

**Tentamen i Elektromagnetisk fältteori för F2.
EEF031 2008-08-19 kl. 8.30-12.30**

Tillåtna hjälpmedel: BETA, Physics Handbook, Formelsamling i Elektromagnetisk fältteori, Valfri kalkylator men inga egna anteckningar utöver egna formler på sista bladet i formelsamlingen i Elektromagnetisk fältteori

Förfrågningar: Markus Johansson 031-772 5052, 076-8111541

Lösningar: anslås på kursens hemsida

Resultatet: anslås på kursens hemsida

Granskning: Sker på plats och tid enligt resultatlistan

Kom ihåg: Poängavdrag görs för otydliga figurer, utelämnade referensriktningar, dimensionsfel och utelämnade motiveringar.

OBS!

Svaren på förståelsedelen skall ges på tesen som skall lämnas in.

Förståelsefrågorna besvaras genom att markera en av rutorna efter varje påstående till höger. En och endast en ruta på varje rad skall markeras.

De tre svarsalternativen (från vänster till höger är) Ja, Vet ej (?) och Nej. Riktigt svar ger +0.2 poäng oriktigt svar ger -0.2 p. Vet ej är neutralt och ger noll poäng.

Förståelseuppgifterna ger maximalt 1 poäng och lägst -1 poäng och man kan därför få 1 poäng även med ett vet ej svar.

Namn:.....

Personnummer:.....

Email:.....

1 (Elektrostatik)

Problemlösningssdel (8 poäng)

a) Vi ska göra en enkel modell av hur en åskledare fungerar med hjälp av metallsfärer. Antag att huset är en sfär med en viss radie R och att den är kopplad till en spänning som precis ger överslag. Överslag mellan kula och luft sker vid fältstyrkan $2,5 \text{ MV/m}$. För att undvika överslag kopplas spänningskällan bort och kulan kopplas elektriskt ihop med en annan kula av mindre radie, r , än den stora kulan. Antag vidare att de två kulorna befinner sig på stort avstånd från varandra. Beskriv och räkna ut vad som händer. Varför är det viktigt för räkningen att kulorna befinner sig på stort avstånd från varandra?
Ledning: Vad händer med fältstyrkorna precis utanför sfärerna före och efter inkoppling av den lilla sfären.

Förståelsedel (4 poäng)

b) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga? **ja** **?** **nej**

Den grundläggande fysiken i uppgift 1a beskrivs av ett och endast ett av Maxwells postulat.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Den grundläggande fysiken i uppgift 1a beskrivs av två och endast två av Maxwells postulat.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Den grundläggande fysiken i uppgift 1a beskrivs av Gauss lag och på att E-fältet är rotationsfritt.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Den grundläggande fysiken i uppgift 1a beskrivs av Amperes lag och på att B-fältet är källfritt.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Den grundläggande fysiken i uppgift 1a beskrivs av att källan till D-fältet är den fria laddningstätheten och på att E-fältet är konservativt.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Den grundläggande fysiken i uppgift 1a beskrivs av att rotationen av H-fältet är den fria strömtätheten och på att B-fältet är divergensfritt.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

c) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga? **ja** **?** **nej**

Ohms lag är ett av postulaten i elektrostatiken.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Laplaces ekvation kan härledas direkt från postulaten i elektrostatiken.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
På stort avstånd från en elektrisk dipol avtar E-fältet som $1/R^3$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
På stort avstånd från en elektrisk dipol avtar potentialen som $1/R^2$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Speglingsmetoden tillsammans med entydighetssatsen medför att Poissons ekvation kan lösas mha. spegling.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Coulombs lag beskriver hur fältet från en elektrisk dipol ser ut.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

d) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga? **ja** **?** **nej**

I elektrostatiken är E-fältets tangentialkomponent kontinuerlig i gränsen mellan två material med olika permittivitet.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
I elektrostatiken är E-fältets normalkomponent kontinuerlig i gränsen mellan två material med olika permittivitet.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
I elektrostatiken är D-fältets tangentialkomponent kontinuerlig i gränsen mellan två material med olika permittivitet.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
I elektrostatiken är D-fältets normalkomponent kontinuerlig i gränsen mellan två material med olika permittivitet.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Randvillkoret för E-fältets tangentialkomponent härleds utifrån att E-fältet är konservativt.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Randvillkoret för E-fältets normalkomponent härleds utifrån att E-fältet är konservativt.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

