionsfritt måste grupphastigheten vara skild från fashastigheten.

ja ? nej

e) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

Den retarderade potentialen uppkommer som en lösning till vågekvationen.

Den retarderade potentialen beskriver hur ljushastigheten avtar med avståndet från källan.

Vågekvationen för vektorpotentialen \mathbf{A} kan härledas från Maxwells ekvationer.

I elektromagnetismen väljer man oftast $\nabla \cdot \mathbf{A}$ till samma som i magnetostatiken.

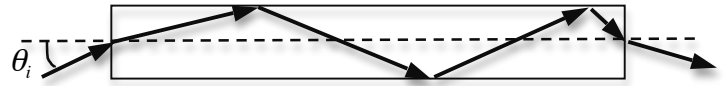
Man får välja $\nabla \cdot \mathbf{A}$ som man vill.

Den magnetiska vektorpotentialen relateras till magnetfältet som $\nabla \cdot \mathbf{B} = \mathbf{A}$

ja ? nej

Problemlösningsdel (8 poäng)

a) Figuren visar en optisk fiber och en illustration av hur en optisk stråle propagerar genom fibern. Bestäm minsta möjliga ϵ_r hos fibern som gör att oavsett



infallsvinkeln, θ_i hos en stråle som tränger in i fibern från ena änden, så innesluts strålen helt och hållet inuti fibern med hjälp av totalreflektion ända tills den tränger ut ur fibern i andra änden.

Förståelsedel (4 poäng)

b) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

Elektromagnetisk fältteori tillhör den klassiska fysiken.

ja ? nej

Utöver Maxwells fyra postulat är kontinuitetsekvationen nödvändig för en fullständig beskrivning av den elektromagnetiska teorin.

Den grundläggande fysiken i uppgiften ovan bygger **endast** på att rotationen av H-fältet är den fria strömtätheten plus tidsderivatan av förskjutningsfältet.

Den grundläggande fysiken i uppgiften ovan bygger **endast** på att E-fältet är källfritt.

Den grundläggande fysiken i uppgiften ovan bygger **endast** på att rotationen av E-fältet är lika med minus tidsderivatan av B-fältet.

Den grundläggande fysiken i uppgiften ovan bygger **endast** på att B-fältet är källfritt.

c) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

En evanescent våg uppfyller vågekvationen.

ja ? nej

Totalreflektion ger upphov till evanescenta vågor.

En cirkulärpolariserad plan våg träffar en plan gränssyta till ett förlustfritt dielektrikum under Brewstervinkeln. Reflektionen blir då linjärpolariserad.

En cirkulärpolariserad plan våg träffar en plan gränssyta till ett förlustfritt dielektrikum under Brewstervinkeln. Reflektionen blir då cirkulärpolariserad.

En cirkulärpolariserad plan våg träffar en plan gränssyta till ett förlustfritt dielektrikum under Brewstervinkeln. Reflektionen blir då elliptiskt polariserad.

Brewstervinkeln definieras både för vågor med polarisering parallellt och vinkelrätt mot infallsplanet.

d) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

Fresnels ekvationer härleds från Snells brytningslag.

ja ? nej

Totalreflektion sker vid Brewstervinkeln.

Vid beräkning med Snells lag måste man ta hänsyn till vågens polarisering.

Totalreflektion är möjlig då vågen går från ett optiskt tätare till ett optiskt tunnare medium.

Funktionen hos en optisk fiber kan förklaras med fenomenet totalreflektion.

Vinkeln vid vilken totalreflektion inträffar härleds från Fresnells ekvationer.

e) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

Transmissionskoefficienten för effekt är beloppet i kvadrat av transmissionskoefficienten för fält.

ja ? nej

Reflektionskoefficienten för effekt är beloppet i kvadrat av reflektionskoefficienten för fält.

Summan av transmissionskoefficienten och reflektionskoefficienten för effekt i en och samma gränssyta mellan två förlustfria material är ett.

Vid beräkning med Fresnells ekvationer måste man ta hänsyn till vågens polarisering.

Vinkeln vid vilken totalreflektion inträffar härleds från Fresnells ekvationer.

Funktionen hos en optisk fiber kan förklaras av att reflektion i fibern sker vid Brewstervinkeln.

