Fält 24. Tentamen i Elektromagnetisk fältteori för F2.
EEF031 Tisdagen den 17 december 2002 kl. 8.45-12.45.

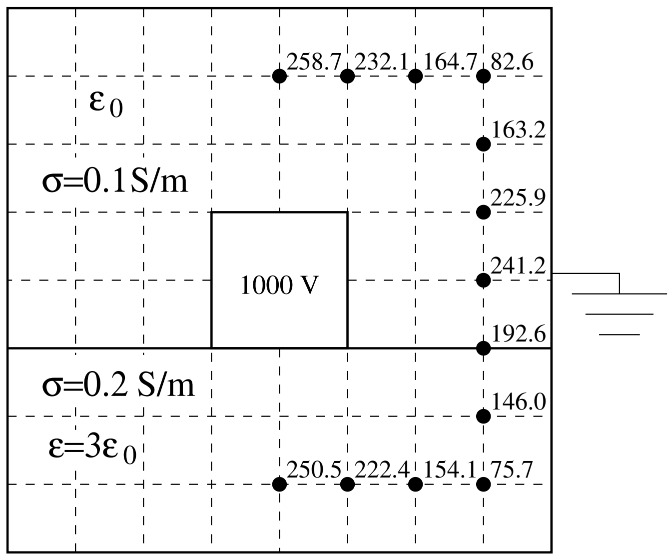
Tillåtna hjälpmedel:	BETA, Physics Handbook, Formelsamling i elektromagnetisk fältteori, Valfri kalkylator men inga egna anteckningar utöver egna formler på sista bladet i formelsamlingen för elektromagnetisk fältteori.
Förfrågningar:	Mikael Persson Tel. ankn. 1576.
Lösningar:	Anslås på kursens hemsida efter tentamenstidens slut.
Resultat:	Anslås på kursens hemsida senast den 17 januari.
Granskning:	17 januari, kl. 12.00-13.00 i Vasa 7 hos Mikael
Betyg:	Sänds till betygsexpeditionen senast den 20 januari.
Kom ihåg:	Poängavdrag görs för otydliga figurer, utelämnade referensriktningar, dimensionsfel och utelämnade motiveringar

Lycka till!

1

Problemlösningsdel

Figuren nedan visar tvärsnittet av ett långt metallrör med kvadratiskt tvärsnitt med längden 8 cm. I mitten av röret vilar en kvadratisk metallstång med sidan 2 cm på ett dielektrikum med $\epsilon_r = 3$ och $\sigma = 0.2$ S/m. Resten av volymen mellan de yttre och inre ledarna är fylld med luft, där $\epsilon_r = 1$ och $\sigma = 0.1$ S/m. Man lägger en spänning på 1000 V mellan ledarna och löser sedan Laplaces ekvation i noderna i det kvadratiska rutnätet i figuren. I figuren visas några av de beräknade potentialvärdena.



A)	Använd de i figuren visade potentialvärdena för att beräkna laddningen på den inre ledaren. Glöm ej att ta hänsyn till de två områdena med olika ϵ.	4 poäng
B)	Beräkna resistansen per längdenhet mellan inner- och ytterledare.	2 poäng
C)	Hur ändras resistansen om $\sigma = 0.1$ S/m överallt.	2 poäng

---

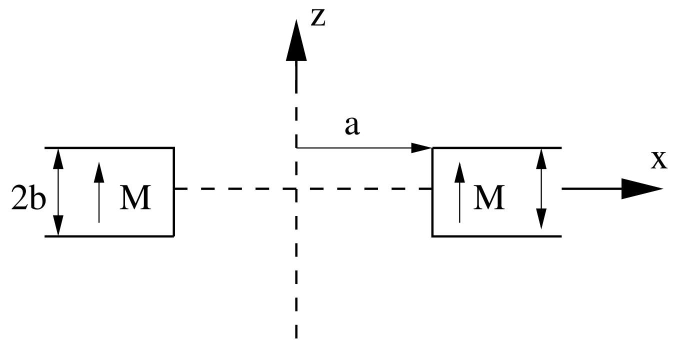
Förståelsedel

D)	Vilket eller vilka postulat bygger lösningen ovan på? Vad säger det/de i ord? Skiljer de sig från Maxwells fulla ekvationer? I så fall hur? Beskriv med ord hur man kommer från postulaten till det slutliga uttrycket.	1 poäng
E)	Det elektrostatiska fältet är konservativt. Vad följer från detta?	1 poäng
F)	Spänningen mellan två punkter är relaterad till arbetet att föra en laddning mellan punkterna. Förklara kortfattat.	1 poäng
G)	Den elektriska dipolen används för att modellera de dielektriska egenskaperna. Förklara kortfattat.	1 poäng

