

Övningstenta i Elektromagnetisk fältteori,

2016-11-26 kl. 8.30-12.30

Kurskod EEF031

Tillåtna hjälpmedel: BETA, Physics Handbook,
Formelsamling i Elektromagnetisk fältteori.
Valfri kalkylator, minnet
måste raderas innan tentamensstart.
Inga egna anteckningar utöver egna formler på sista
bladet i formelsamlingen i elektromagnetisk fältteori

Förfrågningar: Pegah Takook, tel 073-6872396.

Examinator: Andreas Fhager, tel. 076-125 70 12

Lösningar: Anslås på kursens hemsida

Resultatet: Distribueras på föreläsning

Granskning: Plats och tid annonseras på kurshemsidan

Till tentan: Elektrostatiken (tal 1 och 2) och Magnetostatiken (tal 3 och 4) bedöms
var för sig och poängen tillgodoräknas separat på tentan. Även teoridel och
problemdel räknas separat. Duggaresultatet räknas om till en procentsats av
maxpoängen och respektive tal på tentan kan om så önskas hoppas över med lika
många procent av maxpoängen tillgodo. Om man trots poäng tillgodo från duggan
väljer att räkna motsvarande tal på tentan gäller bästa resultatet. Resultat från duggan
gäller på ordinarie tenta och de två närmast därpå följande omtentamina.

OBS!

Svaren på förståelsedelen skall ges direkt på tesen som ska lämnas in

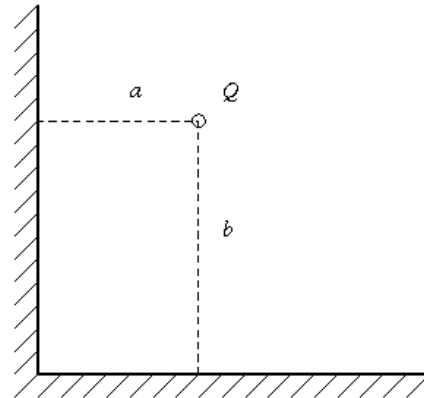
Förståelsefrågorna besvaras genom att markera en av rutorna efter varje
påstående till höger. En och endast en ruta på varje rad skall markeras.
De tre svarsalternativen (från vänster till höger är) Rätt, Vet ej och Fel.
Riktigt svar ger +0.2 poäng oriktigt svar ger -0.2 p. Vet ej är neutralt och
ger noll poäng. Förståelseuppgifterna ger maximalt 1 poäng och lägst -
1poäng och man kan därför få 1 poäng även med ett vet ej svar.

Anonym kod:

1 Elektrostatik

Problemlösningsdel (8 poäng)

Två mycket stora ledande plan bildar ett rätvinkligt hörn. Metallen är jordad. En linjeladdning med total laddning Q och längd l placeras parallellt med planen enligt figuren på ett avstånd a från det ena planet och b från det andra. Både planen och linjeladdningen är mycket långa jämfört med a och b så effekter från laddningens ändrar kan försummas i följande problem.



- A) Använd spegling för att hitta ett ekvivalent problem. Markera tydligt avstånden till speglingssladdningarna samt tecknen på deras laddningar.
 B) Hitta ett uttryck för den elektriska fältstyrkan i problemet och beräkna kraften per längdenhet på den ursprungliga laddningen.
 C) Skissa fältlinjerna i figuren.

Förståelsedel (4 poäng)

d) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

Elektrostatiken bygger på två och endast två postulater.

Den elektromagnetiska teorin bygger på postulat som formulerats baserat på experimentella upptäckter.

Den grundläggande fysiken i problemlösningsdelen ovan bygger **bland annat** på Gauss lag.

Den grundläggande fysiken i problemlösningsdelen ovan bygger **bland annat** på att B-fältet är källfritt.

Den grundläggande fysiken i problemlösningsdelen ovan bygger **bland annat** på att E-fältet är divergensfritt.

Den grundläggande fysiken i problemlösningsdelen ovan bygger **bland annat** på att rotationen av B-fältet är lika med den fria strömtätheten gånger permeabiliteten.

ja ? nej

e) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

Det elektrostatiska fältet, E , har enheten V/m.

I en makroskopisk teori måste rymdladdningsfördelningar alltid vara konstanta i rummet.

I en makroskopisk teori kan vi använda oss av differentialekalkyl och integralkalkyl.

Det elektriska fältet definieras utifrån en kraftverkan på en testladdning.

De elektrostatiska fältlinjerna är riktade i riktning mot positiva laddningar.

Elektrostatiska fältlinjer beskriver alltid slutna kurvor.

ja ? nej

f) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

Det elektrostatiska fältet är källfritt.

Det elektrostatiska fältet är rotationsfritt.

Det elektrostatiska fältet är konservativt.

Det elektrostatiska fältet i en perfekt ledare är alltid konstant lika med noll.

