

**Övningstenta i Elektromagnetisk fältteori,
2019-11-30 kl. 8.30-12.30
Kurskod EEF031**

Tillåtna hjälpmedel: BETA, Physics Handbook,
Formelsamling i Elektromagnetisk fältteori.
Valfri kalkylator, minnet måste raderas.
Inga egna anteckningar utöver egna formler på sista
bladet i formelsamlingen i elektromagnetisk fältteori

Förfrågningar: Carl Holmberg

Examinator: Andreas Fhager

Lösningar: Anslås på kursens hemsida

Resultatet: Distribueras på föreläsning

Granskning: Plats och tid annonseras på kurshemsidan

Till tentan: Elektrostatiken (tal 1 och 2) och Magnetostatiken (tal 3 och 4) bedöms var för sig och poängen tillgodoräknas separat på tentan. Även teoridel och problemdel räknas separat. Duggaresultatet räknas om till en procentsats av maxpoängen och respektive tal på tentan kan om så önskas hoppas över med lika många procent av maxpoängen tillgodo. Om man trots poäng tillgodo från duggan väljer att räkna motsvarande tal på tentan gäller bästa resultatet. Resultat från duggan gäller på ordinarie tenta och de två närmast därpå följande omtentamina.

OBS!

Svaren på förståelsedelen skall ges direkt på tesen som ska lämnas in

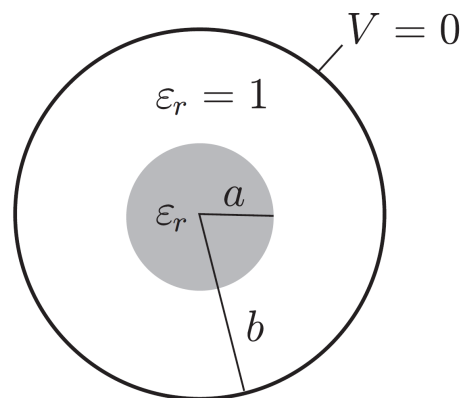
Förståelsefrågorna besvaras genom att markera en av rutorna efter varje påstående till höger. En och endast en ruta på varje rad skall markeras. De tre svarsalternativen (från vänster till höger är) Rätt, Vet ej och Fel. Riktigt svar ger +0.2 poäng oriktigt svar ger -0.2 p. Vet ej är neutralt och ger noll poäng. Förståelseuppgifterna ger maximalt 1 poäng och lägst -1 poäng och man kan därför få 1 poäng även med ett vet ej svar.

Anonym kod:

1 Elektrostatik

Problemlösningsdel (8 poäng)

En sfär med radien a består av ett dielektriskt material med relativ permittivitet ϵ_r . Klotet är laddat med en total laddning Q som är jämnt fördelad över sfärens volym. Sfären är koncentriskt omgiven av ett tunt jordat metallskal med radien b . Områdena utanför, och mellan sfären och skalet består av vakuum.



- A) Bestäm potentialen överallt genom en linjeintegral av det elektriska fältet. (4 poäng)
 B) Bestäm potentialen överallt genom att lösa Poissons ekvation. (4 poäng)

Förståelsedel (4 poäng)

c) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

	ja	?	nej
Elektrostatiken kan beskrivas full ut med två, och endast två postulat.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Den elektrostatiska teorin bygger på postulat som enbart kan visas experimentellt.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Den elektromagnetiska teorin är ett exempel på klassisk fysikalisk teori.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Den elektromagnetiska teorin har ett makroskopiskt synsätt.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
I en makroskopisk teori innehåller varje litet volymselement, dV , väldigt många laddningar som är homogent fördelade i volymselementet.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Det elektrostatiska fältet definieras utifrån den kraft som kan mätas upp på en testladdning som befinner sig i nämnda fält.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

d) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

	ja	?	nej
Det elektrostatiska fältet, E , har enheten V/m.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
De elektrostatiska fältlinjerna beskriver alltid banor med start och slut i laddningar.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Två positivt laddade sfärer påverkar varandra med en attraktiv kraft.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Definitionen av det elektriska fältet utifrån kraftverkan på en testladdning förutsätter att kontinuitetsekvationen är giltig.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
En ensam punktladdning placerad i origo kan i vissa fall ge upphov till E-fältskomponenter som inte är riktade i radiell led.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Elektrostatiska potentiallinjer är parallella med E-fältslinjerna.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

e) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

	ja	?	nej
Randvillkoret för E-fältets tangentialkomponent härleds från postulatet om E-fältets divergens.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Randvillkoret för E-fältets normalkomponent härleds postulatet om E-fältets divergens.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
I elektrostatiken KAN E-fältets tangentialkomponent vara kontinuerlig i gränsen mellan två material med olika permittivitet.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
I elektrostatiken KAN E-fältets normalkomponent vara kontinuerlig i gränsen mellan två material med olika permittivitet.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
I elektrostatiken KAN D-fältets tangentialkomponent vara kontinuerlig i gränsen mellan två material med olika permittivitet.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
I elektrostatiken KAN D-fältets normalkomponent vara kontinuerlig i gränsen mellan två material med olika permittivitet.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

f) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

	ja	?	nej
Poisson's ekvation har en entydig lösning om givna randvillkor är uppfyllda.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Laplace's ekvation kan lösas med hjälp av numeriska lösare, den beräknade numeriska lösningen är därvid lika med den exakta lösningen (som hade erhållits om problemet löstes analytiskt), i de grid-punkter som används för att diskretisera lösningsområdet.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Speglingsmetoden kan användas vid spegling av laddningsfördelningar i plana isolerade ytor.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Speglingsmetoden kan användas vid spegling av punktladdningar ett stort plan av plast.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Speglingsmetoden kan användas vid beräkning av E-fältet från en kubisk laddningsfördelning ovanför ett mycket stort ledande plan.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Speglingsmetoden kan användas för att lösa fältproblem med en fördelning av punktladdningar som ligger nära ett 90° hörn mellan två oändligt stora metalliska halvplan.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

2 Elektrostatik

Problemlösningsdel (8 poäng)

Ett tunt metalliskt skal är format som en sfär med radie a och tillförs en laddning Q .

- A) Bestäm kapacitansen. (2 poäng)
- B) Vad är energitätheten hos det elektriska fältet på ett avstånd r från sfärens centrum ($r > a$). (1 poäng)
- C) Vad är den totala lagrade energin i systemet. (1 poäng)
- D) Ytterligare en koncentrisk sfär med radie $r = b$, placeras utanför den ursprungliga sfären vid $r = a$. Därefter kopplas en potential V mellan det yttre och det inre skalet. Bestäm a så att det elektriska fältet nära ytan på det inre skalet blir så litet som möjligt. (4 poäng)

Förståelsedel (4 poäng)

e) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

Gauss lag på punktform och på integralform är helt ekvivalenta och beskriver ekvivalent fysik.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Kontinuitetsekvationen kan härledas från de elektrostatiska postulaten.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Den grundläggande fysiken i problemlösningsdelen ovan bygger bland annat på Gauss lag.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Den grundläggande fysiken i problemlösningsdelen ovan bygger bland annat på att B-fältet är rotationsfritt.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Den grundläggande fysiken i problemlösningsdelen ovan bygger bland annat på att E-fältet är divergensfritt.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Den grundläggande fysiken i problemlösningsdelen ovan bygger bland annat på att E-fältets är konservativt.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

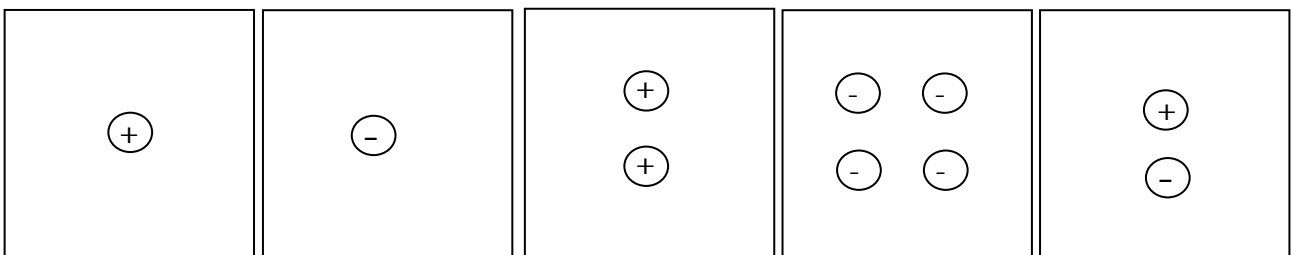
f) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