2

Problemlösningsdel

En mycket stor järnplåt, med tjockleken 2b, har magnetiserats ”på tvären” med den konstanta magnetiseringen M. Långt ifrån plåtens kant har det borrats ett hål, med radien a, vinkelrätt genom plåten.



A) Bestäm magnetfältet B på hålets symmetriaxel som funktion av avståndet från hålets centrum! 8 poäng

---

Förståelsedel

B) Vilket eller vilka postulat bygger lösningen ovan på?
Vad säger det/de i ord?
Skiljer de sig från Maxwells fulla ekvationer? I så fall hur?
Beskriv med ord hur man kommer från postulaten till det slutliga uttrycket. 1 poäng

C) Beskriv kortfattat vad ömsesidig induktans och självinduktans är. 1 poäng

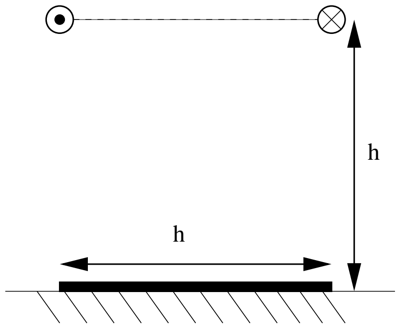
D) Beskriv kortfattat principen för en likströmsmotor. Rita figur. 1 poäng

E) Vi kan välja divergensen av den magnetiska vektorpotentialen fritt. Förklara kortfattat. 1 poäng

3

Problemlösningsdel

Mikael bor alldeles intill en enfas kraftledning för 50 Hz. Han tycker att elräkningen är för dyr och funderar därför på att ”stjäla” effekt från elleverantören, genom att använda induktionslagen; ett förfarande som är straffbart. Mikael placerar därför mitt under kraftledningen på det vertikala avståndet h en horisontell kvadratisk slinga med sidan h, på sådant sätt att två av sidorna blir parallella med ledningen. Han mäter sedan upp den i slingan inducerade spänningen och blir väldigt besviken! Andreas, som har bättre kunskaper i fältberäkning, beräknar i stället den inducerade spänningen och sparar därigenom en mängd onödigt besvär. Andreas uppskattar effektivvärdet, I_{eff}, av strömmen i kraftledningen. Trådarna ligger på samma höjd och har inbördes avståndet h. Han antar vidare att man kan bortse från markens inverkan på den inducerade spänningen.



A) Vilket uttryck för den inducerade spänningens effektivvärde får Andreas om $h = 5$ m, $I_{eff} = 500$ A? — 6 poäng

B) Hur skulle Mikael kunna förbättra sin lömska plan? — 2 poäng

---

Förståelsedel

C) Vilket eller vilka postulat bygger lösningen ovan på?
Vad säger det/de i ord?
Skiljer de sig från Maxwells fulla ekvationer? I så fall hur?
Beskriv med ord hur man kommer från postulaten till det slutliga uttrycket. — 1 poäng

D) Integralen av magnetfältet över en sluten yta är alltid noll. Förklara kortfattat. — 1 poäng

E) Vad är en hystereskurva? — 1 poäng

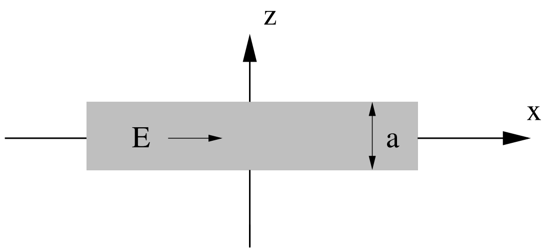
F) Beskriv kortfatat med egna ord vad som händer med laddningar på en ledande stång som rör sig i ett statiskt magnetfält. — 1 poäng