Vakuum har den relativa permittiviteten $\epsilon_r=1,0$

Vatten har en något lägre relativ permittivitet än vakuum.

ja ? nej

g) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

Laplace's ekvation kan ha mer än en lösning som uppfyller givna randvillkor.

Poissons ekvation är ett av de elektromagnetiska postulaten.

Speglingsmetoden kan alltid användas oavsett problemets geometri.

Speglingsmetoden kan användas vid spegling av punktladdningar ett stort ledande plan.

Speglingsmetoden kan användas vid spegling av godtyckliga laddningsfördelningar i ett stort ledande plan.

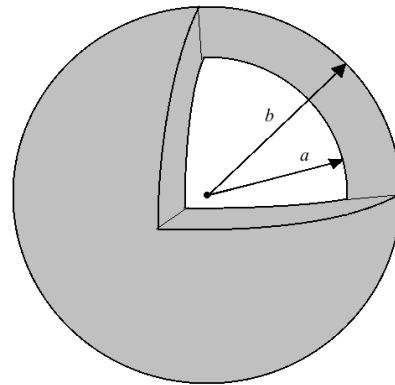
Speglingsmetoden kan användas vid spegling av punktladdningar ett stort plan av plast.

ja ? nej

2 Elektrostatik

Problemlösningsdel (8 poäng)

En laddningstäthet är fördelad som ett sfäriskt skal med inre radie a och yttre radie b . Laddningstätheten är konstant ρ i hela skalet.



A) Beräkna den elektriska fältstyrkan och potentialen i de tre regionerna.

B) Beräkna den totala elektrostatiske energin i systemet.

Förståelsedel (4 poäng)

c) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

Gauss lag på punktform och Gauss lag på integralform är helt ekvivalenta och beskriver helt ekvivalent fysik.

Kontinuitetsekvationen kan härledas från de två elektrostatiske postulaten.

Den grundläggande fysiken i problemlösningsdelen ovan bygger **bland annat** på Gauss lag.

Den grundläggande fysiken i problemlösningsdelen ovan bygger **bland annat** på att B-fältet är källfritt.

Den grundläggande fysiken i problemlösningsdelen ovan bygger **bland annat** på att E-fältet är källfritt.

Den grundläggande fysiken i problemlösningsdelen ovan bygger **bland annat** på att rotationen av B-fältet är lika med den fria strömtätheten gånger permeabiliteten.

d) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

ja ? nej

Källan till förskjutningsfältet D är polarisationsladdningarna.

Sambandet $D = \epsilon E$ mellan E- och D-fältet följer från postulaten i elektrostatiken.

Det råder alltid direkt proportionalitet mellan P och E-fälten.

Dielektriska materialegenskaper modelleras med hjälp av elektriska monopoler.

För att göra en undre uppskattning av resistansen antar man en approximativ strömfördelning.

För att göra en övre uppskattning av resistansen antar man en approximativ potentialfördelning.

e) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

ja ? nej

I elektrostatiken är E-fältets tangentialkomponent aldrig kontinuerlig i gränsen mellan två material med olika permittivitet.

I elektrostatiken är E-fältets normalkomponent aldrig kontinuerlig i gränsen mellan två material med olika permittivitet.

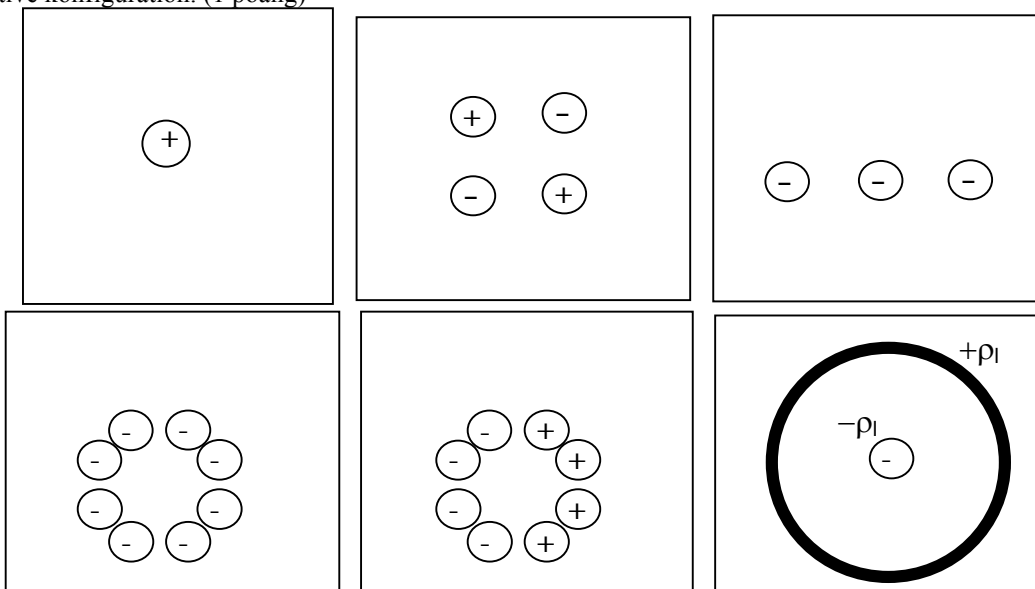
I elektrostatiken är D-fältets tangentialkomponent aldrig kontinuerlig i gränsen mellan två material med olika permittivitet.