Problemlösningsdel (8 poäng)

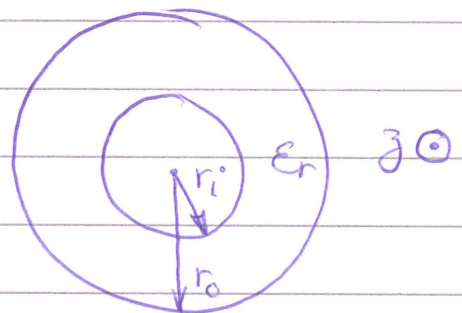
a) En sändarantenn utgörs av en Hertzdipol som sitter vertikalt monterad på höjden h_1 över marken och sänder vid frekvensen ω . Ta fram ett uttryck för E-fältet vid ett avstånd d från sändarantennen och på höjden h_2 över marken. Antag att marken kan modelleras som en perfekt ledare och att avståndet d är mycket stort i jämförelse med våglängden och höjderna h_1 och h_2 . (Var noga med hur man approximerar avståndet mellan källpunkt och fältpunkt i fältuttrycken.)

Förståelsedel (4 poäng)

b) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?	ja	?	nej
För att fullständigt beskriva den grundläggande fysiken i uppgiften ovan räcker två av Maxwells postulat.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
För att fullständigt beskriva den grundläggande fysiken i uppgiften ovan behövs alla fyra Maxwells postulat.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Den grundläggande fysiken i uppgiften ovan bygger bland annat på att rotationen av H-fältet är den fria strömtätheten plus tidsderivatan av förskjutningsfältet.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Den grundläggande fysiken i uppgiften ovan bygger bland annat på att E-fältet är källfritt.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Den grundläggande fysiken i uppgiften ovan bygger bland annat på att rotationen av E-fältet är lika med minus tidsderivatan av B-fältet.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Den grundläggande fysiken i uppgiften ovan bygger bland annat på att B-fältet är källfritt.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
c) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?	ja	?	nej
En halv vågsdipol har ett isotropt strålningsdiagram, dvs den strålar lika mycket effekt i alla riktningar.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
En bra sändarantenn bör ha så stor strålningsresistans som möjligt.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Antennen i en GPS mottagare bör ha så liten direktivitet som möjligt.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
En parabolantenn som används för att se satellit-TV är ett exempel på en antenn med mycket hög direktivitet.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Man kan använda två halv vågsdipoler monterade bredvid varandra för att öka direktiviteten hos sin antennordning jämfört med om man bara använder en enda halv vågsdipol.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Uttrycket för fjärr-fältet från en halv vågsdipolantenn som vi sett i kursen är exakt, dvs det krävs inga approximationer för att härleda uttrycket.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
d) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?	ja	?	nej
Poyntings teorem uttrycker energikonservering.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Poyntingvektorn kan vara tidsberoende.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Poyntingvektorn kan definieras med hjälp av komplexa B- och E-fält.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Poyntingvektorn har enheten W/m .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Definitionen av Poyntingvektorn kommer ur härledningen av energikonserveringsrelationen "Poyntings teorem".	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Poyntingvektorn kan definieras som tidsmedelvärde eller som momentanvärde.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
e) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?	ja	?	nej
En monokromatisk våg innehåller flera frekvenskomponenter.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
För en god ledare är $\sigma/\omega\epsilon \gg 1$.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
I en god ledare är $\alpha \approx \beta$.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
För en metall är vågimpedansen $Z \approx \sqrt{j\omega\mu/\sigma}$.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Inträngningsdjupet är mindre för höga frekvenser än för låga frekvenser.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Normalt gäller för dielektriska material med små förluster att $\alpha \approx \beta$.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

① A capacitor consists of two coaxial metallic cylindrical surfaces of radii 5mm and 7mm. The dielectric material between between the surfaces has a relative permittivity $\epsilon_r = 2 + \frac{4}{r}$, where r is measured in mm. Determine the capacitance per unit of length of the capacitor.

$$\left\{ \begin{array}{l} \epsilon_r = 2 + \frac{4}{r} \\ r_i = 5 \text{ mm} \\ r_o = 7 \text{ mm} \end{array} \right.$$



By symmetry we can see that E has only radial component E_r . By applying Gauss's law to cylindrical surface with the same axis as two conductors and length of l we can write:

$$Q = \oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s}$$

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \left(2 + \frac{4}{r}\right) \mathbf{E}, \quad \mathbf{E} = E_r \hat{r}$$

$$Q = \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{z=0}^l (\epsilon_0 \left(2 + \frac{4}{r}\right) E_r \hat{r}) \cdot (r d\phi dz \hat{r})$$

$$\Rightarrow Q = \epsilon_0 \left(2 + \frac{4}{r}\right) E_r \cdot 2\pi r l \Rightarrow E_r = \frac{Q}{4\pi l \epsilon_0 (r+2)}$$

$$V = - \int_{r=r_o}^{r=r_i} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \int_{r=r_o}^{r_i} \frac{Q}{4\pi l \epsilon_0 (r+2)} \hat{r} \cdot \hat{r} dr = \frac{Q}{4\pi l \epsilon_0} [\ln(r+2)]_{r=5}^7$$