4

Problemlösningsdel

I ett interstellärt skikt med tjockleken a finns en oscillerande strömtäthet. Skiktet, vilket betraktas som plant, befinner sig i området $|z| < a/2$. Mätningar från en rymdsond visar att det elektriska fältet i skiktet ser ut enligt följande:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = E_0 \left[\cos\left(\frac{\omega z}{c}\right) \sin\left(\omega t - \frac{\omega a}{2c}\right) - \sin \omega t\right] \; \hat{\mathbf{x}}$$



A) Bestäm det (tidsvarierande) magnetiska fältet **B** i skiktet. 4 poäng

B) Bestäm (den tidsvarierande) strömtätheten **J** i skiktet.
Ledning: Ohms lag kan ej användas 4 poäng

Förståelsedel

C) Vilket eller vilka postulat bygger lösningen ovan på?
Vad säger det/de i ord?
Skiljer de sig från Maxwells fulla ekvationer? I så fall hur?
Beskriv med ord hur man kommer från postulaten till det slutliga uttrycket. 1 poäng

D) Beskriv med egna ord vad Poyntingvektorn är och dess relation till energikonservering. 1 poäng

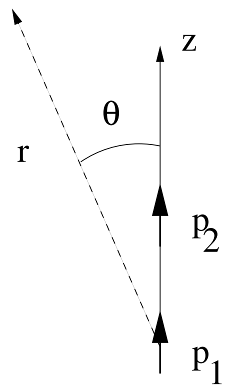
E) Beskriv kortfattat begreppen vågimpedans, fashastighet och grupphastighet. 1 poäng

F) Beskriv kortfattat begreppet total inre reflektion och dess betydelse. 1 poäng

5

Problemlösningsdel

Två elektriska elementardipoler, $\mathbf{p_1} = p_0 \cos(\omega t)\hat{\mathbf{z}}$, $\mathbf{p_2} = p_0 \cos(\omega t + \alpha)\hat{\mathbf{z}}$, ligger utefter z-axeln i punkterna $z = 0$ respektive $z = \lambda/2$ (λ = våglängden). Ledning: Skillnaden i avståndet mellan källpunkt och fältpunkt från de två dipolantennerna påverkar fasen men inte amplituden.



A) Bestäm α så att fältbidragen i fjärrzonen från bägge dipolerna ligger i fas i riktningen $\theta = \pi/3$ (60°). 6 poäng

B) Med ovan bestämda α, bestäm också de riktningar θ där fjärrzonsfältet är noll. 2 poäng

---

Förståelsedel

C) Vilket eller vilka postulat bygger lösningen ovan på?
Vad säger det/de i ord?
Skiljer de sig från Maxwells fulla ekvationer? I så fall hur?
Beskriv med ord hur man kommer från postulaten till det slutliga uttrycket. 1 poäng

D) Vad är en antenns strålningsresistans. När är den viktig och när är den mindre viktig? 1 poäng

E) När ska en antenn ha stor direktivitet och när ska den ha liten? 1 poäng

F) Beskriv någon möjlig användning av antennuppställningen ovan. 1 poäng

Tenta 2002-12-17 (Fält 24)

1

a) Lägg en gaussyta mellan röret och gridpunkterna med kända potentialer
Pga symmetrin räcker det att göra beräkningarna på halva området, (där potentialerna är beräknade)
Diskretiserar Gauss lag och approximerar E-fältet utifrån de givna potentialerna som

$$E = -\nabla U \approx \frac{U_{inre} - U_{yttre}}{\Delta}$$

(Δ är avståndet mellan noderna i griden)
Beräkna laddningen per längdenhet

$$\frac{\rho_{innesluten}}{2} = \int_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} \approx \sum_S \varepsilon_i E_i \, ds_i$$

$$\left\{ \text{Vi har} \quad U_{yttre} = 0 \; ; \; ds_i = 1 \cdot \Delta \right\}$$

$$\rho_{innesluten} = 2 \cdot \Big[\varepsilon_0 \left(\tfrac{1}{2} 258{,}7 + 232{,}1 + 164{,}7 + 82{,}6 \cdot 2 + 163{,}2 + 225{,}9 + 241{,}2 + \tfrac{1}{2} \cdot 192{,}6 \right) + 3\varepsilon_0 \left(\tfrac{1}{2} \cdot 192{,}6 + 146{,}0 + 75{,}7 + 154{,}1 + 222{,}4 + \tfrac{1}{2} 250{,}5 \right) \Big]$$

$$= 6{,}87 \cdot 10^{-8} \; C/m$$

b) Resistans per längdenhet:
Beräkna strömmen som flyter mellan inner- och ytterledare.