I elektrostatiken är D-fältets normalkomponent alltid kontinuerlig i gränsen mellan två material med olika permittivitet.

Randvillkoret för E-fältets tangentialkomponent härleds från postulatet om E-fältets divergens.

Randvillkoret för E-fältets normalkomponent härleds postulatet om E-fältets divergens.

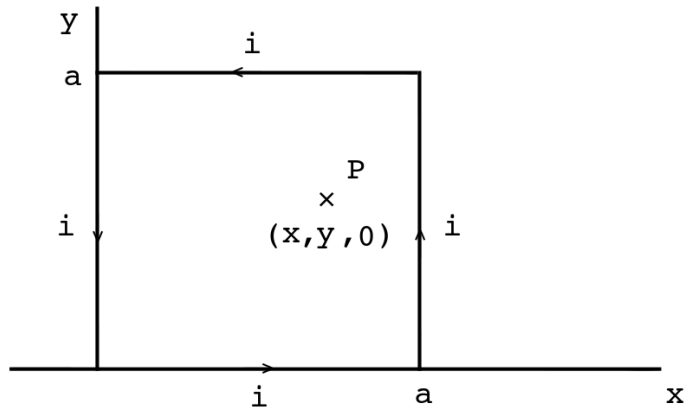
f) Skissa fältlinjerna runt följande laddningsfördelningar. Alla bilder visar olika konfigurationer av positivt och negativt laddade linjeladdningar. För poäng ska det principiella utseendet vara korrekt i hela det markerade kvadratiske området för respektive konfiguration. (1 poäng)



3 Magnetostatik

Problemlösningsdel (8 poäng)

En liten kvadratisk slinga ligger i x-y planet och har sidor med längden a enligt figuren. En ström i cirkulerar runt i kretsen med riktning enligt figuren.



A) Beräkna den magnetiska vektorpotentialen A till storlek och riktning, i punkten $P(x,y,0)$. Man kan anta att punkten ligger inuti kvadraten.

Förståelsedel (4 poäng)

b) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

	ja	?	nej
De magnetostatiska postulaten kan i sin helhet härledas från kontinuitetsekvationen.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Kontinuitetsekvationen kan härledas från de magnetostatiska postulaten.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
I grunden bygger fysiken i problemlösningsdelen på ett och endast ett postulat om B-fältet.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
I grunden bygger fysiken i problemlösningsdelen på två och endast två postulat om B-fältet.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Den grundläggande fysiken i problemlösningsdelen ovan bygger bland annat på att divergensen av E-fältet är lika med laddningstätheten genom epsilon_0.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Den grundläggande fysiken i problemlösningsdelen ovan bygger bland annat på att rotationen av B-fältet är lika med den fria strömtätheten gånger permeabiliteten.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

c) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

	ja	?	nej
B-fältet är rotationsfritt.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Man har observerat magnetiska laddningar.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Den magnetiska vektorpotentialen kan definieras tack vare att divergensen av B-fältet är noll.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Den magnetiska vektorpotentialen kan definieras tack vara att rotationen av B-fältet är nollskild.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Man kan välja divergensen av den magnetiska vektorpotentialen, A, fritt	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Man kan välja rotationen av den magnetiska vektorpotentialen, A, fritt	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

d) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

	ja	?	nej
Laddningar i rörelse som <i>endast</i> utsätts för ett B-fält <i>kan aldrig</i> påverkas av en kraft.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Laddningar som rör sig <i>parallellt</i> med B-fältslinjerna utsätts för en kraft orsakad av B-fältet.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Laddningar i rörelse som <i>endast</i> utsätts för ett E-fält påverkas av en kraft.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Laddningar i <i>vila</i> som <i>endast</i> utsätts för ett B-fält <i>kan</i> påverkas av en kraft.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Laddningar i <i>vila</i> som utsätts både för ett B-fält och ett E-fält påverkas <i>alltid</i> av en kraft.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Kraften på en laddning orsakad av ett B-fält har samma riktning som kraften orsakad av E-fältet.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