Elektriska dipoler används som modell när man vill beskriva de dielektriska egenskaperna hos ett polariserbart material.	ja	?	nej
Elektriska dipoler används som modell när man vill förklara varför E-fältet är noll i en metall.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
E-fältet från en elektrisk dipol är rotationsfritt.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Det elektriska fältet, E , från en elektrisk dipol avtar med avståndet som $1/R^3$.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
P fältet definieras genom att summera antalet dipolmoment i en liten volym dV , och sedan uttrycka P som totalt dipolmomentet per volymenhet.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
I en volym vatten som inte utsätts för något pålagt E-fält är det rimligt att anta att $P = 1.0$.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

g) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

Källan till förskjutningsfältet D är de fria laddningarna.	ja	?	nej
Sambandet $D = \epsilon E$ beskriver alltid att D är direkt proportionellt av E för alla material.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Polarisationsfältet beskriver i princip hur mycket och hur många dipoler som orienterat sig längs de externt pålagda D -fältslinjerna.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
D -fältslinjerna är alltid riktade åt samma håll som E -fältslinjerna.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Naturligt existerande material kan ha en relativ permittivitet som är mindre än 1,0.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Den relativa permittiviteten är definierad baserat på den elektriska susceptibiliteten.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

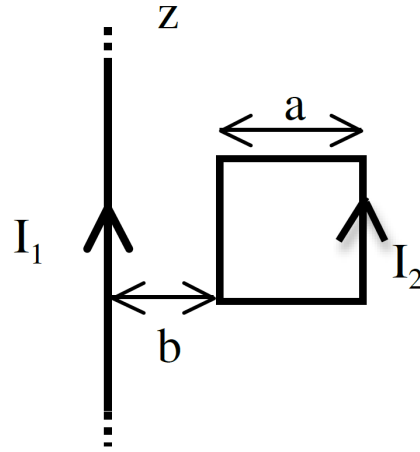
h) Skissa E-FÄLTSLINJER runt följande laddningsfördelningar. Alla bilder visar olika konfigurationer av positivt och negativt laddade sfäriska laddningar. Alla bilder beskriver centrum-tvårsnitt av laddningarna. För poäng ska det principiella utseendet vara korrekt i hela det markerade kvadratiska området för respektive konfiguration. (1 poäng)



3 Magnetostatik

Problemlösningsdel (8 poäng)

En kvadratisk slinga ligger placerad på ett avstånd b från en mycket lång tråd som leder en ström I_1 . Den kvadratiske slingan har sidlängd a och leder strömmen I_2 med riktning enligt figuren.



A) Beräkna kraften och dess riktning på slingan.

Förståelsedel (4 poäng)

b) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

	ja	?	nej
Magnetistatiken kan beskrivas full ut med två, och endast två postulat.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Den magnetostatiska teorin bygger på postulat som enbart kan visas experimentellt.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Den grundläggande fysiken i problemlösningsdelen ovan bygger bland annat på att B-fältet är divergensfritt.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Den grundläggande fysiken i problemlösningsdelen ovan bygger bland annat på att B-fältet har en nollskild rotation.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Det magnetostatiska fältet orsakas av laddningar som rör sig med i tiden varierande hastighet.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Det magnetoistatiska fältet definieras baserat utifrån den kraft som kan mätas upp på en testladdning som rör sig i nämnda fält.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

c) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

	ja	?	nej
H-fältet är rotationsfritt.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
B-fältet är divergensfritt.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
H-fältet är konservativt.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Man kan konstruera en apparat som kan mäta B-fältet genom en direkt mätning.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Man kan konstruera en apparat som kan mäta H-fältet genom en direkt mätning.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Den magnetiska vektorpotentialen kan definieras tack vara att $\nabla \times \mathbf{B}$ är nollskild.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

d) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

	ja	?	nej
En lång rak ledare placerad i vacuum som leder en ström skapar ett nollskilt \mathbf{M} -fält i vacuumet.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Vacuum modelleras med den relativa permeabiliteten $\mu_r = 0,0$.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
En permanentmagnet har ett nollskilt \mathbf{M} -fält i själva magneten.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
En permanentmagnet som är placerad i vacuum skapar ett nollskilt \mathbf{M} -fält i vacuumet.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Den magnetiska susceptibiliteten uttrycker förhållandet mellan magnetiseringsfältet, \mathbf{M} , och \mathbf{H} -fältet.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Den magnetiska dipolen kan användas för att modellera magnetiska material.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

e) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

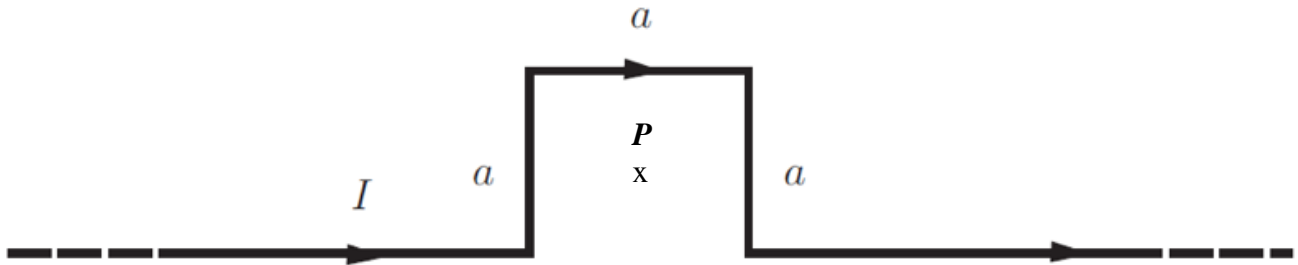
	ja	?	nej
Laddningar i rörelse som <i>endast</i> utsätts för ett B-fält <i>kan</i> påverkas av en kraft.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Laddningar som rör sig <i>parallellt</i> med B-fältslinjerna utsätts för en kraft orsakad av B-fältet.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Laddningar som rör sig <i>vinkelrätt</i> mot B-fältslinjerna utsätts för en kraft orsakad av B-fältet.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Laddningar i <i>vila</i> som <i>endast</i> utsätts för ett B-fält <i>kan</i> påverkas av en kraft.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Laddningar i <i>vila</i> som utsätts både för ett B-fält och ett E-fält påverkas <i>under vissa förutsättningar</i> av en kraft.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Kraften på en laddning orsakad av ett B-fält har samma riktning som kraften orsakad av ett E-fält.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

4 Magnetostatik

Problemlösningsdel (8 poäng)

Bilden visar en oändligt lång rak ledare, som har deformerats enligt figuren nedan. Antag att ledaren placeras i vacuum och leder strömmen I .

A) Beräkna det magnetiska fältet, B , i centrumpunkten av ledaren, (markerat med P i punkten x i figuren).



Förståelsedel (4 poäng)

b) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

	ja	?	nej
Amperes lag på punktform och på integralform är ekvivalenta och beskriver ekvivalent fysik.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Linjeintegralen av B-fältet längs en sluten slinga i ett område där strömtätheten $J = 0$ kan vara nollskild.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Den grundläggande fysiken i problemlösningsdelen ovan bygger bland annat på Gauss lag.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Den grundläggande fysiken i problemlösningsdelen ovan bygger bland annat på att B-fältet är rotationsfritt.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Den grundläggande fysiken i problemlösningsdelen ovan bygger bland annat på att divergensen av E-fältet är lika med laddningstätheten genom ϵ_0 .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Den grundläggande fysiken i problemlösningsdelen ovan bygger bland annat på att rotationen av B-fältet är lika med den fria strömtätheten gånger permeabiliteten.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

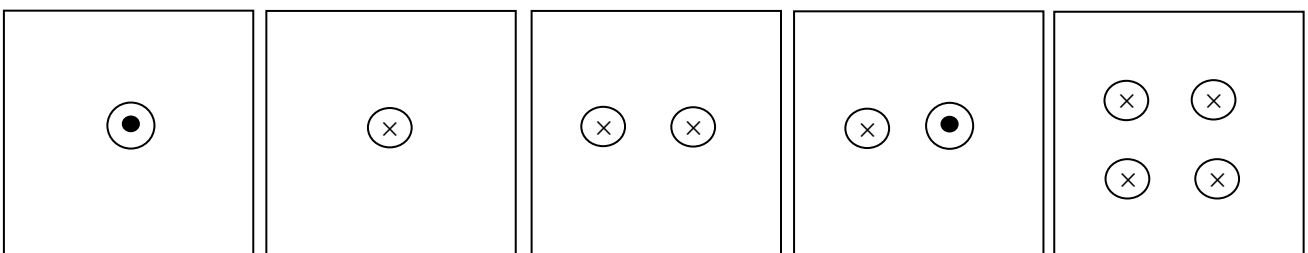
c) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

	ja	?	nej
Normalkomponenten av strömtäthetsfältet, J , är alltid kontinuerlig i gränsen mellan två material.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Tangentialkomponenten av strömtäthetsfältet, J , är alltid kontinuerlig i gränsen mellan två material.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Amperes lag kan användas för fältberäkning om man med symmetriargument kan hitta en s.k. Ampereslinga, där B-fältet har konstant riktning.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Amperes lag kan användas för fältberäkning om man med symmetriargument kan hitta en s.k. Ampereslinga, där B-fältet har konstant belopp.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Amperes lag kan användas för fältberäkning om man med symmetriargument kan hitta en s.k. Ampereslinga, där B-fältet har konstant belopp och riktning.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Amperes lag kan alltid användas istället för Biot-Savarts lag vid fältberäkningar.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

d) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

	ja	?	nej
Man kan välja divergensen av den magnetiska vektorpotentialen fritt	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Man kan välja rotationen av den magnetiska vektorpotentialen fritt	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Varje komponent av den magnetiska vektorpotentialen uppfyller Poissons ekvation	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Den magnetiska vektorpotentialen kan definieras tack vare att B-fältet är konservativt.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Från $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$ kan Kirchoffs strömlag härledas.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Från $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$ kan Kirchoffs spänningslag härledas.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

e) Skissa den magnetiska vektorpotentialen, A , runt följande strömfördelningar. Alla bilder visar olika konfigurationer av strömmar som går in eller ut ur papperet. För poäng ska det principiella utseendet och fältlinjernas riktningar vara korrekta i hela det markerade kvadratiske området för respektive konfiguration. (1 poäng)



Elektrostatik 1

- a) Vi behöver finna E-fältet. Vi har dielektriska material, därför använder vi D-fältet.

Sfärisk symmetri ger:
$$\mathbb{D} = \frac{Q_{f,enc}}{4\pi r^2} \hat{a}_r$$

Vi har tre områden, $r < a$, $a < r < b$ och $b < r$.

$r < a$: Q är jämnt fördelat över sfärens volym:

$$\rho_{fri} = \frac{3Q}{4\pi a^3}$$

Vilket ger $Q_{f,enc} = \int_V \rho_{fri} dv = \frac{3Q}{4\pi a^3} \frac{4}{3}\pi r^3 = Q \left(\frac{r}{a}\right)^3$

Vi får alltså

$$\mathbb{D} = \frac{Qr}{4\pi a^3} \hat{a}_r$$

vilket ger

$$\mathbb{E} = \frac{1}{\epsilon} \mathbb{D} = \frac{Qr}{4\pi \epsilon \epsilon_0 a^3} \hat{a}_r$$

$a < r < b$: För en Gaussyta med radie $a < r < b$ är all laddning innesluten.

Detta ger

$$\mathbb{D} = \frac{Q}{4\pi r^2} \hat{a}_r$$

och

$$\mathbb{E} = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 r^2} \hat{a}_r.$$

$b < r$: Det omgivande metallskalet är jordat, och har då en laddning $-Q$. Vi får då ingen innesluten nettoladdning, vilket ger:

$$|E| = 0.$$

Potentialen: $V = -\int_{\infty}^r E \cdot d\vec{l}$

$r > b$: $V = -\int_{\infty}^r E r dr = 0$

$a \leq r \leq b$:
$$V = -\int_{\infty}^r E r dr' = -\int_b^r \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r'^2} dr' = \left(\frac{-Q}{4\pi\epsilon_0 r'} \right) \Big|_b^r$$

$$= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{b} \right)$$

$r < a$:
$$V = -\int_{\infty}^r E r dr' = -\int_a^r E r dr' + V(a)$$

$$= -\int_a^r \frac{Q r'}{4\pi\epsilon_0 a^3} dr' + V(a) = \frac{-Q}{4\pi\epsilon_0 a^3} \left(\frac{r'^2}{2} \right) \Big|_a^r + V(a)$$

$$= \frac{Q}{8\pi\epsilon_0 a^3} (a^2 - r^2) + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)$$

$$= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{2\epsilon_0 a^3} (a^2 - r^2) + \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) \right)$$

$$V = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{2\epsilon_0 a^3} (a^2 - r^2) + \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) \right), & r < a \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{b} \right), & a \leq r \leq b \\ 0, & b \leq r \end{cases}$$

b) $\nabla \cdot (\epsilon \nabla V) = -\rho$ Poissons equation

$$\epsilon = \begin{cases} \epsilon_r \epsilon_0, & r < a \\ \epsilon_0 & r > a \end{cases}$$

$$\rho = \begin{cases} \frac{3Q}{4\pi a^3} & r < a \\ 0 & r > a \end{cases}$$

Vi har återigen tre områden.