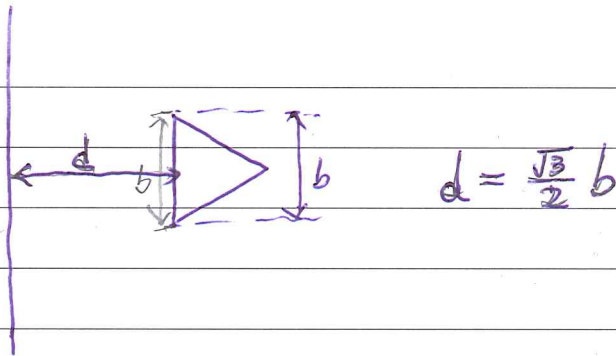
$$= \frac{Q}{4\pi l \epsilon_0} \ln \frac{9}{7}$$

$$\frac{C}{l} = \frac{Q/V}{V} = \frac{4\pi\epsilon_0}{\ln 9/7} \approx 0.443 \frac{nF}{m}$$





GÖTEBORGS UNIVERSITET



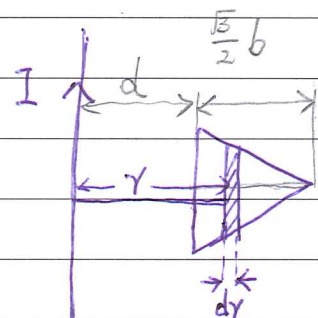
Problem: Determine the mutual inductance between a very long, straight wire and a conducting equilateral triangular loop.

Solution: Assume a current I in the long straight wire, ~~apply~~
~~the~~ ~~Ampère's~~ ~~circuital~~ it causes

$$\vec{B} = \hat{a}_\phi \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

$$\Lambda = \Phi = \int_{\text{triangle}} \vec{B} \cdot d\vec{s}$$

$$d\vec{s} = \hat{a}_\phi \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} b + d - r \right) dr$$



$$d\Phi = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} b + d - r \right) \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot dr$$

$$\Lambda = \int_{d - \frac{\sqrt{3}}{2} b}^d \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} b + d - r \right) dr$$

$$= \frac{\mu_0 I}{\pi \sqrt{3}} \int_{d - \frac{\sqrt{3}}{2} b}^d \left[\left(\frac{\sqrt{3}}{2} b + d \right) \frac{1}{r} - 1 \right] dr$$

$$= \frac{\mu_0 I}{\sqrt{3} \pi} \int_{\frac{\sqrt{3}}{2} b}^d \left(\sqrt{3} b \cdot \frac{1}{r} - 1 \right) dr$$



GÖTEBORGS UNIVERSITET

$$= \frac{\mu_0 I}{\sqrt{3} \pi} \left[\sqrt{3} b \ln \gamma - \gamma \right]_{\frac{\sqrt{3} b}{2}}^{\sqrt{3} b}$$

$$= \frac{\mu_0 I}{\sqrt{3} \pi} \left(\sqrt{3} b \ln \frac{\sqrt{3} b}{\frac{\sqrt{3} b}{2}} - \frac{\sqrt{3} b}{2} \right)$$

$$= \frac{\mu_0 I b}{\pi} \left(\ln 2 - \frac{1}{2} \right)$$

$$L = \frac{\Lambda}{I} = \frac{\mu_0 b}{\pi} \left(\ln 2 - \frac{1}{2} \right)$$

$$\approx 0.19 \frac{\mu_0 b}{\pi}$$

③

Låt vinkeln θ beteckna vinkeln mellan resistorbrädet och den roterande staven.

Arean hos det inre slutna området blir då $A = \pi D^2 \frac{\theta}{2\pi} = \frac{D^2 \theta}{2}$

Det magnetiska flödet genom ytan blir då $\Phi_B = \frac{1}{2} B D^2 \theta$

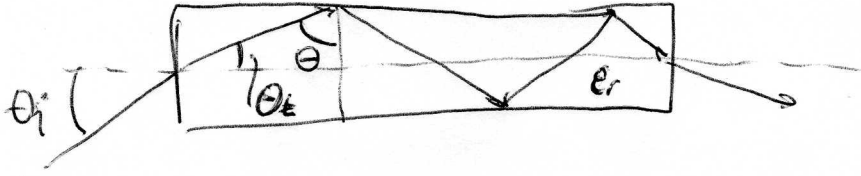
Beloppet hos den inducerade spänningen

$$|\mathcal{E}| = \frac{d\Phi_B}{dt} = \frac{1}{2} B D^2 \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2} B D^2 \omega$$

$$\text{Inducerad ström: } \underline{I} = \frac{|\mathcal{E}|}{R} = \frac{B D^2 \omega}{2R}$$

Enligt Lenz lag kommer strömen flyta motsols. På detta sätt motverkas flödesändringen då den roterande staven rör sig.

