

**Övningstenta i Elektromagnetisk fältteori,
2018-12-01 kl. 8.30-12.30
Kurskod EEF031**

Tillåtna hjälpmedel: BETA, Physics Handbook,
Formelsamling i Elektromagnetisk fältteori.
Valfri kalkylator, minnet måste raderas innan tentamensstart.
Inga egna anteckningar utöver egna formler på sista
bladet i formelsamlingen i elektromagnetisk fältteori

Förfrågningar: Carl Holmberg,
Examinator: Andreas Fhager,
Lösningar: Anslås på kursens hemsida
Resultatet: Distribueras på föreläsning
Granskning: Plats och tid annonseras på kurshemsidan

Till tentan: Elektrostatiken (tal 1 och 2) och Magnetostatiken (tal 3 och 4) bedöms var för sig och poängen tillgodoräknas separat på tentan. Även teoridel och problemdel räknas separat. Duggaresultatet räknas om till en procentsats av maxpoängen och respektive tal på tentan kan om så önskas hoppas över med lika många procent av maxpoängen tillgodo. Om man trots poäng tillgodo från duggan väljer att räkna motsvarande tal på tentan gäller bästa resultatet. Resultat från duggan gäller på ordinarie tenta och de två närmast därpå följande omtentamina.

OBS!

Svaren på förståelsedelen skall ges direkt på tesen som ska lämnas in

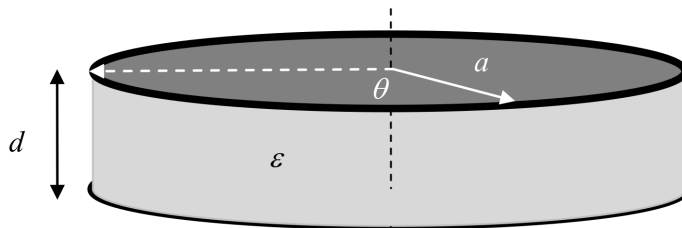
Förståelsefrågorna besvaras genom att markera en av rutorna efter varje påstående till höger. En och endast en ruta på varje rad skall markeras. De tre svarsalternativen (från vänster till höger är) Rätt, Vet ej och Fel. Riktigt svar ger +0.2 poäng oriktigt svar ger -0.2 p. Vet ej är neutralt och ger noll poäng. Förståelseuppgifterna ger maximalt 1 poäng och lägst -1poäng och man kan därför få 1 poäng även med ett vet ej svar.

Anonym kod:

1 Elektrostatik

Problemlösningsdel (8 poäng)

En kondensator består av två ledande cirkulära plattor med radie a åtskilda med ett avstånd d , enligt figuren. Utrymmet mellan plattorna är fyllt av dielektriskt material, och kanteffekter kan försummas.



- A) Beräkna kapacitansen givet att den relativa permittiviteten ϵ_r är konstant mellan plattorna. (4 poäng)
- B) Beräkna kapacitansen givet att den relativa permittiviteten är vinkelberoende enligt $\epsilon_r = 1 + \cos^2\theta$. (4 poäng)

Förståelsedel (4 poäng)

c) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

	ja	?	nej
Elektrostatiken bygger på två och endast två postulat.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Den elektromagnetiska teorin bygger på postulat som kan härledas från ett antal fysikaliska "axiom".	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Den elektromagnetiska teorin är ett exempel på en teori som innefattar kvantmekaniska effekter.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Den elektromagnetiska teorin har ett makroskopiskt synsätt.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
I en makroskopisk teori innehåller varje litet volymselement, dV , antingen endast en laddning (vid tex integration av laddningsfördelningar) eller en dipol (vid tex beskrivning av ett material).	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Det elektrostatiska fältet definieras utifrån den kraft som kan mätas upp på en testladdning som befinner sig i nämnda fält.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

d) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

	ja	?	nej
Det elektrostatiska fältet, E , har enheten V/sm.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
De elektrostatiska fältlinjerna beskriver alltid slutna slingor.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Två negativt laddade sfärer påverkar varandra med en attraktiv kraft.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Definitionen av det elektriska fältet utifrån kraftverkan på en testladdning förutsätter att kontinuitetsekvationen är giltig.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
En ensam punktladdning placerad i origo ger endast upphov till E-fält i radiell led.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Elektrostatiska potentiallinjer är vinkelräta mot E-fältslinjerna.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

e) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

	ja	?	nej
I elektrostatiken är E-fältets tangentialkomponent ALLTID kontinuerlig i gränsen mellan två material med olika permittivitet.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
I elektrostatiken är E-fältets normalkomponent ALLTID kontinuerlig i gränsen mellan två material med olika permittivitet.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
I elektrostatiken är D-fältets tangentialkomponent ALLTID kontinuerlig i gränsen mellan två material med olika permittivitet.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
I elektrostatiken är D-fältets normalkomponent ALLTID kontinuerlig i gränsen mellan två material med olika permittivitet.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Randvillkoret för E-fältets tangentialkomponent härleds från postulatet om E-fältets rotation.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Randvillkoret för E-fältets normalkomponent härleds postulatet om E-fältets rotation.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

f) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

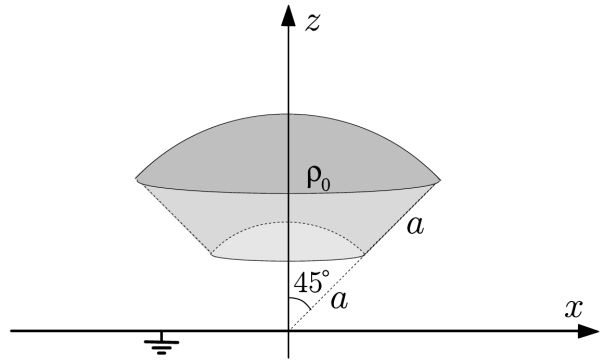
	ja	?	nej
Poisson's ekvation har alltid minst två olika lösningar som var och en uppfyller givna randvillkor.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Speglingsmetoden kan alltid användas oavsett problemets geometri för att lösa Poisson's ekvation.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Entydighetssatsen säger att om en lösning till Lapace's ekvation uppfyller minst ett av eventuellt fler givna randvillkor så är denna lösning en unik lösning till Laplace's ekvation.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Speglingsmetoden kan användas vid spegling av laddningsfördelningar i plana isolerade ytor.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Man kan använda speglingsmetoden för att beräkna E-fältet från en kubisk laddningsfördelning ovanför ett "mycket stort", ledande plan som är jordat.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Man kan använda speglingsmetoden för att beräkna E-fältet från en kubisk laddningsfördelning ovanför ett "litet", ledande plan som är jordat.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

2 Elektrostatik

Problemlösningsdel (8 poäng)

Figuren visar ett koniskt område mellan två sfärer, med radierna a respektive $2a$. Konen har öppningsvinkeln 45° , enligt figur, och sfärernas centrum är i origo. Området är fyllt med en rymdladdningstäthet ρ_0 som är jämt fördelad över hela konens volym. Konen befinner sig ovanför det jordade planet $z = 0$. Överallt är $\epsilon_r = 1$.

A) Bestäm jordplanets ytladdningstäthet i origo.



Förståelsedel (4 poäng)

b) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

- | | | | |
|--|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| Gauss lag på punktform och på integralform är helt ekvivalenta och beskriver ekvivalent fysik. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| Kontinuitetsekvationen kan härledas från de elektrostatiska postulaten. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| Den grundläggande fysiken i problemlösningsdelen ovan bygger bland annat på Gauss lag. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| Den grundläggande fysiken i problemlösningsdelen ovan bygger bland annat på att B-fältet är rotationsfritt. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| Den grundläggande fysiken i problemlösningsdelen ovan bygger bland annat på att E-fältet är rotationsfritt. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| Den grundläggande fysiken i problemlösningsdelen ovan bygger bland annat på att rotationen av B-fältet är lika med den fria strömtätheten gånger permeabiliteten. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

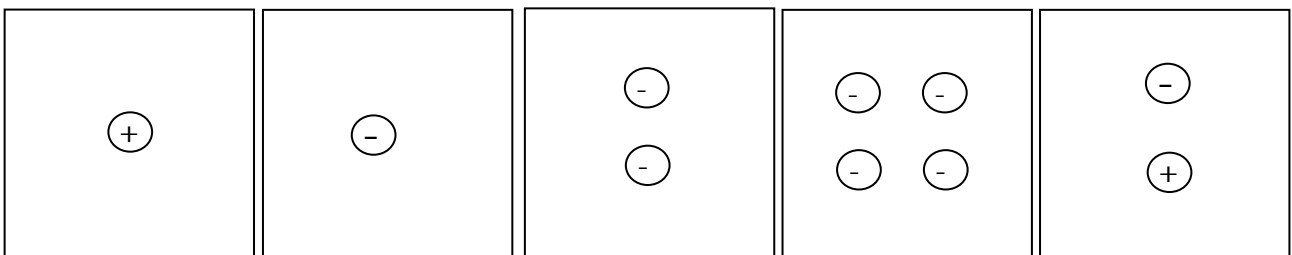
c) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