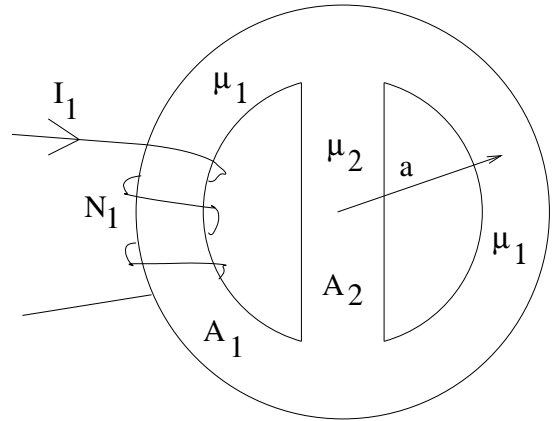
f) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga? **ja** **?** **nej**

Enheten för det elektriska fältet är V/m .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Sambandet $D = \epsilon E$ mellan E- och D-fältet kan härledas utifrån postulaten för elektrostatiken.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Polarisationsfältet P är fältet från de fria laddningarna i ett dielektriskt material.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Dielektriska materialegenskaper modelleras med hjälp av elektriska monopoler.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Antagande om approximativ strömfördelning ger en för hög resistans.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Antagande om approximativ potentialfördelning ger en för låg resistans.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

2 (Magnetostatik)

Problemlösningssdel (8 poäng)

a) Figuren visar en enkel magnetisk krets. Radien, a och tvärsnittsytorna A_1 respektive A_2 och magnetisk permeabilitet μ_1 och μ_2 enligt figuren. Kretsen drivs av strömmen I_1 som är lindad med N_1 varv. Utgå från Amperes lag och härled ett uttryck för den magnetiska reluktansen i dels den perifera, cirkulära delen av kretsen dels i den tvärsgående delen. Visa också hur reluktansen relaterar till strömmen och antalet lindningsvarv.



Förståelsedel (4 poäng)

b) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

	ja	?	nej
Den grundläggande fysiken i uppgift 2a beskrivs av ett och endast ett av Maxwells postulat.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Den grundläggande fysiken i uppgift 2a beskrivs av två och endast två av Maxwells postulat.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Den grundläggande fysiken i uppgift 2a beskrivs av Gauss lag och på att E-fältet är rotationsfritt.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Den grundläggande fysiken i uppgift 2a beskrivs av Amperes lag och på att B-fältet är källfritt.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Den grundläggande fysiken i uppgift 2a beskrivs av att källan till D-fältet är den fria laddningstätheten och på att E-fältet är konservativt.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Den grundläggande fysiken i uppgift 2a beskrivs av att rotationen av H-fältet är den fria strömstätheten och på att B-fältet är divergensfritt.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

c) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

	ja	?	nej
Divergensen av den magnetiska vektorpotentialen är given utifrån Maxwells ekvationer.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Den magnetiska vektorpotentialen från en strömförande tråd är riktad åt samma håll som strömmen.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Rotationen av den magnetiska vektorpotentialen kan väljas fritt.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Det magnetiska dipolmomentet ingår i härledningen av uttrycket för magnetiseringsfältet.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Den magnetiska vektorpotentialen från en magnetisk dipol avtar som $1/R^3$ på stort avstånd från dipolen.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
B-fältet från en magnetisk dipol avtar som $1/R^2$ på stort avstånd från dipolen.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

d) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

	ja	?	nej
Randvillkoret för B-fältets normalkomponent härleds från att B-fältet är divergensfritt.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
B-fältets normalkomponent är kontinuerlig i gränsen mellan två material.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
B-fältets tangentialkomponent är kontinuerlig i gränsen mellan två material.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
H-fältets tangentialkomponent är kontinuerlig i gränsen mellan två material.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
H-fältets normalkomponent är kontinuerlig i gränsen mellan två material.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
En laddad partikel som rör sig i ett i tiden konstant magnetfält ökar inte sin hastighet.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

e) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

	ja	?	nej
Magnetiska dipoler används för att modellera magnetiska material.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Lorentz kraften beskriver kraften från enbart B-fält på laddade partiklar.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Laddningar i vila som utsätts för ett B-fält påverkas av en kraft.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Reluktans för en magnetfältskrets motsvarar ungefär resistans för en elektrisk krets.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
H-fältets roll i magnetostatiken påminner om D-fältets roll i elektrostatiken.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
I en permanentmagnet vill man ha ferromagnetiskt material med en smal hystereskurva.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

4

Problemlösningsdel (8 poäng)

a) En ytvåg utbreder sig i vakuum i området $z > 0$ längs en yta med ekvationen $z = 0$.