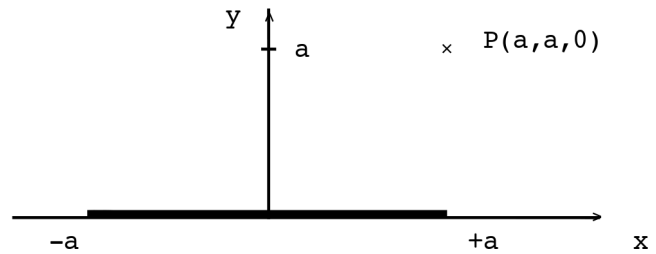
e) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

	ja	?	nej
Den magnetiska vektorpotentialen är alltid motriktad strömriktningen.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Varje komponent av den magnetiska vektorpotentialen uppfyller Poisons ekvation.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Den magnetiska susceptibiliteten definieras som proportionalitetskonstanten mellan magnetiseringsfältet M och H-fältet.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Man kan härleda Amperes lag utifrån att magnetfältet är källfritt	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
H-fältets roll i magnetostatiken påminner om D-fältets roll i elektrostatiken.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
M-fältets roll i magnetostatiken påminner om E-fältets roll i elektrostatiken.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

4 Magnetostatik

Problemlösningsdel (8 poäng)

Ett mycket långt och platt metallband med bredden $2a$ ligger i xz -planet och leder strömmen i_0 i \hat{z} -riktningen. Antag att strömmen är jämnt fördelad över bandets bredd.



A) Beräkna storlek och riktning hos B-fältet i punkten $P(a, a, 0)$, se figuren.

Förståelsedel (4 poäng)

b) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

	ja	?	nej
I grunden bygger fysiken i problemlösningsdelen på ett och endast ett postulat om B-fältet.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
I grunden bygger fysiken i problemlösningsdelen på två och endast två postulat om B-fältet.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Den grundläggande fysiken i problemlösningsdelen ovan bygger endast på Gauss lag.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Den grundläggande fysiken i problemlösningsdelen ovan bygger endast på att B-fältet är källfritt.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Den grundläggande fysiken i problemlösningsdelen ovan bygger endast på att divergensen av E-fältet är lika med laddningstätheten genom ϵ_0 .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Den grundläggande fysiken i problemlösningsdelen ovan bygger endast på att rotationen av B-fältet är lika med den fria strömtätheten gånger permeabiliteten.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

c) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

	ja	?	nej
Randvillkoret för B-fältets normalkomponent härleds från postulatet om B-fältets rotation.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Randvillkoret för B-fältets tangentialkomponent härleds från postulatet om B-fältets rotation.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
B-fältets normalkomponent är alltid kontinuerlig i gränsen mellan två material.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
B-fältets tangentialkomponent är alltid kontinuerlig i gränsen mellan två material.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
H-fältets normalkomponent är alltid kontinuerlig i gränsen mellan två material.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
H-fältets tangentialkomponent är alltid kontinuerlig i gränsen mellan två material.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

d) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

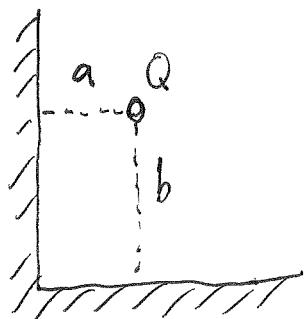
	ja	?	nej
Normalkomponenten av strömtäthetsfältet, J , är alltid kontinuerlig i gränsen mellan två material.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Tangentialkomponenten av strömtäthetsfältet, J , är alltid kontinuerlig i gränsen mellan två material.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Amperes lag kan användas för fältberäkning om man med symmetriargument kan hitta en s.k. Ampereslinga, där B-fältet har konstant riktning.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Amperes lag kan användas för fältberäkning om man med symmetriargument kan hitta en s.k. Ampereslinga, där B-fältet har konstant belopp.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Amperes lag kan användas för fältberäkning om man med symmetriargument kan hitta en s.k. Ampereslinga, där B-fältet har konstant belopp och riktning.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Amperes lag kan alltid användas istället för Biot-Savarts lag vid fältberäkningar.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

e) Vilket eller vilka (om något) av följande påståenden är riktiga?

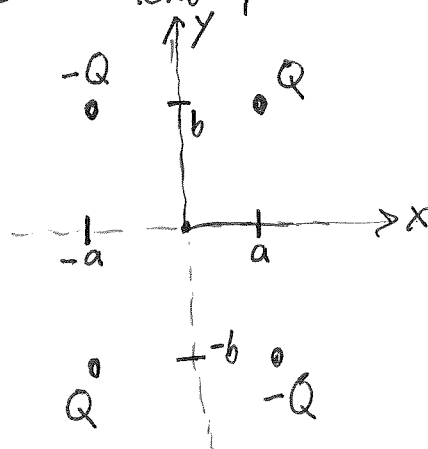
	ja	?	nej
Permanentmagneter har ett magnetiseringsfält M trots att inget yttre magnetfält lagts på.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
En ferromagnetiskt material kan ses som ett homogent material där magnetiseringsvektorn pekar åt samma håll i alla delar av materialet.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
I en permanentmagnet vill man ha ett magnetiska material med en smal hystereskurva.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
En bred hystereskurva leder till mindre värmeförluster än en smal hystereskurva då magnetiseringsvektorerna omorienteras pga att pålagt H-fält ändras.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Ett ferromagnetiskt material har ett linjärt samband mellan B- och H-fälten.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Ett diamagnetiskt material förstärker ett pålagt externt fält.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Elektrostatik I

