Tentamen
Datastrukturer (DAT036)

- Datum och tid för tentamen: 2013-04-05, 8:30–12:30.
- Ansvarig: Nils Anders Danielsson. Nås på 0700 620 602 eller anknytning 1680. Besöker tentamenssalarna ca 9:30 och ca 11:30.
- Godkända hjälpmedel: Ett A4-blad med handskrivna anteckningar.
- För att få betyget n (3, 4 eller 5) måste du lösa minst n uppgifter. Om en viss uppgift har deluppgifter med olika gradering så räknas uppgiften som löst om du har löst *alla* deluppgifter med gradering n eller mindre.
- För att en uppgift ska räknas som ”löst” så måste en i princip helt korrekt lösning lämnas in. Enstaka mindre allvarliga misstag kan *eventuellt* godkännas (kanske efter en helhetsbedömning av tentan; för högre betyg kan kraven vara hårdare).
- Lämna inte in lösningar för flera uppgifter på samma blad.
- Skriv din tentakod på varje blad.
- Lösningar kan underkännas om de är svårlästa, ostrukturerade eller dåligt motiverade. Pseudokod får gärna användas, men den får inte utelämna för många detaljer.
- Om inget annat anges så kan du använda kursens uniforma kostnadsmodell när du analyserar tidskomplexitet (så länge resultaten inte blir uppenbart orimliga).
- Om inget annat anges behöver du inte förklara standarddatastrukturer och -algoritmer från kursen, men däremot motivera deras användning.

1. Analysera nedanstående kods tidskomplexitet, uttryckt i `n`:

```
for (int i = 0; i < n; i++) {
    for (int j = 0; j < i; j++) {
        t.insert(n);
    }
}
```

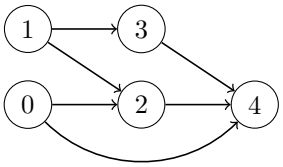
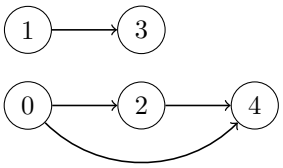
   Använd kursens uniforma kostnadsmodell, och gör följande antaganden:

   - Att `n` är ett ickenegativt heltal, och att typen `int` kan representera alla heltal.
   - Att `t` är ett AVL-träd som till att börja med är tomt.
   - Att den vanliga ordningen för heltal ($... < -1 < 0 < 1 < 2 < ...$) används vid insättning i trädet.
   - Att om samma element sätts in två gånger i trädet så skrivs den tidigare förekomsten över.

   Onödigt oprecisa analyser kan underkännas; använd gärna Θ-notation.

2. Man kan sortera riktade acykliska grafer (DAGs) topologiskt genom att göra en djupet först-sökning och pusha noderna på en stack i postordning. Implementera den här algoritmen. Skriv en procedur som tar en graf och ger tillbaka en lista med grafens noder i topologisk ordning.

   Exempel:

Graf	Möjligt resultat
	1, 3, 0, 2, 4
	1, 3, 0, 2, 4

   Beskriv tydligt vilken grafrepresentation som används i lösningen. Djupet först-sökningen måste beskrivas detaljerat; pseudokod får användas, men den får inte utelämna för många detaljer. (Det räcker inte att skriva något i stil med "besök varje nod i djupet först-ordning och …", det ska vara enkelt – vad nu det betyder – att översätta pseudokoden till konkret kod i ett språk som Java.)

   Tips: Testa din kod, så kanske du undviker onödiga fel.

3. *För trea:* Beskriv en effektiv algoritm som, givet en array med n distinkta naturliga tal och ett naturligt tal $k \leq n$, beräknar summan av de k största talen i arrayen. Exempelvis ska svaret bli 12 för arrayen $\{3, 7, 5, 4\}$ då $k = 2$. Du kan anta att inget tal i arrayen är större än N. Analysera algoritmens tidskomplexitet, uttryckt i n, k och N.

   För fyra: Som för trea, men tidskomplexiteten måste vara $O(n \log k)$.

4. Uppgiften är att konstruera en datastruktur för en mängd-ADT med följande operationer:

   `new Set()` Konstruerar en tom mängd.

   `insert(`i`)` Lägger till heltalet i till mängden.

   `delete(`i`)` Tar bort heltalet i från mängden. (Lämnar mängden oförändrad om i inte finns i mängden.)