- | | | | |
|---|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| Elektriska dipoler används som modell när man vill beskriva de dielektriska egenskaperna hos ett polariserbart material. | ja | ? | nej |
| Uttrycket för E-fältet från en elektrisk dipol gäller även om man skulle byta ut en laddning i dipolen så att båda laddningarna får samma tecken. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| E-fältet från en elektrisk dipol är rotationsfritt. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| Den elektrostatiska potentialen från en elektrisk dipol avtar som $1/R$. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| M fältet spelar samma roll i magnetostatiken som polarisationsfältet P i elektrostatiken. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| Den elektriska suseptibiliteten är ett mått på hur lätt ett dielektriskt material polariseras av ett pålagt elektiskt fält. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

d) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

- | | | | |
|---|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| Källan till förskjutningsfältet D är de fria laddningarna. | ja | ? | nej |
| Sambandet $D = \epsilon E$ beskriver alltid att D är direkt proportionellt av E för alla material. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| Polarisationsfältet beskriver i princip hur mycket och hur många dipoler som orienterat sig längs de externt pålagda D-fältslinjerna. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| D-fältslinjerna är alltid riktade åt samma håll som E-fältslinjerna. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| Naturligt existerande material kan ha en relativ permittivitet som är mindre än 1,0. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| Naturligt existerande material kan ha en relativ permittivitet som är oändligt stor. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

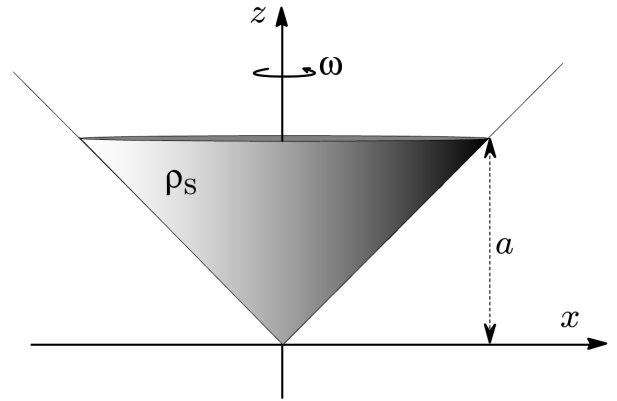
e) Skissa EKVIPOTENTYTORNA runt följande laddningsfördelningar. Alla bilder visar olika konfigurationer av positivt och negativt laddade sfäriska laddningar. Alla bilder beskriver centrum-tvårsnitt av laddningarna. För poäng ska det principiella utseendet vara korrekt i hela det markerade kvadratiske området för respektive konfiguration. (1 poäng)



3 Magnetostatik

Problemlösningsdel (8 poäng)

En rät cirkulär kon med spetsen i origo har z-axeln som symmetriaxel. Konens höjd är a och vinkeln mellan konen och z-axeln är 45° , vilket gör att avståndet från origo till konens kant är $\sqrt{2}a$. Man lägger en konstant ytladdningstäthet ρ_s på konens mantelyta och låter konen snurra med konstant vinkelhastighet ω runt sin symmetriaxel, enligt figur. Ytladdningen följer med konen vilket ger upphov till en ytströmtäthet $\mathbf{J}_s(\mathbf{R})$.



- A)** Bestäm ett uttryck för ytströmtätheten $\mathbf{J}_s(\mathbf{R})$ som funktion av avståndet \mathbf{R} från origo. Uttrycket får innehålla ρ_s , ω , \mathbf{R} och en av de sfäriska enhetsvektorerna. (3 poäng)
B) Bestäm den magnetiska flödestätheten i origo, $\mathbf{B}(\mathbf{0})$. Det är luft överallt. (5 poäng)

Förståelsedel (4 poäng)

c) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

	ja	?	nej
I grunden bygger fysiken i problemlösningsdelen på ett och endast ett postulat om B-fältet.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
I grunden bygger fysiken i problemlösningsdelen på två och endast två postulat om B-fältet.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
De magnetostatiska postulaten kan härledas från de elektrostatiska postulaten	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Kontinuitetsekvationen för likström kan härledas utifrån de magnetostatiska postulaten.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Det magnetostatiska fältet orsakas av laddningar som rör sig med i tiden varierande hastighet.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Det magnetoistatiska fältet definieras baserat utifrån den kraft som kan mätas upp på en testladdning som rör sig i nämnda fält.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

d) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

	ja	?	nej
B-fältet är rotationsfritt.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
B-fältet är divergensfritt.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
B-fältet är konservativt.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Man kan konstruera en apparat som kan mäta B-fältet genom en direkt mätning.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Man kan konstruera en apparat som kan mäta H-fältet genom en direkt mätning.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
B-fältet från en lång rak ledare som för en ström är riktat åt samma håll som strömmen.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

e) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

	ja	?	nej
Man kan välja divergensen av den magnetiska vektorpotentialen fritt.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Den magnetiska vektorpotentialen kan definieras tack vara att $\nabla \times \mathbf{B}$ är nollskild.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Varje komponent av den magnetiska vektorpotentialen uppfyller Poissons ekvation formulerad i termer av strömtäthet och magnetisk vektorpotential.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Det magnetiska flödet genom en yta kan beräknas som en linjeintegral av det magnetiska B-fältet längs den slinga som begränsar ytan.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Magnetiska susceptibilitet uttrycker förhållandet mellan magnetiseringsfältet, \mathbf{M} , och B-fältet	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Den magnetiska vektorpotentialen pekar i motsatt riktning jämfört med strömmen.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

f) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

	ja	?	nej
Om det går en ström i en kabel så är det ett exempel på en konduktionsström.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Ett blixtnedslag är ett exempel på en konvektionsström.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
En god ledare har en konduktivitet, σ , som är så nära noll som möjligt.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
En konvektionsström kan beskrivas med hjälp av Ohms lag.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
H-fältets roll i magnetostatiken påminner om D-fältets roll i elektrostatiken.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
M-fältets roll i magnetostatiken påminner om E-fältets roll i elektrostatiken.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