$b < r$:

$$\nabla^2 V_3 = 0,$$

$$V_3(b) = 0$$

$$V_3(\infty) = 0$$

ger $V_3(r) = 0.$

$a < r < b$:

$$\nabla^2 V_2 = 0$$

$$V_2(b) = 0$$

$$\nabla^2 V_2 = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dV_2}{dr} \right) = 0$$

$$r^2 \frac{dV_2}{dr} = C_1$$

$$V_2 = -\frac{C_1}{r} + C_2, \quad C_1 = b C_2$$

$r < a$:

$$\nabla^2 V_1 = \frac{-\rho}{\epsilon}$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dV_1}{dr} \right) = \frac{-\rho}{\epsilon}$$

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dV_i}{dr} \right) = \frac{-\rho}{\epsilon} r^2$$

$$r^2 \frac{dV_i}{dr} = \frac{-\rho r^3}{3\epsilon} + C_3$$

$$V_i = \frac{-\rho r^2}{6\epsilon} - \frac{C_3}{r} + C_4$$

Potentialen skall uppfylla

$$V_1(a) = V_2(a)$$

$$\epsilon_r V_1'(a) = V_2'(a)$$

Samt vara ändlig i origo $\Rightarrow C_3 = 0$

$$V_1(a) = \frac{-\rho a^2}{6\epsilon} + C_4 = -\frac{bC_2}{a} + C_2 = V_2(a)$$

$$C_2 \left(1 - \frac{b}{a} \right) = \frac{-\rho a^2}{6\epsilon} + C_4$$

$$\epsilon_r \frac{-\rho a}{3\epsilon} = \frac{bC_2}{a^2}$$

$$C_2 = \frac{-\rho a^3}{3\epsilon_0 b}$$

$$C_4 = \frac{-\rho a^3}{3\epsilon_0 b} \left(1 - \frac{b}{a} \right) - \frac{\rho a^2}{6\epsilon}$$

$$V_1 = \frac{-\rho}{6\epsilon} (r^2 - a^2) - \frac{\rho a^3}{3\epsilon_0} \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right)$$

$$V_2 = \frac{-\rho a^3}{3\epsilon_0 b} \left(1 - \frac{b}{r} \right) = \frac{-\rho a^3}{3\epsilon_0} \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{r} \right)$$

alltså här V_i :

$$V = \begin{cases} \frac{\rho}{3\epsilon_0} \left(\frac{1}{2\epsilon r} (a^2 - r^2) + a^3 \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) \right) & r < a \\ \frac{\rho a^3}{3\epsilon_0} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{b} \right) & a < r < b \\ 0 & r > b \end{cases}$$

$$\rho = \frac{3Q}{4\pi a^3} \text{ ger samma som i a)}$$

- Electrostatic > Capacitance

A thin metallic sphere of radius a has charge Q .

- What is the capacitance?
- What is the energy density of the electric field at a distance r from the sphere's center?
- What is the total energy stored?
- If a potential V is established between this sphere ($r=a$) and an outer concentric thin metal sphere ($r=b$), determine a in such a way that the electric field near the surface of the inner sphere is a minimum.

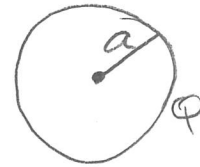
Solution:

(a) $C = ?$

$$\vec{E} = \hat{R} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2}$$

$$V = -\int_{\infty}^a \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \hat{R} \cdot \hat{R} dR = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{R} \right]_{\infty}^a = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a}$$

$$\Rightarrow C = \frac{Q}{V} = 4\pi\epsilon_0 a$$



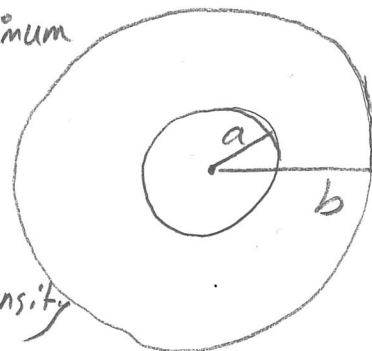
(b) $w_e = \frac{1}{2} \vec{D} \cdot \vec{E} = \frac{1}{2} \epsilon_0 |E|^2 = \frac{Q^2}{32\pi^2 \epsilon_0 R^4}$

(c) $W_e = \int w_e d\tau = \int_a^{\infty} \frac{Q^2}{32\pi^2 \epsilon_0 R^4} 4\pi R^2 dR = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0} \left[-\frac{1}{R} \right]_a^{\infty} = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 a}$

(d) $a = ?$ so that $E_R|_{R=a}$ is minimum

If we suppose a charge Q on the inner sphere, the electric field intensity

for $a < R < b$ is $E(R) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \hat{R}$ (I)



we need to relate E with V .