4



Vi kaner att $\theta = 90^\circ - \theta_t \geq \theta_c \quad \forall \theta_i$

Detta ger

$$\cos \theta_t = \sin \theta \geq \sin \theta_c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_r}} \quad \text{eller} \quad \cos^2 \theta_t \geq \frac{1}{\epsilon_r}$$

Men vi kan också uttrycka

$$\cos^2 \theta_t = 1 - \sin^2 \theta_t = \underbrace{\{\text{Snells lag}\}} = 1 - \frac{1}{\epsilon_r} \sin^2 \theta_i$$

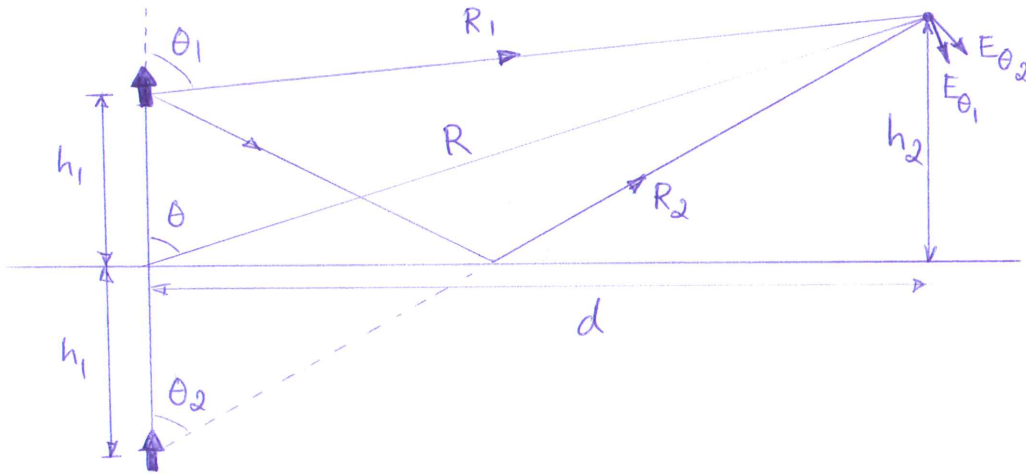
Således kan vi göra följande omskrivning

$$1 - \frac{1}{\epsilon_r} \sin^2 \theta_i \geq \frac{1}{\epsilon_r} \Rightarrow \epsilon_r \geq 1 + \sin^2 \theta_i$$

För att olikheten ska gälla för alla θ_i måste vi alltså ha $\epsilon_r > 2$

$$\text{Svar: } \epsilon_r > 2$$

A hertzian dipole is located above the ground at height h_1 . Calculate the electrical field at long distance d at height h_2 .



Consider the effect of ground as an image antenna.

$$\vec{E}_{total} = \vec{E}_{\theta_1} + \vec{E}_{\theta_2}$$

$$\begin{cases} \vec{E}_{\theta_1} = k \frac{e^{-j\beta R_1}}{R_1} \sin \theta_1 \\ \vec{E}_{\theta_2} = k \frac{e^{-j\beta R_2}}{R_2} \sin \theta_2 \end{cases}$$

$$\text{where } k = j \frac{I dl}{4\pi} \eta_0 \beta$$

Since $d \gg h_1, h_2$, we can approximate $\theta_1 \approx \theta_2 \approx \theta$, and we can assume that E_{θ_1} and E_{θ_2} are parallel.

$$R_1 \approx R - h_1 \cos \theta, \quad R_2 \approx R + h_1 \cos \theta$$

$$\vec{E}_{total} = \hat{\theta} k \frac{e^{-j\beta R}}{R} \sin \theta \left[e^{j\beta h_1 \cos \theta} + e^{-j\beta h_1 \cos \theta} \right]$$

$$= \hat{\theta} k \frac{e^{-j\beta R}}{R} \sin \theta \left[2 \cos(\beta h_1 \cos \theta) \right]$$

$$\cos \theta = \frac{h_2}{d} \quad \Rightarrow \quad \vec{E}_{total} = \hat{\theta} k \frac{e^{-j\beta R}}{R} \sin \theta \cdot 2 \cos\left(\beta \frac{h_1 h_2}{d}\right)$$