$$\frac{I}{2} = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} = \int_S \sigma \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} \approx \sum_S \sigma_i E_i \, ds_i \quad \Rightarrow$$

$$I = 2 \Big[0{,}1 \left(\frac{258{,}7}{2} + 232{,}1 + 164{,}7 + 82{,}6 \cdot 2 + 163{,}2 + 225{,}9 + 241{,}2 + \frac{192{,}6}{2} \right) + 0{,}2 \left(\frac{192{,}6}{2} + 146{,}0 + 75{,}7 + 154{,}1 + 222{,}4 + \frac{250{,}5}{2} \right) \Big] = 612 \; A/m$$

Resistans/längdenhet: $R = \frac{U}{I} = \frac{1000}{612} \Omega = 1{,}64 \, \Omega$

c) Strömmen minskar $\Rightarrow$ Resistansen ökar

②

Plåtens hål ligger med sitt centrum i origo.

Magnetiseringen är $\mathbf{M} = M\hat{z}$

Beräknar magnetiseringsströmmarna:

Volymströmtäthet:

$$\mathbf{J}_{mv} = \nabla \times \mathbf{M} = \nabla \times (M\hat{z}) = 0$$

Ytströmtäthet

$$\mathbf{J}_{ms} = \mathbf{M} \times \hat{n} = M\hat{z} \times \begin{cases} +\hat{z} & \text{(på toppen)} \\ -\hat{z} & \text{(på botten)} \\ -\hat{r} & \text{(på insidan av borrhålet)} \\ +\hat{r} & \text{(på plåtens kant om den är rund)} \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} 0 \\ 0 \\ -M\hat{\varphi} \\ M\hat{\varphi} \end{cases}$$

Eftersom plåten är mycket stor försummar vi bidraget från plåtens kant.

B-fältet fås med Biot-Savarts lag:

$$\mathbf{B} = \int_{S_{hål}} \frac{\mu_0 \mathbf{J}_{ms}(\mathbf{R}_1) \times \mathbf{R}_{12}}{4\pi R_{12}^3} \, dS_1$$

Källpt: $\mathbf{R}_1 = a\hat{r} + z_1\hat{z}$

Fältpt $\mathbf{R}_2 = z_2\hat{z}$ (på z-axeln)

$$\mathbf{R}_{12} = \mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1 = -a\hat{r} + (z_2 - z_1)\hat{z}$$

$$R_{12} = \sqrt{a^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

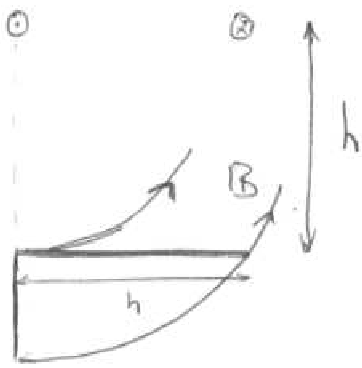
$$\mathbf{J}_{ms} \times \mathbf{R}_{12} = -M\hat{\varphi} \times (-a\hat{r} + (z_2 - z_1)\hat{z}) = M\left(a(-\hat{z}) + (z_2 - z_1)(-\hat{r})\right)$$

Pga symmetri ser vi att $\mathbf{B}(z_2) = B_z(z_2)\hat{z}$

$$\mathbf{B}(z_2) = \int_{z_1=-b}^{b} \frac{-\mu_0 M a \hat{z}}{4\pi \left[a^2 + (z_2 - z_1)^2\right]^{3/2}} 2\pi a \, dz_1 = \frac{-\mu_0 M 2\pi a^2 \hat{z}}{4\pi} \int_{-b}^{b} \frac{dz_1}{\left[a^2 + (z_2 - z_1)^2\right]^{3/2}}$$

$$= -\frac{\mu_0 M}{2} \left[\frac{z_2 + b}{\sqrt{a^2 + (z_2 + b)^2}} - \frac{z_2 - b}{\sqrt{a^2 + (z_2 - b)^2}} \right] \hat{z}$$