$$V = - \int_b^a \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} dR = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right]$$

$$\Rightarrow Q = \frac{4\pi\epsilon_0 V}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}} \quad \textcircled{II}$$

putting \textcircled{II} into \textcircled{I} , one gets

$$E(R) = \frac{4\pi\epsilon_0 V}{\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) 4\pi\epsilon_0 R^2} = \frac{Vab}{(b-a)R^2}$$

$$E(R=a) = \frac{Vab}{(b-a)a^2} = \frac{Vb}{(b-a)a}$$

To find the optimal a to get E minimized:

$$\frac{dE(R=a)}{da} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{-Vb(b-2a)}{a^2(b-a)^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad b = 2a$$

$$\boxed{a = \frac{b}{2}} \quad \rightarrow \quad E_{\min}(a) = \frac{2V}{a}$$

Magnetostatik 3

4) B-fältet från en linjeströmkälla är

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r} \hat{\varphi}$$

Vilket ger kraften

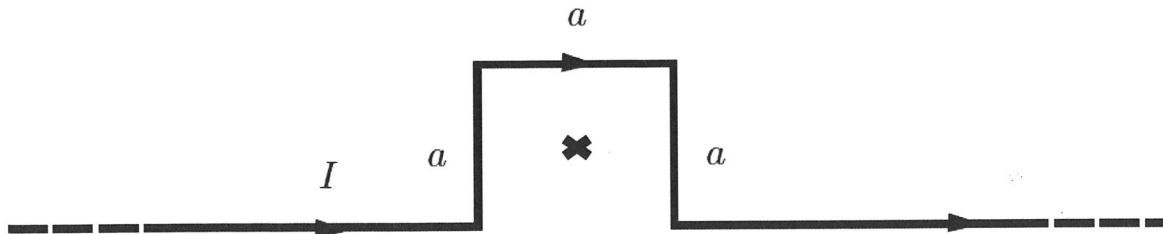
$$\begin{aligned} F_m &= I_2 \oint d\vec{e} \times \vec{B} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \oint d\vec{e} \times \frac{\hat{\varphi}}{r} \\ &= \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \left[\underbrace{\int_b^{a+b} \hat{r} dr \times \frac{\hat{\varphi}}{r}}_{\text{botten}} + \underbrace{\int_0^a \hat{z} dz \times \frac{\hat{\varphi}}{a+b}}_{\text{höger}} \right] \\ &\quad + \left[\underbrace{\int_b^{a+b} -\hat{r} dr \times \frac{\hat{\varphi}}{r}}_{\text{toppen}} + \underbrace{\int_0^a -\hat{z} dz \times \frac{\hat{\varphi}}{b}}_{\text{vänster}} \right] \end{aligned}$$

kraften på botten och toppen tar ut varandra.

$$\begin{aligned} \Rightarrow F_m &= \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \left[\int_0^a \frac{-\hat{r}}{a+b} dz + \int_0^a \frac{\hat{r}}{b} dz \right] \\ &= \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \hat{r} \left(\frac{a}{b} - \frac{a}{a+b} \right) = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \frac{a^2}{b(a+b)} \hat{r} \end{aligned}$$

- Magnetostatic > Ampere's / Biot-Savart law

As shown in figure below, there is deformation on an infinitely long, straight line. If the wire is placed in vacuum and carries the current of I , then calculate the magnetic flux density (B) in the center of the wire.



Solution:

conventional way (not recommended and time-consuming) is to break down the structure into 5 regions and apply Biot-Savart law for each one of them.

Of course, it's good to take advantage

of the symmetry of the problem by $\vec{r} = \frac{a}{2} \hat{x}$

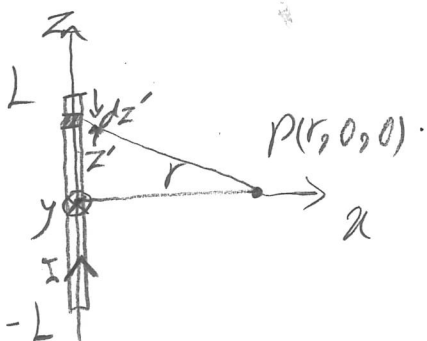
noticing that regions ① and ⑤ are gonna

have the same effect at the observation point, so do the regions

②, ③ and ④.