H-fältet ges av uttrycket: $\mathbf{H} = \hat{y}e^{-1000z} \cos(10^7 t - \beta x)$.

Beräkna tillhörande **E**-fält. (3 poäng)

Är detta en plan våg? (uniform plane wave enligt Cheng) Motivera! (2 poäng)

Bestäm β med hjälp av vågekvationen. (3 poäng)

Förståelsedel (4 poäng)

b) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

För att beskriva den grundläggande fysiken i uppgift **4a** räcker två av Maxwells postulat.

För att beskriva den grundläggande fysiken i uppgift **4a** behövs alla fyra Maxwells postulat.

Den grundläggande fysiken i uppgift **4a** beskrivs bla av att E-fältet är konservativt.

Den grundläggande fysiken i uppgift **4a** beskrivs bla av att B-fältet är källfritt.

Den grundläggande fysiken i uppgift **4a** beskrivs bla av att rotationen av E-fältet är lika med negativa tidsderivatan på H-fältet.

Den grundläggande fysiken i uppgift **4a** beskrivs bla av att rotationen av H-fältet är den fria strömtätheten plus tidsderivatan av förskjutningsfältet.

ja ? nej

c) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

Den retarderade potentialen kommer från lösning av vågekvationen.

Den retarderade potentialen beskriver hur ljushastigheten avtar med avståndet från källan.

Vågekvationen för vektorpotentialen **A** kan härledas från Maxwells ekvationer.

I elektromagnetismen väljer man oftast $\nabla \cdot \mathbf{A}$ till samma som i magnetostatiken.

Man får välja $\nabla \cdot \mathbf{A}$ som man vill.

Den magnetiska vektorpotentialen relateras till magnetfältet som $\nabla \cdot \mathbf{B} = \mathbf{A}$.

ja ? nej

d) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

Poyntings teorem uttrycker energikonservering.

Poyntingvektorn kan vara tidsberoende.

Poyntingvektorn kan definieras med komplexa B- och E-fält.

Poyntingvektorn har enheten W/m^2 .

Poyntingvektorn kan bara definieras för monokromatiska fält.

Poyntingvektorn kan definieras som tidsmedelvärde eller som momentanvärde.

ja ? nej

e) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

Ljushastigheten i ett medium bestäms av permeabiliteten och permittiviteten.

Ljushastigheten beror inte på konduktiviteten.

En plan våg har ingen fältkomponent i utbredningsriktningen.

En plan våg kännetecknas av att fälten varierar vinkelrätt mot utbredningsriktningen.

För plana vågor är fälten konstanta vinkelrätt mot utbredningsriktningen.

Vågimpedansen bestäms av konduktiviteten och permittiviteten hos ett material

ja ? nej

5

Problemlösningsdel (8 poäng)

a) Man vill konstruera ett antensystem som skall kunna sända till den ena eller den andra av två stationära mobiltelefonanvändare. I ett första försök att åstadkomma ett sådant system använder man sig av två stycken Hertzdipoler. Fjärrfältet från en Hertzdipolantenn kan skrivas:

$$\vec{E}_{rad} = \hat{\theta} Z_o \frac{j\omega l \bar{I}_o \sin \theta}{4\pi cr} e^{-j\beta r}$$

$$\vec{H}_{rad} = \hat{\phi} \frac{j\omega l \bar{I}_o \sin \theta}{4\pi cr} e^{-j\beta r}$$

Visa hur man med hjälp av två sådana antenner och genom att kontrollera faserna hos de drivande strömmarna kan uppnå detta resultat. Hur bra är det föreslagna systemet? Hur skulle man kunna göra detta bättre?