A) Ursprungligt problem



Ekvivalent problem



B) Den elektriska fältstyrkan (E-fältet) hittar vi genom att summera bidragen från de fyra källorna.
Från formelbladet vet vi att fältet från en linjeladdning ges av

$$\vec{E}(r) = \hat{r} \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0 r}$$

$$= \hat{r} \frac{\pm Q}{2\pi l \epsilon_0 r}$$

Mer precist, för en källa som inte befinner sig i origo:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\pm Q}{2\pi l \epsilon_0} \cdot \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2}$$

Vårt totala fält ges därför av:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{Q}{2\pi l \epsilon_0} \left(\frac{\vec{r} - (a\hat{x} + b\hat{y})}{|\vec{r} - (a\hat{x} + b\hat{y})|^2} - \frac{\vec{r} - (-a\hat{x} + b\hat{y})}{|\vec{r} - (-a\hat{x} + b\hat{y})|^2} - \frac{\vec{r} - (a\hat{x} - b\hat{y})}{|\vec{r} - (a\hat{x} - b\hat{y})|^2} + \frac{\vec{r} - (-a\hat{x} - b\hat{y})}{|\vec{r} - (-a\hat{x} - b\hat{y})|^2} \right)$$

Notera dock att denna lösning bara är sann i första kvadranten.

För att beräkna kraften på vår ledning studerar vi bara fältbidragen från speglingarna.

$$\begin{aligned}\vec{E}_{\text{spegling}}(a\hat{x}+b\hat{y}) &= \frac{Q}{2\pi\epsilon_0} \left(-\frac{\hat{x}}{2a} - \frac{\hat{y}}{2b} + \frac{a\hat{x}+b\hat{y}}{2(a^2+b^2)} \right) \\ &= \frac{-Q}{4\pi\epsilon_0 l} \left(\frac{b^2}{a(a^2+b^2)}\hat{x} + \frac{a^2}{b(a^2+b^2)}\hat{y} \right)\end{aligned}$$

Kraften på tråden fås sedan genom att multiplicera detta fält med trådens laddning.

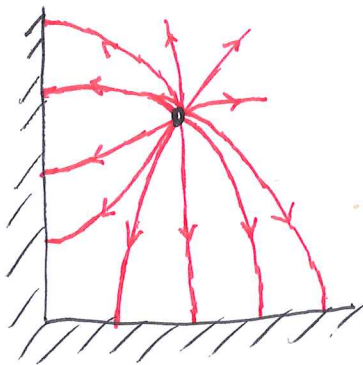
$$\begin{aligned}\vec{F} &= Q \cdot \vec{E}_{\text{spegling}} \\ &= -\frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 l(a^2+b^2)} \cdot \left(\frac{b^2}{a}\hat{x} + \frac{a^2}{b}\hat{y} \right)\end{aligned}$$

Om vi vill ha kraft per längdenhet får vi alltså

$$\frac{\vec{F}}{l} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0(a^2+b^2)} \cdot \frac{Q^2}{l^2} \cdot \left(\frac{b^2}{a}\hat{x} + \frac{a^2}{b}\hat{y} \right)$$

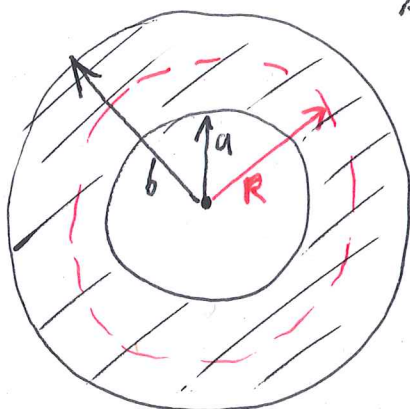
(Notera att kraft per längd hade varit ett mer intressant uttryck om jag givit laddningsdensiteten $\rho = \frac{Q}{l}$ istället. Jag kommer därför ge rätt för både \vec{F} och \vec{F}/l som slutsvar.)

c)



Det viktiga att uppmärksamma är att fälten bara har en normalkomponent vid planen och att det är nästan radiellt vid laddningen.

Elektrostatik 2



A) Notera att pga symmetri är fältet riktat radiellt och fältstyrkan är konstant längs varje sfäriskt skal centrerat kring fördelningens mittpunkt. Fältet kan då fås ur Gauss lag.