③ a) Kraftledningens båda trådar ger lika stora och samverkande bidrag till flödet. B-linjerna från en tråd passerar vinkelrätt genom en yta rakt under tråden vilken begränsas av avstånden h och $h\sqrt{2}$ från tråden



Totala flödet genom slingan:

$$\phi = 2 \cdot h \int_h^{h\sqrt{2}} B_\varphi \, dr$$

Fältet från lång rak ledare: $B_\varphi = \frac{\mu_0 I(t)}{2\pi r}$

$$\phi = 2h \int_h^{h\sqrt{2}} \frac{\mu_0 I(t)}{2\pi r} dr = \frac{h \mu_0 I(t)}{2\pi} \ln 2$$

Strömmen kan vi skriva $I = I_{eff}\sqrt{2}\cos(\omega t)$

$$V_{ind} = -\frac{d\phi}{dt} = -\frac{d}{dt}\left(\frac{h\mu_0 I_{eff}\sqrt{2}\cos\omega t \ln 2}{2\pi}\right) = \frac{h\mu_0 I_{eff}\sqrt{2}\omega \sin\omega t \ln 2}{2\pi}$$

$$V_{ind,eff} = \frac{|V_{ind}|}{\sqrt{2}} = \frac{h\mu_0 I_{eff}\omega \ln 2}{2\pi} = \frac{5 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 500 \cdot 2\pi \cdot 50 \cdot \ln 2}{2\pi} =$$

$$= 0{,}11 \text{ V} \quad \text{(ganska liten alltså)}$$

b) Den inducerade spänningen skulle kunna ökas om vi ökade antalet varv i spolen. Med n varv skulle den inducerade spänningen bli $V_{ind,eff,n} = n \cdot 0{,}11$ V

Vi skulle även kunna göra spolen större, i riktningen längs med kraftledningen, för att öka flödet ϕ genom spolen.

(4)

Givet: $\mathbb{E}(\mathbb{r},t) = E_0\left[\cos\left(\frac{\omega z}{c}\right)\sin\left(\omega t - \frac{\omega a}{2c}\right) - \sin(\omega t)\right]\hat{x}$

a) Använd Maxwells ekvationer för att bestämma B-fältet.

Faradays lag ger:

$$\nabla \times \mathbb{E} = \hat{y}\frac{\partial E_x}{\partial z} = -E_0\frac{\omega}{c}\sin\frac{\omega z}{c}\sin\left(\omega t - \frac{\omega a}{2c}\right)\hat{y} = -\frac{\partial \mathbb{B}}{\partial t}$$

Integrera map. t. Sätt integrationskonst = 0 ⇒ inget statiskt fält

$$\mathbb{B} = -E_0\frac{1}{c}\sin\frac{\omega z}{c}\cos\left(\omega t - \frac{\omega a}{2c}\right)$$

b) Med E och B kända fås J ur Amperes lag:

$$\mathbb{J} = \frac{1}{\mu_0}\nabla\times\mathbb{B} - \varepsilon_0\frac{\partial \mathbb{E}}{\partial t} = -\frac{\partial B_y}{\partial z}\frac{1}{\mu_0}\hat{x} - \varepsilon_0\frac{\partial E_x}{\partial t}\hat{x}$$

$$= E_0\frac{\omega_0}{\mu_0 c^2}\cos\left(\frac{\omega z}{c}\right)\cos\left(\omega t - \frac{\omega a}{2c}\right)\hat{x} -$$

$$\varepsilon_0\omega E_0\left[\cos\left(\frac{\omega z}{c}\right)\cos\left(\omega t - \frac{\omega a}{2c}\right) - \cos(\omega t)\right]\hat{x} =$$

$$= \left\{\frac{1}{\mu_0 c^2} = \varepsilon_0\right\}\ \varepsilon_0\omega E_0\cos(\omega t)\hat{x}$$