Förståelsedel (4 poäng)

b) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

	ja	?	nej
För att beskriva den grundläggande fysiken i uppgift 5a räcker två av Maxwells postulat.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
För att beskriva den grundläggande fysiken i uppgift 5a behövs alla fyra Maxwells postulat.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Den grundläggande fysiken i uppgift 5a beskrivs bla av Gauss lag.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Den grundläggande fysiken i uppgift 5a beskrivs bla av Amperes lag.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Den grundläggande fysiken i uppgift 5a beskrivs bla av att rotationen av E-fältet är lika med negativa tidsderivatan på H-fältet.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Den grundläggande fysiken i uppgift 5a beskrivs bla av att rotationen av H-fältet är den fria strömtätheten plus tidsderivatan av förskjutningsfältet.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

c) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

	ja	?	nej
En Hertzdipol är en våglängd lång.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Strömmen varierar längs en Hertzdipol.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Direktiviteten för en Hertzdipol är 1,5.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Strålningsresistansen hos en Hertzdipol är oberoende av våglängden.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
En halv vågsdipol har samma direktivitet som en Hertzdipol.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Antennförstärkningen är riktningsberoende.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

d) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

	ja	?	nej
En monokromatisk våg innehåller flera frekvenskomponenter.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
För en god ledare är $\sigma/\omega\epsilon \gg 1$.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
I en god ledare är $\alpha \approx \beta$.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
För en god isolator är vågimpedansen $Z \approx \sqrt{j\omega\mu/\sigma}$.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
För höga frekvenser är inträngningsdjupet mindre än för låga frekvenser.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
I komplex notation motsvarar tidsderivata division med $j\omega$.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

e) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

	ja	?	nej
Vid snett infall mot en gränssyta skiljer sig uttrycken på reflektionskoefficienten för vinkelrät polarisering jämfört med parallell polarisering mot infallsplanet.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Snells lag kan härledas genom att studera randvillkoren i gränsen mellan olika material.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Snells lag gäller endast i gränssytor där permeabiliteten är samma på båda sidorna, dvs $\mu_1 = \mu_2$.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
En optisk fiber bygger på totalreflektion.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Totalreflektion sker vid Brewstervinkeln.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Totalreflektion är möjlig då ljusstrålen går från ett optiskt tätare till ett optiskt tunnare medium.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Tenta 050822

1. På den stora kulan, radie R , precis vid överlag finns laddningen Q på sfären. Givet är $E(R) = 2.5 \cdot 10^6 \text{ V/m}$.
Gauss lag ger Q :

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \Rightarrow Q = 4\pi\epsilon_0 R^2 \cdot 2.5 \cdot 10^6 \text{ C}$$

Kopplar sedan in den lilla sfären, vilket motsvarar åskledaren

Då de två metallsfärerna kopplas ihop får de samma potential. Om laddningen q förflyttas till den lilla kulan får följande villkor av potentialerna

$$\frac{Q-q}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \Rightarrow q = \frac{r}{r+R} Q$$

Alltså kan vi beräkna fältet på den lilla kulan.

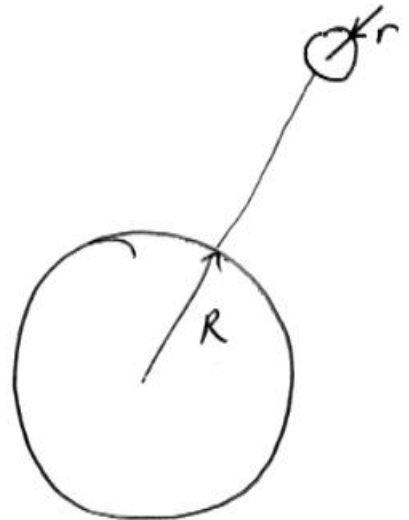
$$E(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{r}{r+R} 4\pi\epsilon_0 R^2 \cdot 2.5 \cdot 10^6 \\ = \left(\frac{R}{r}\right)^2 \frac{r}{r+R} \cdot 2.5 \cdot 10^6$$

Antag $r \ll R$, då kan vi approximera

$$E(r) = \frac{R}{r} \cdot 2.5 \cdot 10^6$$

Detta säger att vi alltid har större fält runt den lilla kulan än den stora. Således sker överlag där först. Eftersom laddningen på stora sfären nu är $Q-q$ blir också fältet där mindre än överlagsspänningen.