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_{inne}$$

$$D(R) = \frac{Q_{inne}}{4\pi R^2} \Rightarrow E(R) = \frac{Q_{inne}}{4\pi\epsilon_0 R^2}$$

Vi har då tre regioner att undersöka

• 1. $R < a$
 $Q_{inne} = 0 \Rightarrow E = 0$

• 2. $a < R < b$
 $Q_{inne} = \rho \cdot \frac{4\pi}{3} (R^3 - a^3)$
 $\Rightarrow E(R) = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \left(R - \frac{a^3}{R^2} \right)$

• 3. $R > b$
 $Q_{inne} = \rho \cdot \frac{4\pi}{3} (b^3 - a^3)$
 $\Rightarrow E(R) = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \cdot \frac{b^3 - a^3}{R^2}$

Potentialen kan vi finna från Poissons ekvation

$$\nabla^2 V(R) = -\frac{\rho(R)}{\epsilon_0}$$

där vi pga symmetri kan skriva om vänsterledet som

$$\nabla^2 V = \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} \left(R^2 \frac{\partial V}{\partial R} \right)$$

Övriga termer försvinner pga symmetrin.

Löser vi denna differentialekvation får

$$\frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} \left(R^2 \frac{\partial V}{\partial R} \right) = - \frac{\rho(R)}{\epsilon_0}$$

$$\frac{\partial}{\partial R} \left(R^2 \frac{\partial V}{\partial R} \right) = - \frac{\rho(R)}{\epsilon_0} R^2$$

$$R^2 \frac{\partial V}{\partial R} = - \frac{\rho(R)}{3\epsilon_0} R^3 + C_1$$

$$\frac{\partial V}{\partial R} = - \frac{\rho(R)}{3\epsilon_0} R + \frac{C_1}{R^2} \quad (*)$$

$$V(R) = - \frac{\rho(R)}{6\epsilon_0} R^2 - \frac{C_1}{R} + C_2$$

OBS! Här har vi utnyttjat att $\rho(R)$ är styckvis konstant! C_1 och C_2 kan alltså variera från region till region.

Nu behöver vi sätta konstanterna C_1 och C_2 .

För att potentialen ska gå mot noll då $R \rightarrow \infty$

behöver vi välja $C_2 = 0$, utanför fördelningen.

C_1 finner vi genom att jämföra (*) med vår fältprofil och utnyttja att

$$\hat{r} \frac{\partial V}{\partial R} = \nabla V = -\vec{E} \quad (\text{för sfäriskt symmetriskt } E)$$

Detta ger oss också tre fall

• $R > b \Rightarrow C_1 = \frac{\rho}{3\epsilon_0} (a^3 - b^3)$

• $a < R < b \Rightarrow C_1 = \frac{\rho}{3\epsilon_0} a^3$

• $R < a \Rightarrow C_1 = 0$

För att få en kontinuerlig potential får vi välja C_2 till:

• $R > b \Rightarrow$
• $a < R < b \Rightarrow$
• $R < a \Rightarrow$

$$\Rightarrow C_2 = \begin{cases} 0 \\ \frac{\rho b^3}{2\epsilon_0} \\ \frac{\rho}{2\epsilon_0} (b^2 - a^2) \end{cases}$$

Så potentialen ges av

• $R > b$: $V(R) = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \cdot \frac{b^3 - a^3}{R}$

• $a < R < b$: $V(R) = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \left(-\frac{R^2}{2} - \frac{a^3}{R} + \frac{3b^2}{2} \right)$

• $a < R$: $V(R) = \frac{\rho}{2\epsilon_0} (b^2 - a^2)$

B) För att beräkna energin finns några olika alternativ.

$$W_e = \frac{1}{2} \int_V V(R) \cdot \rho(R) dV = \frac{1}{2} \int_V \vec{E} \cdot \vec{D} dV$$

Vi kan t.ex använda fältprofilerna.

$$W_e = \frac{1}{2} \int_V \epsilon_0 \cdot E^2 dV$$

$$= 2\pi \cdot \int_0^\infty \frac{\epsilon_0 \cdot E(R)^2}{R^2} \cdot R^2 dR$$

$$= 2\pi \epsilon_0 \left(\int_0^a 0 \cdot R^2 dR + \int_a^b \left(\frac{\rho}{3\epsilon_0} \right)^2 \left(R - \frac{a^3}{R^2} \right)^2 \cdot R^2 dR + \int_b^\infty \left(\frac{\rho}{3\epsilon_0} \right)^2 \cdot \left(\frac{b^3 - a^3}{R^2} \right)^2 \cdot R^2 dR \right)$$

$$= \frac{2\pi \rho^2}{9\epsilon_0} \left(\int_a^b R^4 - 2a^3 R + \frac{a^6}{R^2} dR + \int_b^\infty \frac{(b^3 - a^3)^2}{R^2} dR \right)$$