For regions ②, ③, and ④, we can start from the case below

(see example 6.4 Cheng 2nd edition p. 236)



$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{d\vec{l}' \times \vec{R}}{|\vec{R}|^3}, \quad d\vec{l}' = dz' \hat{z}$$

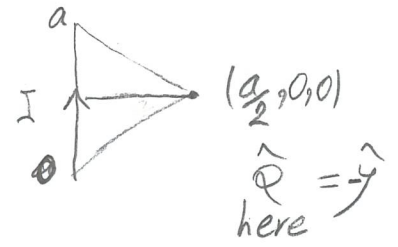
$$\vec{R} = r\hat{r} - z'\hat{z}$$

$$\dots \vec{B} = \hat{\varphi} \frac{\mu_0 I L}{2\pi r \sqrt{L^2 + r^2}} \quad (I)$$

So by comparison, for region ② we will have for substitution

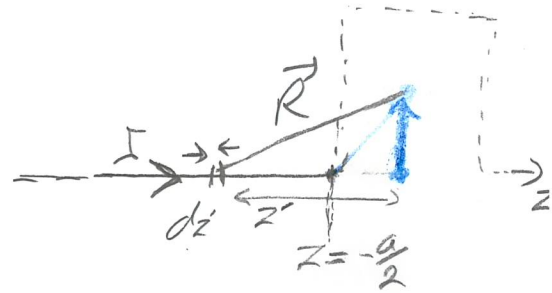
in (I):

$$\begin{cases} L = \frac{a}{2} \\ r = \frac{a}{2} \end{cases}$$



$$\begin{aligned} \Rightarrow \vec{B}_2 = \vec{B}_3 = \vec{B}_4 &= -\hat{y} \frac{\mu_0 I \frac{a}{2}}{2\pi \frac{a}{2} \sqrt{2 \frac{a^2}{4}}} \\ &= -\hat{y} \frac{\sqrt{2} \mu_0 I}{2\pi a} \quad \text{(II)} \end{aligned}$$

For region ① and ⑤:



$$-a < z \leq -\frac{a}{2}$$

$$\vec{R} = \frac{a}{2} \hat{x} - z' \hat{z}$$

$$\vec{B}_1 = \vec{B}_5 = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-\infty}^{-\frac{a}{2}} \frac{dz' \hat{z} \times (\frac{a}{2} \hat{x} - z' \hat{z})}{(\frac{a^2}{4} + z'^2)^{3/2}}$$

$$= \hat{y} \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-\infty}^{-\frac{a}{2}} \frac{\frac{a}{2} dz'}{(\frac{a^2}{4} + z'^2)^{3/2}}$$

$$= \hat{y} \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

so overall, $\vec{B} = 2\vec{B}_1 + 3\vec{B}_2$

$$= \hat{y} \frac{\mu_0 I}{\pi a} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \hat{y} 3 \frac{\sqrt{2} \mu_0 I}{2\pi a}$$

$$= \hat{y} \frac{\mu_0 I}{\pi a} \left(1 - 2\sqrt{2}\right)$$

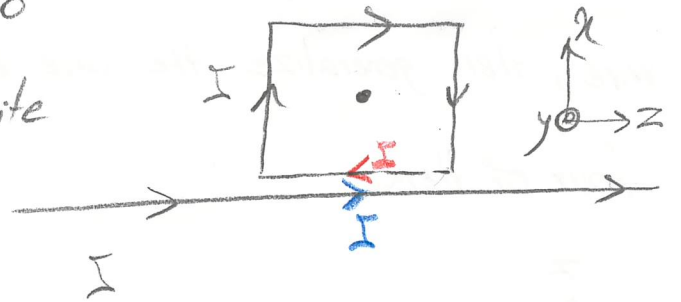
But the shortcut to solve the problem is as follows:

We can consider the structure as a square loop + an infinite long line which will negate the effect of the bottom side of the square (see the figure below) and will give the original structure

Then all we need to do is to add up the field of an infinite

long line (from Ampere's

law we know that easily) to



that of an square. For the square, we can again use the same logic used in (I) and multiply (II) by a factor of 4.

so $\vec{B}_1 = \hat{y} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \Big|_{r=a/2} = \hat{y} \frac{\mu_0 I}{\pi a}$, $\vec{B}_2 = 4 \times \left[-\hat{y} \frac{\sqrt{2} \mu_0 I}{2\pi a} \right]$
 (for the long, infinite line)

$$\vec{B} = \hat{y} \frac{\mu_0 I}{\pi a} - \hat{y} \frac{2\sqrt{2} \mu_0 I}{\pi a} = \hat{y} \frac{\mu_0 I}{\pi a} [1 - 2\sqrt{2}]$$