Sfärerna måste vara på stort avstånd från varandra eftersom vi använder Gauss lag. Fälten från de båda kulorna får därmed inte påverka varandra för att vi ska kunna använda Gauss lag.



2.

Utgå från Ampères lag.

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I_{\text{inneslutet}}$$

Integration runt den skeddade linjen ger:

$$N_1 I_1 = H_1 \pi a + H_2 2a$$

$$\left\{ H = \frac{B}{\mu} \right\}$$

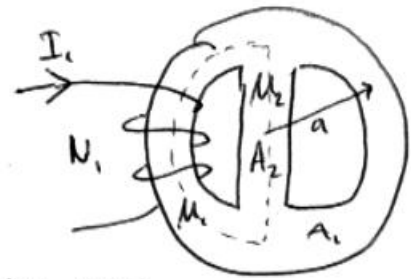
$$N_1 I_1 = \frac{B_1 \pi a}{\mu_1} + \frac{B_2 2a}{\mu_2}$$

{Inför det magnetiska flödet $\Phi = BA$ }

$$N_1 I_1 = \frac{\Phi_1 \pi a}{\mu_1 A_1} + \frac{\Phi_2 2a}{\mu_2 A_2}$$

Med Reluktanserna $R_1 = \frac{\pi a}{\mu_1 A_1}$, $R_2 = \frac{2a}{\mu_2 A_2}$ \hookrightarrow

$$N_1 I_1 = \Phi_1 R_1 + \Phi_2 R_2$$



3

Till att börja med ser vi att endast dipolens z-komponent ger flödesbidrag i de lindade varven.

Vektorpotentialen från z-komponenten blir:

$$\vec{A}(r, \theta, \phi, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{m_2 \times \vec{r}}{r^2} = \frac{\mu_0 m_0}{4\pi} \cos(\omega t) \frac{\vec{z} \times \vec{r}}{r^2} = \frac{\mu_0 m_0}{4\pi} \cos(\omega t) \frac{\sin\theta}{r^2} \hat{\phi}(\theta)$$

Flödet genom ett varv av lindningen beläget vid polvinkeln θ blir:

$$\Phi(\theta, t) = \oint \vec{A} \cdot d\vec{l} = \frac{\mu_0 m_0}{4\pi} \cos(\omega t) \frac{\sin\theta}{a^2} \int_0^{2\pi} \hat{\phi} \cdot (a \sin\theta \hat{\phi} d\phi) = \frac{\mu_0 m_0}{2a} \cos(\omega t) \sin^2\theta$$

Med jämn varvbeläggning i θ -led får vi i intervallet $d\theta$ finns

$$dN = \frac{N}{\pi} d\theta \text{ varv som passerar av flödet } \Phi(\theta)$$

Detta ger ett bidrag till det sammanlagda flödet: $d\Phi = \Phi dN = \frac{\mu_0 m_0 N}{2\pi a} \cos(\omega t) \sin^2\theta$

$$\text{Totala flödet: } \Phi_{\text{total}}(t) = \frac{\mu_0 m_0 N}{2\pi a} \cos(\omega t) \int_0^{\pi} \sin^2\theta d\theta = \frac{\mu_0 m_0 N}{4a} \cos(\omega t)$$

Den inducerade spänningen

$$V = -\frac{d\Phi_{\text{total}}}{dt} = \frac{\mu_0 m_0 N \omega}{4a} \sin(\omega t)$$

$$\text{Strömmen i resistansen blir } \vec{i} = \frac{V}{R} = \frac{\mu_0 m_0 N \omega}{4aR} \sin(\omega t)$$