$$= \frac{2\pi \rho^2}{9\epsilon_0} \left(\left[\frac{R^5}{5} - a^3 R - \frac{a^6}{R} \right]_a^b + \left[-\frac{(b^3 - a^3)^2}{R} \right]_b^\infty \right)$$

$$= \frac{2\pi \rho^2}{9\epsilon_0} \left(\frac{b^5}{5} - a^3 b - \frac{a^6}{b} - \frac{a^5}{5} + a^5 + a^5 + \frac{(b^3 - a^3)^2}{b} \right)$$

$$= \frac{2\pi \rho^2}{9\epsilon_0} \left(\left(\frac{1}{5} + 1 \right) b^5 - (1+2) a^3 b + (1+1) \frac{a^6}{b} + \left(-\frac{1}{5} + 1 + 1 \right) a^5 \right)$$

$$= \frac{2\pi \rho^2}{9\epsilon_0} \left(\frac{6}{5} b^5 - 3a^3 b + \frac{2a^6}{b} + \frac{9a^5}{5} \right)$$

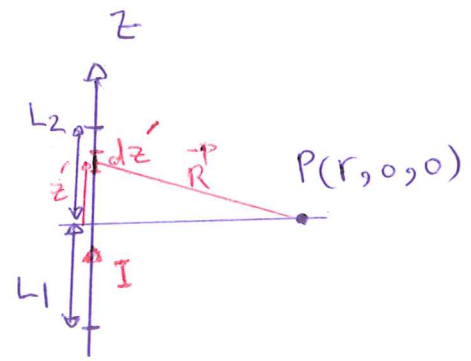
Rimlighetsanalys: $\begin{cases} a=0 \Rightarrow W_e = \frac{4\pi \rho^2}{15\epsilon_0} b^5 & (\text{svaret i Cheng exempel 3-22}) \\ a=b \Rightarrow W_e = 0 \end{cases}$

3. for a single piece of current carrying

(Magnetostatic)

Biot Savart law :

$$\vec{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-L_1}^{L_2} \frac{d\vec{l}'}{R}$$

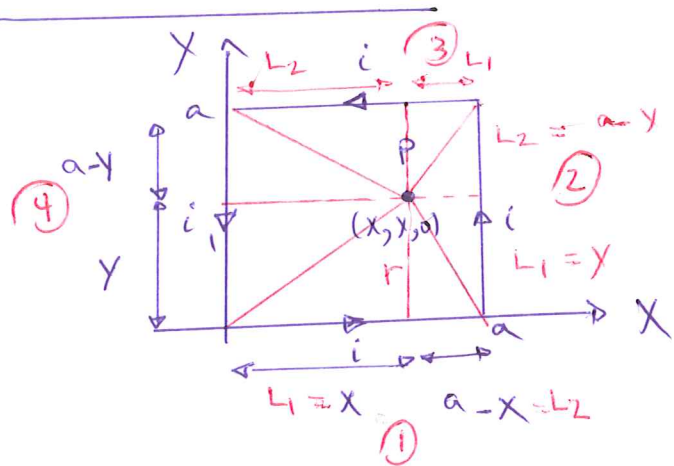


$$\vec{R} = \hat{a}_r r - \hat{a}_z z'$$

$$d\vec{l}' = \hat{a}_z dz'$$

$$\vec{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-L_1}^{L_2} \frac{\hat{a}_z dz'}{(r^2 + z'^2)^{3/2}} = \hat{a}_z \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left[\ln(z' + (z'^2 + r^2)^{1/2}) \right]_{-L_1}^{L_2}$$

$$= \hat{a}_z \frac{\mu_0 I}{4\pi} \ln \frac{\sqrt{L_2^2 + r^2} + L_2}{\sqrt{L_1^2 + r^2} - L_1}$$



side ①

$$\vec{A}_1 = \hat{a}_x \frac{\mu_0 i}{4\pi} \ln \frac{\sqrt{(a-x)^2 + y^2} + a-x}{\sqrt{x^2 + y^2} - x}$$

$\begin{cases} r=y \\ L_1=x \\ L_2=a-x \end{cases}$

side ②

$$\vec{A}_2 = \hat{a}_y \frac{\mu_0 i}{4\pi} \ln \frac{\sqrt{(a-y)^2 + (a-x)^2} + a-y}{\sqrt{y^2 + (a-x)^2} + y}$$

$\begin{cases} r=a-x \\ L_1=y \\ L_2=a-y \end{cases}$

side (3)

$$\vec{A}_3 = -\hat{a}_x \frac{N_0 i}{4\pi} \ln \frac{\sqrt{x^2 + (a-y)^2} + x}{\sqrt{(a-x)^2 + (a-y)^2} - (a-x)}$$

$$\begin{cases} r = a-y \\ L_1 = a-x \\ L_2 = x \end{cases}$$

side (4)

$$\vec{A}_4 = -\hat{a}_y \frac{N_0 i}{4\pi} \ln \frac{\sqrt{y^2 + x^2} + y}{\sqrt{(a-y)^2 + x^2} - (a-y)}$$