4 Magnetostatik

Problemlösningsdel (8 poäng)

Ett lager med oändlig utsträckning i x- och y-led bestående av ett ledande, icke-magnetiskt, material med tjocklek $2a$ är placerat vinkelrätt mot z-axeln mellan $-a < z < a$. Lagret leder en ström med strömtäthet $\mathbf{J} = J_0 \frac{z^3}{a^3} \hat{a}_x$, där J_0 är en konstant.

A) Beräkna det magnetiska fältet överallt. *Ledning:* Tänk ut, och motivera, om det magnetiska fältet vid $z = 0$ är nollskilt eller ej.

Förståelsedel (4 poäng)

b) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

	ja	?	nej
Amperes lag på punktform och på integralform är ekvivalenta och beskriver ekvivalent fysik.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Linjeintegralen av B-fältet längs en sluten slinga i ett område där strömtätheten $\mathbf{J} = 0$ kan vara nollskild.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Den grundläggande fysiken i problemlösningsdelen ovan bygger bland annat på Gauss lag.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Den grundläggande fysiken i problemlösningsdelen ovan bygger bland annat på att B-fältet är rotationsfritt.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Den grundläggande fysiken i problemlösningsdelen ovan bygger bland annat på att divergensen av E-fältet är lika med laddningstätheten genom ϵ_0 .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Den grundläggande fysiken i problemlösningsdelen ovan bygger bland annat på att rotationen av B-fältet är lika med den fria strömtätheten gånger permeabiliteten.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

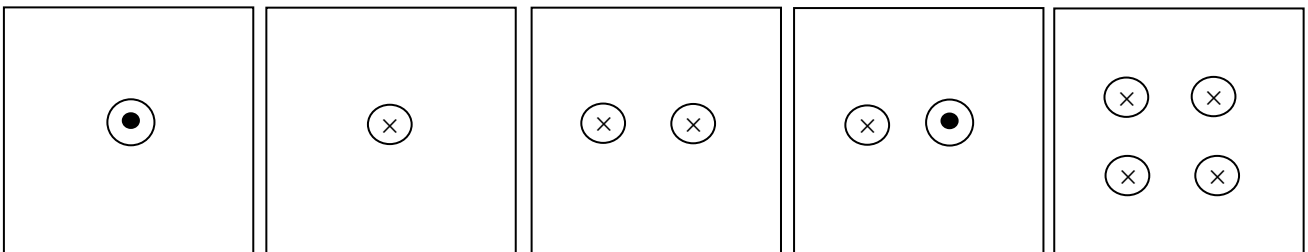
c) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

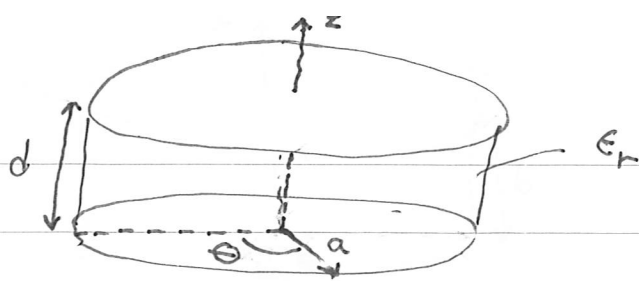
	ja	?	nej
Randvillkoret för B och H-fältens normalkomponent härleds från postulatet om $\nabla \times \mathbf{B}$.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Randvillkoret för B och H-fältens tangentialkomponent härleds från postulatet om $\nabla \times \mathbf{B}$.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
B-fältets normalkomponent är ALLTID kontinuerlig i gränsen mellan två material med olika permeabiliteter.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
B-fältets tangentialkomponent är ALLTID kontinuerlig i gränsen mellan två material med olika permeabiliteter.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
H-fältets normalkomponent är ALLTID kontinuerlig i gränsen mellan två material med olika permeabiliteter.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
H-fältets tangentialkomponent är ALLTID kontinuerlig i gränsen mellan två material med olika permeabiliteter.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

d) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

	ja	?	nej
Permanentmagneter har ett permanent magnetiseringsfält \mathbf{M} trots att inget yttre fält lagts på.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
En permanentmagnet är ett exempel på ett material med linjärt samband mellan B och H.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
I en permanentmagnet vill man ha ett magnetiskt material med en smal hystereskurva.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Man kan modellera en permanentmagnet genom att anta att det finns en fri ytström på dess mantelyta.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Ett ferromagnetiskt material har ett linjärt samband mellan B- och H-fälten.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Ett paramagnetiskt material förstärker ett pålagt externt fält.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

e) Skissa B-fältslinjerna runt följande strömfördelningar. Alla bilder visar olika konfigurationer av strömmar som går in eller ut ur papperet. För poäng ska det principiella utseendet och fältlinjernas riktningar vara korrekta i hela det markerade kvadratiska området för respektive konfiguration. MARKERA SÄRSKILT OM DET FINNS NÅGON PUNKT I RESPEKTIVE RUTA DÄR B-FÄLTET ÄR NOLL (1 poäng)





a) $\epsilon_r = \text{const}$

Ansätt potentialskillnad ΔV mellan plattorna:

$$\begin{cases} V(0) = 0 \\ V(d) = \Delta V \end{cases}$$

Cylindrisk symmetri \Rightarrow Cylindriska koordinater

$$\nabla^2 V = \frac{-\rho_f}{\epsilon} \quad (\epsilon \text{ konstant})$$

$$V = V(z) \Rightarrow \nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

$$0 \leq z \leq d \quad \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = \frac{-\rho_f}{\epsilon} = 0$$

$$V = C_1 z + C_2$$

$$V(0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0 \Rightarrow V = \frac{\Delta V}{d} z$$

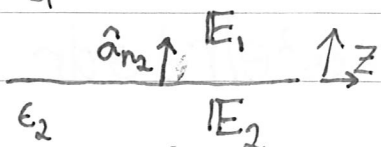
$$V(d) = \Delta V \Rightarrow C_1 = \frac{\Delta V}{d}$$

$$\vec{E} = -\nabla V = -\frac{\Delta V}{d} \hat{z}$$

BC vid $z=0$: $\hat{a}_{n2} \cdot (\mathbb{D}_1 - \mathbb{D}_2) = \rho_s$

$$\hat{z} \cdot (\epsilon_1 \vec{E}_1 - 0) = \rho_s$$

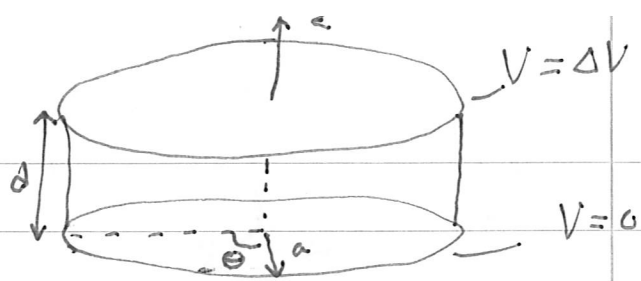
$$-\frac{\Delta V \epsilon_1}{d} = \rho_s$$



$$Q = \int \rho_s ds = -\frac{\Delta V \epsilon_1}{d} \cdot \pi a^2$$

$$\therefore C = \frac{|Q|}{\Delta V} = \frac{\pi \epsilon_1 a^2}{d} = \frac{\pi a^2 \epsilon_r \epsilon_0}{d}$$

$$b) \quad \epsilon_r = 1 + \cos^2 \theta$$



$$\begin{cases} V(0) = 0 \\ V(d) = \Delta V \end{cases}$$

$$\nabla \cdot (\epsilon \nabla V) = -\rho_f \quad (\epsilon \text{ ej konstant})$$

$$V = V(z)$$

$$\Rightarrow \nabla \cdot (\epsilon \frac{\partial V}{\partial z} \hat{z}) = -\rho_f$$

$$\frac{\partial}{\partial z} (\epsilon \frac{\partial V}{\partial z}) = -\rho_f$$

$$0 \leq z \leq d:$$

$$\epsilon \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -\rho_f = 0$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

(Samma som i a. eftersom ϵ ej beror på z .)