4)

$$a) \quad H = \hat{y} e^{-1000z} \cos(10^7 t - \beta x) = H_y \hat{y}$$

$$\nabla \times H = \epsilon \frac{\partial E}{\partial t}$$

$$\nabla \times H = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & H_y & 0 \end{vmatrix} = -\hat{x} \frac{\partial H_y}{\partial z} + \hat{z} \frac{\partial H_y}{\partial x}$$

$$\begin{cases} \epsilon \frac{\partial E_x}{\partial t} = 1000 e^{-1000z} \cos(10^7 t - \beta x) \\ \epsilon \frac{\partial E_z}{\partial t} = \beta e^{-1000z} \sin(10^7 t - \beta x) \end{cases}$$

$$\begin{cases} E_x = \frac{10^{-4}}{\epsilon} e^{-1000z} \sin(10^7 t - \beta x) \\ E_z = \frac{-\beta 10^{-7}}{\epsilon} e^{-1000z} \cos(10^7 t - \beta x) \end{cases}$$

b) Detta är ingen plan våg ty $E \perp H$ är ej konstanta i planet vinkelrätt mot utbredningsriktningen.

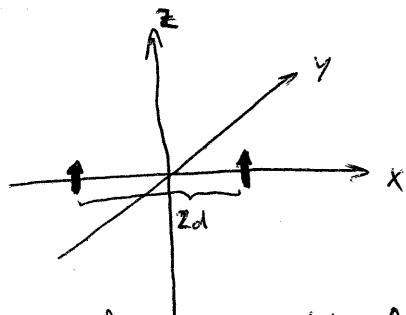
c) Vågekvationen för H fältet:

$$\nabla^2 H_y + \frac{\omega^2}{c^2} H_y = 0$$

$$\Rightarrow 1000^2 - \beta^2 + \frac{\omega^2}{c^2} = 0 \Rightarrow \beta = \pm \sqrt{1000^2 + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2}$$

5

Placera dipolerna enligt följande (med avståndet $2d$) på x-axeln

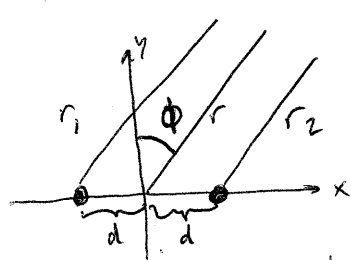


E-fältet från en dipol ges av:

$$\vec{E} = \hat{\theta} Z_0 \frac{j\omega L \bar{I}_0 \sin\theta}{4\pi r^2} e^{-j\beta r}$$

Vi begränsar analysen till x-y-planet så $\theta = 90^\circ$

Avstånden från antenn till fältpunkt:



Vi får för fasvariationerna $r_1 \approx r + d \sin\phi$

$$r_2 \approx r - d \sin\phi$$

För amplitudvariationerna $r_1 \approx r_2 \approx r$

Vi låter också dipolerna drivas med strömmar vars fasskillnad är γ .

$$\bar{I}_{01} = I_0 e^{j\frac{\gamma}{2}} \quad \bar{I}_{02} = I_0 e^{-j\frac{\gamma}{2}}$$

Det totala fältet kan vi nu summera från som:

$$\begin{aligned} E &= E_1 + E_2 = Z_0 \frac{j\omega L I_0}{4\pi r^2} \left(e^{-j\beta(r+d\sin\phi)} e^{j\frac{\gamma}{2}} + e^{-j\beta(r-d\sin\phi)} e^{-j\frac{\gamma}{2}} \right) \\ &= Z_0 \frac{j\omega L I_0}{4\pi r^2} e^{-j\beta r} \left(e^{-j\beta d \sin\phi + j\frac{\gamma}{2}} + e^{j\beta d \sin\phi - j\frac{\gamma}{2}} \right) \\ &= Z_0 \frac{j\omega L I_0}{4\pi r^2} e^{-j\beta r} 2 \cos(\beta d \sin\phi - \frac{\gamma}{2}) \end{aligned}$$

För att få riktverkan krävs att $\cos(\beta d \sin\phi - \frac{\gamma}{2}) = 1$ i önskad riktning.

$$\text{dvs } \beta d \sin\phi = \frac{\gamma}{2} \Rightarrow \phi = \arcsin \frac{\gamma}{\beta d 2}$$

Här ser vi att givet avståndet, d , mellan antennerna och propageringskonstanten β så kan riktningen ϕ som ger maximal fältstyrka bestämmas med γ

Nackdelen med detta system är att om vi vill ha ett maximum i en viss riktning ϕ så får även ett i riktningen $180^\circ - \phi$ (pga arcsin)

Genom att använda fler antenner kan bättre kontroll på fältbilderna erhållas.