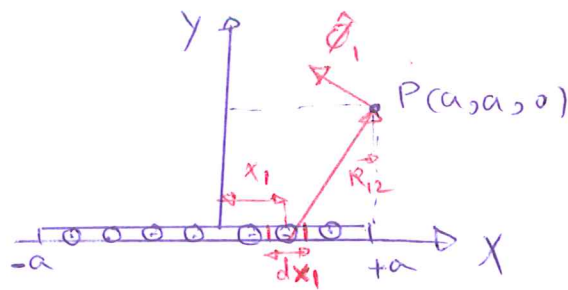
$$\begin{cases} L_1 = a-y \\ L_2 = y \\ r = x \end{cases}$$

$$\vec{A} \text{ at } P = \vec{A}_1 + \vec{A}_2 + \vec{A}_3 + \vec{A}_4$$

$$= \frac{N_0 i}{4\pi} \left(\hat{a}_x \left(\ln \frac{\sqrt{(a-x)^2 + y^2} + a-x}{\sqrt{x^2 + y^2} - x} - \ln \frac{\sqrt{x^2 + (a-y)^2} + x}{\sqrt{(a-x)^2 + (a-y)^2} - (a-x)} \right) \right. \\ \left. + \hat{a}_y \left(\ln \frac{\sqrt{(a-y)^2 + (a-x)^2} + a-y}{\sqrt{y^2 + (a-x)^2} - y} - \ln \frac{\sqrt{x^2 + y^2} + y}{\sqrt{(a-y)^2 + x^2} - (a-y)} \right) \right)$$

4 -

(Magnetostatic)



→
 $\vec{I} = I_0 \hat{z}$ uniformly distributed

→
 $\vec{J}_s = \frac{I_0}{2a} \hat{z}$ Ampere's law → $d\vec{B} = \frac{\mu_0 J_s dx_1}{2\pi R_{12}} \hat{\phi}_1$

$d\vec{I} = \vec{J}_s dx_1$

$R_{12} = R_2 - R_1 = \hat{x}(a-x_1) + \hat{y}a$, $R_{12} = \sqrt{(a-x_1)^2 + a^2}$

$\hat{\phi}_1 = \frac{\hat{z} \times R_{12}}{R_{12}} = \frac{\hat{y}(a-x_1) - \hat{x}(a)}{\sqrt{(a-x_1)^2 + a^2}}$

→ $d\vec{B} = \frac{\mu_0 (I_0/2a)}{2\pi} \frac{-\hat{x}a + \hat{y}(a-x_1)}{(a-x_1)^2 + a^2} dx_1$

$\vec{B} = \int_{x_1=-a}^a d\vec{B}$

$d\vec{B} = \hat{x} dB_x + \hat{y} dB_y = \left[\hat{x} \left(-\frac{\mu_0 I_0}{4\pi} \right) + \hat{y} \left(\frac{\mu_0 I_0}{4\pi a} \right) (a-x_1) \right] \frac{dx_1}{(a-x_1)^2 + a^2}$

$B_x = \int_{x_1=-a}^a \frac{-\mu_0 I_0}{4\pi} \frac{dx_1}{(a-x_1)^2 + a^2}$ $\left\{ \begin{array}{l} a-x_1 = f \rightarrow df = -dx_1 \\ x_1 = -a \rightarrow f = 2a \\ x_1 = a \rightarrow f = 0 \end{array} \right.$

$B_x = \frac{\mu_0 I_0}{4\pi} \int_{f=2a}^0 \frac{df}{f^2 + a^2} = \frac{\mu_0 I_0}{4\pi} \left[\left(\frac{1}{a} \right) \arctan\left(\frac{f}{a} \right) \right]_{2a}^0$
 $= \frac{-\mu_0 I_0}{4\pi} \arctan 2$

$$B_y = \frac{\mu_0 I_0}{4\pi} \int_{x_1=-a}^a \frac{(a-x_1)}{(a-x_1)^2 + a^2} dx_1 = \frac{-\mu_0 I}{4\pi a} \int_{f=2a}^0 \frac{f}{f^2 + a^2} df$$

$$\begin{aligned} \rightarrow B_y &= \frac{-\mu_0 I_0}{4\pi a} \left[\frac{1}{2} \ln(f^2 + a^2) \right]_{2a}^0 = \frac{\mu_0 I}{8\pi a} \ln \left(\frac{4a^2 + a^2}{a^2} \right) \\ &= \frac{\mu_0 I}{8\pi a} \ln 5 \end{aligned}$$

$$\rightarrow B(P) = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \left(-\hat{x} \arctan(2) + \hat{y} \ln \sqrt{5} \right)$$