$$V = C_1 z + C_2$$

$$V(0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0$$

$$V(d) = \Delta V \Rightarrow C_1 = \frac{\Delta V}{d}$$

$$\Rightarrow V = \Delta V \frac{z}{d}$$

$$\mathbf{E} = -\nabla V = -\frac{\Delta V}{d} \hat{z}$$

$$\text{BC vid } z=0: \quad \hat{z} \cdot \epsilon \mathbf{E} = \rho_s$$

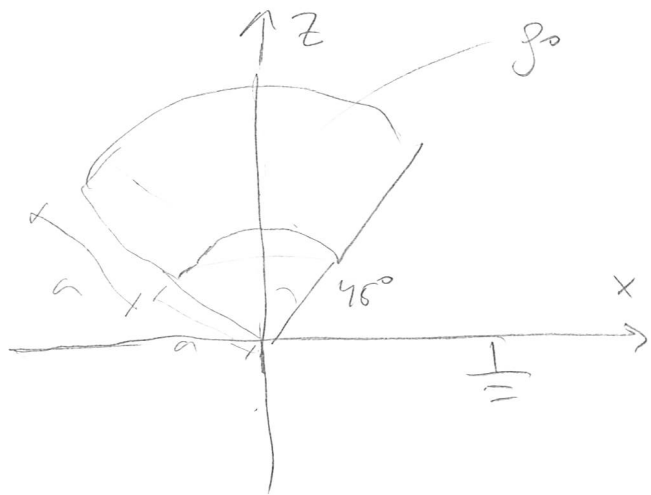
$$\rho_s = -\frac{\Delta V}{d} (1 + \cos^2 \theta) \epsilon_0$$

$$Q = \int \rho_s ds = -\frac{\Delta V}{d} \int_0^a \int_0^{2\pi} (1 + \cos^2 \theta) r d\theta dr$$

$$= -\frac{\Delta V}{d} \frac{a^2}{2} \int_0^{2\pi} (1 + \cos^2 \theta) d\theta =$$

$$= -\frac{\Delta V a^2}{2d} \left(\theta + \frac{1}{2} (\theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta) \right) \Big|_0^{2\pi} = \frac{3\pi \Delta V a^2}{2d}$$

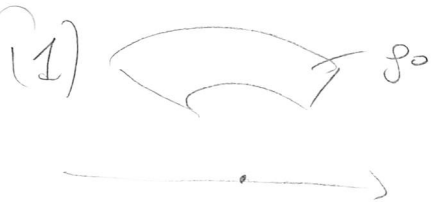
$$\therefore C = \frac{|Q|}{\Delta V} = \frac{3\pi a^2}{2d}$$



Koniskt område mellan två sfärer.

Beräkna jordplanets ytladdningsföretet i origo.

Spegla i $z=0$ för att uppfylla randvillkoren



Dela in områdena i små volymelement
Varje element ger bidraget



$$dE(0) = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\mathbf{0} - R' \hat{a}_R)}{R'^3}$$

Integrera $dq = \rho_0 R'^2 \sin\theta' d\theta' dR' d\varphi'$ för svare (1)

Bidrag från (2)

$$\vec{E}(0) = \frac{\rho_0}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^a -\hat{a}_R \sin\theta' d\theta' dR' d\varphi'$$

$$\hat{a}_R = \cos\varphi' \sin\theta' \hat{x} + \sin\varphi' \sin\theta' \hat{y} + \cos\theta' \hat{z}$$

För \hat{x} och \hat{y} kommer integranderna ha en $\cos\varphi'$ respektive $\sin\varphi'$ term som integreras från 0 till π . Integralen för dessa är 0.

För $\frac{1}{2}$ får vi

$$\begin{aligned}
 E^{(1)}(0) &= - \frac{\rho_0}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/4} \underbrace{\cos\theta' \sin\theta' d\theta' d\phi'}_{= \frac{1}{2} \sin 2\theta'} d\phi' d\theta' \hat{z} \\
 &= - \frac{a\rho_0}{4\epsilon_0} \int_0^{\pi/4} \sin 2\theta' d\theta' \hat{z} \\
 &= - \frac{a\rho_0}{4\epsilon_0} \left[-\frac{1}{2} \cos 2\theta' \right]_0^{\pi/4} \hat{z} = - \frac{a\rho_0}{8\epsilon_0} \hat{z}
 \end{aligned}$$

För (2) byter vi tecken på ρ_0
 och integralgränser för θ' blir $\frac{3\pi}{4}$ till π

pss.

$$\Rightarrow E^{(2)}(0) = \dots = - \frac{a\rho_0}{8\epsilon_0} \hat{z}$$

$$E(0) = E^{(1)}(0) + E^{(2)}(0) = - \frac{a\rho_0}{4\epsilon_0} \hat{z}$$

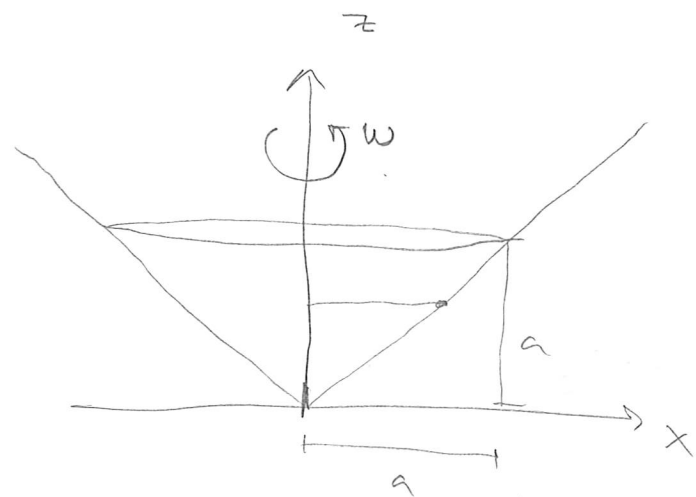
Randvärdesvillkor $\begin{matrix} D_1 \\ \rightarrow \end{matrix} \Big| \begin{matrix} D_2 \\ \rightarrow \end{matrix} \quad D_{2n} - D_{1n} = \rho_s$