(5) a) Avståndet från dipolerna till fjärrzonpunkten blir

$r_1 = r \quad r_2 = r - \frac{\lambda}{2}\cos\theta$

Summerar fältbidragen från dipolerna för att få det totala fältet:

Fältet från en dipol: $\bar{E}(r,\theta,\varphi) = \hat{\theta} Z_0 \frac{j\omega l i_0 \sin\theta}{4\pi c R} e^{-j\omega R/c}$

och $\bar{p} = \frac{\hat{z} l i_0}{j\omega}$

Skriver nu om som

$$\bar{E}(r,\theta) = \hat{\theta}\, \frac{-\mu_0 p \omega^2}{4\pi} \frac{\sin\theta}{R} e^{-j\omega R/c}$$

Skriver p_1 och p_2 på komplex form

$$p_1 = p_0 \hat{z} \qquad p_2 = p_0 e^{j\alpha} \hat{z}$$

Summerar:

$$\bar{E}(r,\theta) = \hat{\theta}\, \frac{-\mu_0 p_0 \omega^2}{4\pi} \frac{\sin\theta}{R} \left(e^{-j\frac{\omega r_1}{c}} + e^{j\alpha} e^{-j\frac{\omega r_2}{c}} \right)$$

$$= \hat{\theta}\, \frac{-\mu_0 p_0 \omega^2}{4\pi} \frac{\sin\theta}{R} \left(e^{-j\frac{\omega r_1}{c}} + e^{-j\left(\frac{\omega r_2}{c} - \alpha\right)} \right)$$

$$= \hat{\theta}\, \frac{-\mu_0 p_0 \omega^2}{4\pi} \frac{\sin\theta}{R} \left(e^{-\frac{j\omega r}{c}} + e^{-j\left(\frac{\omega r}{c} - \frac{\omega\lambda}{2c}\cos\theta - \alpha\right)} \right)$$

$$\left\{ \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda} \right\} = \hat{\theta}\, \frac{-\mu_0 p_0 \omega^2}{4\pi} \frac{\sin\theta}{R} \left(e^{-\frac{j\omega r}{c}} + e^{-j\left(\frac{\omega r}{c} - \pi\cos\theta - \alpha\right)} \right)$$

För att dipolerna ska ha samma fasläge måste gälla

att $-\alpha - \pi\cos\theta = n \cdot 2\pi \quad (n = \text{heltal})$

för $\theta = \frac{\pi}{3}$ fås $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow -\alpha - \frac{\pi}{2} = n \cdot 2\pi \Rightarrow \alpha = -\frac{\pi}{2} + n\,2\pi$

b) Nollriktningarna är sådana att

$$\sin\theta \, Re\{(e^{-j\frac{\omega r}{c}} + e^{-j(\frac{\omega r}{c} - \pi\cos\theta - \alpha)})e^{j\omega t}\} = 0$$

$$\sin\theta\left\{\cos(\omega t - \tfrac{\omega r}{c}) + \cos(\omega t - \tfrac{\omega r}{c} + \pi\cos\theta + \alpha)\right\} = 0$$

För alla t och $r > 0$.

Först får vi nollställe då $\sin\theta = 0$

$\Rightarrow \theta = 0$ och π

Dessutom nollställen då

$$\cos(\omega t - \tfrac{\omega r}{c}) + \cos(\omega t - \tfrac{\omega r}{c} + \pi\cos\theta + \alpha) = 0$$

Med $\omega(t - \frac{r}{c}) = x$ och $\pi\cos\theta + \alpha = \pi(\cos\theta - \frac{1}{2}) = y$

fås

$$\cos x + \cos(x+y) = \cos x + \cos x\cos y - \sin x \sin y = 0 \; \forall x$$

$\Rightarrow 1 + \cos y = \tan x \sin y \quad \forall x \quad \Rightarrow$

Nollställen finns $\forall x$ då

$0 = \sin y = 1 + \cos y$

$\Rightarrow y = (2n+1)\pi$ där $n =$ heltal

$\Rightarrow \cos\theta = \frac{4n+3}{2}$

θ reell endast för $n = -1 \Rightarrow$

$\cos\theta = -\frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \frac{2\pi}{3}$

Så nollriktningarna blir $\theta = \{0, \frac{2\pi}{3}, \pi\}$