Vid origo $\rho_s(0) = \epsilon_0 E(0) \cdot \hat{z} = - \frac{a\rho_0}{4} \hat{z}$

Integera bidragen

$$B = \int_a^a dB = \int_0^a \frac{\mu_0 b^2}{2(z+b)^{3/2}} \cdot \frac{\mu_0 \omega \sqrt{z}}{2} z dz \quad \frac{1}{z}$$

$$\stackrel{(b=z)}{=} \int_0^a \frac{\mu_0 z^2 \cdot \mu_0 \omega \sqrt{z}}{2 \cdot z \cdot 2 \cdot \sqrt{z}} dz \quad \frac{1}{z} = \frac{\mu_0 \mu_0 \omega \cdot a}{4} \quad \frac{1}{z}$$



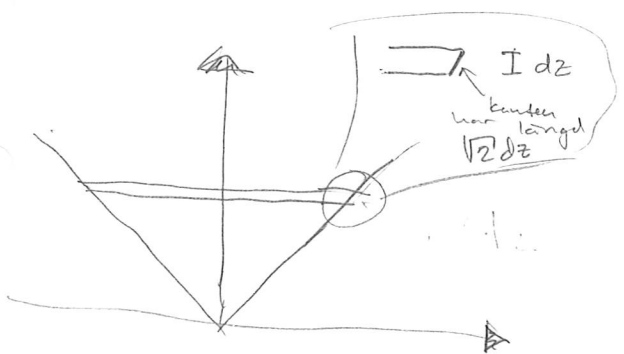
a) Bestäm ett uttryck för $J_s(R)$

En punkt på konen på avståndet R från origo har hastighet

$$v = \frac{\omega \cdot R}{\sqrt{z}} \hat{a}_\phi$$

Detta ger $J_s(R) = \rho_s v = \frac{\rho_s \omega R}{\sqrt{z}} \hat{a}_\phi$

b) Dela in konen i små strömrör



Bidrag från ett strömrör av

$$dB = \frac{1}{z} \frac{\mu_0 b^2 di}{2(z^2 + b^2)^{3/2}}$$

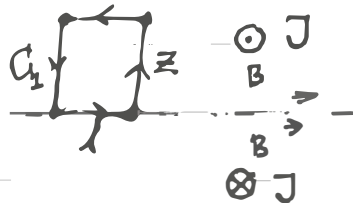
der b är radien på strömröret och z är avstånd från origo till strömrörets mittpunkt.

I detta fall är $b = z$.

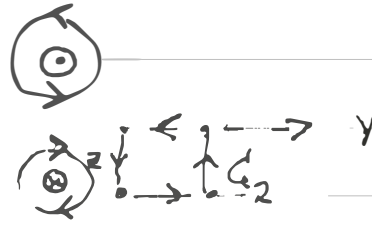
di är strömmen för ett strömrör

$$di = |J_s| \cdot \sqrt{z} dz = \rho_s \omega R dz = \rho_s \omega \sqrt{z} z dz \quad (\text{eftersom } R = \sqrt{z} z \text{ på konens yta})$$

4



$$\vec{J} = J_0 \frac{z^3}{a^3} \hat{x}$$



Anti-symmetrisk J vid $z=0 \Rightarrow B(0) \neq 0$

Lösning 1: Ampere-slinga $B = B(z) \hat{y}$

$$C_1: |z| < a \oint_{C_1} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \int_S \vec{J} \cdot d\vec{s}$$

$$-B(z)l + (0)l = \mu_0 \int_S \frac{J_0}{a^3} z^3 \hat{x} \cdot (\hat{x} ds)$$

$$\begin{aligned} (-B(z) + B(0))l &= \frac{\mu_0 J_0 l}{a^3} \left(\frac{z^4}{4} \right) \Big|_0^z = \\ &= \frac{\mu_0 J_0 l}{4 a^3} z^4 \end{aligned}$$

$$B(0) - B(z) = \frac{\mu_0 J_0 z^4}{4 a^3}$$

$$C_2: |z| < a \oint_{C_2} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \int_S \vec{J} \cdot d\vec{s}$$

$$B(z)l - B(0)l = \frac{\mu_0 J_0 l}{a^3} \int_z^0 z'^3 dz' = \frac{\mu_0 J_0 l}{4 a^3} (-z^4)$$

$$B(0) - B(z) = \frac{\mu_0 J_0}{4 a^3} z^4$$

$$C_1, z > a \quad \oint_{C_1} B \cdot d\vec{L} = \mu_0 \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S}$$

$$-B(z)L + B(0)L = \frac{\mu_0 J_0 a}{a^3} \left(\frac{z^4}{4} \right) \Big|_0^z$$

$$\left| B(0) - B(z) = \frac{\mu_0 J_0 a}{4} \right|$$

$$C_2, z < -a \quad \oint_{C_2} B \cdot d\vec{L} = \mu_0 \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S}$$

$$-B(0)L + B(z)L = -\frac{\mu_0 J_0 a}{4}$$

$$B(0) - B(z) = \frac{\mu_0 J_0 a}{4}$$

Låt $|z| \rightarrow \infty$ då kommer $B(z) = 0$ eftersom nettöpåverkan av strömmen blir försumbar då $a \ll z$

Alltså har vi $B(0) = \frac{\mu_0 J_0 a}{4}$ och vi finner

$$B = \begin{cases} 0 & |z| > a \\ \frac{\mu_0 J_0}{4a^3} (a^4 - z^4) \hat{y} & |z| \leq a \end{cases}$$

Lösning 2: Summering av strömplan

För ett oändligt plan gäller

$$B = \begin{cases} \frac{\mu_0}{2} J_s \hat{y} & \text{under planet} \\ -\frac{\mu_0}{2} J_s \hat{y} & \text{över planet} \end{cases}$$

Dela upp lagret i plan med tjocklek dz och $J_s = J dz$.

För $z > a$ (över alla plan) får vi

$$\begin{aligned} B &= -\frac{\mu_0}{2} \hat{y} \int_{-a}^a J dz = -\frac{\mu_0 \hat{y}}{2} \frac{J_0}{a^3} \int_{-a}^a z^3 dz = \\ &= -\frac{\mu_0 J_0 \hat{y}}{2a^3} \left(\frac{z^4}{4} \right) \Big|_{-a}^a = \underline{0} \end{aligned}$$

För $|z| < a$ (under alla plan) får vi

$$B = +\frac{\mu_0}{2} \hat{y} \int_z^a J dz = \underline{0}$$

För $|z| < a$ är vi över planen i $[-a, z]$ och under dom i $[z, a]$.

Vi för följande integral:

$$\begin{aligned} B &= -\frac{\mu_0 J_0 \hat{y}}{2} \int_{-a}^z J dz + \frac{\mu_0 \hat{y}}{2} \int_z^a J dz = \\ &= \frac{\mu_0 J_0 \hat{y}}{2 a^3} \left(-\left(\frac{z^4}{4}\right) \Big|_{-a}^z + \left(\frac{z^4}{4}\right) \Big|_z^a \right) = \\ &= \frac{\mu_0 J_0 \hat{y}}{2 a^3} \frac{1}{4} \left(-\left(z^4 - a^4\right) + \left(a^4 - z^4\right) \right) = \\ &= \frac{\mu_0 J_0 \hat{y}}{2 a^3} \frac{1}{4} \left(\left(a^4 - z^4\right) + \left(a^4 - z^4\right) \right) = \\ &= \frac{\mu_0 J_0 \hat{y}}{4 a^3} \left(a^4 - z^4 \right) \end{aligned}$$

\therefore

$$B = \begin{cases} 0 & |z| > a \\ \frac{\mu_0 J_0}{4 a^3} (a^4 - z^4) \hat{y} & |z| \leq a \end{cases}$$

Lösning 3: Magnetisk potential

$|z| \leq a$:

$$\nabla^2 A = -\mu_0 \bar{J} \quad \text{där} \quad B = \nabla \times A$$

$$\bar{J} = J_0 \frac{z^3}{a^3} \hat{x}, \text{ antag att } A_y = A_z = 0$$

och $A_x = A_x(z)$. Vi får då

$$\frac{d^2}{dz^2} A_x = -J_0 \mu_0 \frac{z^3}{a^3} \Rightarrow A_x = -J_0 \mu_0 \frac{z^5}{5 \cdot 4 a^3} + z C_1 + C_2$$

$$B = \nabla \times A = \frac{d}{dz} A_x \hat{y} = -J_0 \frac{z^4}{4 a^3} \hat{y} + C_1 \hat{y}$$

$|z| > a$: $\bar{J} = 0 \Rightarrow \frac{d^2}{dz^2} A_x = 0 \Rightarrow A_x = z C_1' + C_2'$

$$B = \nabla \times A = C_1' \hat{y}$$

$B(z) = 0$ för $|z| \rightarrow \infty \Rightarrow C_1' = 0$

med samma motivering som i lösning 1

Matchning av normal komponent vid $z=a$ ger $C_1 = \frac{J_0 \mu_0 a}{4}$, och

Vi finner

$$B = \begin{cases} 0 & |z| > a \\ \frac{J_0 \mu_0}{4 a^3} (a^4 - z^4) \hat{y} & |z| \leq a \end{cases}$$