   `member(`i`)` Avgör om heltalet i finns i mängden.

   `delete-odd()` Tar bort alla *udda* heltal från mängden.

   Exempel: Följande kod, skriven i ett Javaliknande språk, ska ge `true` som svar:

   ```
   Set s = new Set();
   s.insert(0);
   s.insert(1);
   s.insert(2);
   boolean b = s.member(0) && s.member(1) && s.member(2);
   s.delete(2);
   b = b && s.member(0) && s.member(1) && (! s.member(2));
   s.delete-odd();
   b = b && s.member(0) && (! s.member(1)) && (! s.member(2));
   return b;
   ```

   Operationerna måste ha följande tidskomplexiteter (där n är antalet element i mängden):

   - *För trea:* `new`: $O(1)$, `insert`, `delete`, `member`: $O(\log n)$, `delete-odd`: $O(n \log n)$.
   - *För fyra:* `new`: $O(1)$, `insert`, `delete`, `member`: $O(\log n)$, `delete-odd`: $O(1)$.

   Visa att så är fallet. Implementationen av datastrukturen behöver inte beskrivas med detaljerad kod, men lösningen måste innehålla så mycket detaljer att tidskomplexiteten kan analyseras.

   Tips: Konstruera om möjligt inte datastrukturen från grunden, bygg den hellre m h a standarddatastrukturer. Testa din algoritm, så kanske du undviker onödiga fel.

5. Anta att en dynamisk array har implementerats på följande sätt:

   - Det finns två operationer, insättning på den första lediga positionen (eventuellt efter förstoring av arrayen) och borttagning av det sista elementet (om arrayen inte är tom).
   - Arrayen är till att börja med tom, med längden 1.
   - Arrayens längd fördubblas vid insättning i en full array.
   - Arrayens längd halveras efter borttagning av ett element om arrayen, efter borttagningen, är som mest halvfull, och dess längd är minst 2.

   Visa att värstafallstidskomplexiteten för en sekvens av n operationer är $\Omega(n^2)$.

   Tips: För varje (tillräckligt stort) n, konstruera en sekvens s_n bestående av n operationer. Visa sedan att det finns en positiv konstant c så att, för varje tillräckligt stort n, tidskomplexiteten för s_n är minst cn^2. (Använd gärna Ω-notation i beviset.)

6. Betrakta följande Javaklass, som representerar enkellänkade listor:

```
public class List<A> {
  private class ListNode {
    A        contents;  // Innehåll.
    ListNode next;      // Nästa nod; null om det inte
                        // finns fler noder.

    ListNode(A contents, ListNode next) {
      this.contents = contents;
      this.next     = next;
    }
  }

  // Pekar på första listnoden; null om listan är tom.
  private ListNode head;

  // Diverse metoder (som ej får användas i lösningen).
  ...
}
```

   Lägg till en metod `public void reverse()` till klassen. Metoden ska reversera listan. *Exempel:* [ ] ska transformeras till [ ], och $[0, 1, 2]$ till $[2, 1, 0]$.

   Endast detaljerad kod (inte nödvändigtvis Java) godkänns. Du får inte anropa några andra metoder/procedurer (förutom `List`- och `ListNode`-konstruerarna), om du inte implementerar dem själv.

   Metoden måste vara linjär i listans längd ($O(n)$, där n är längden). Visa att så är fallet.

   Tips: Testa din kod, så kanske du undviker onödiga fel.

Kortfattade lösningsförslag för tentamen i Datastrukturer (DAT036) från 2013-04-05

Nils Anders Danielsson

1. Notera att samma element sätts in i trädet varje gång. Tidskomplexiteten blir $\Theta(n^2)$.

2. Grafrepresentation: Noder är numrerade från 0 till $n-1$, där n är antalet noder. Grafstrukturen representeras av grannlistor: en array med storlek n, där position i innehåller en länkad lista med nod is direkta efterföljare.

   Vi kan implementera algoritmen i uppgiftsspecifikationen på följande sätt (pseudokod):

```
List<Integer> topological-sort(Graph g) {
  // Stacken.
  List<Integer> stack = new List<Integer>;

  // Array som visar om en viss nod besökts.
  Boolean visited[] = new Boolean[g.number-of-nodes];

  // Initialisering av arrayen.
  for (Integer i = 0; i < g.number-of-nodes; i++)
    visited[i] = false;

  // En lokal procedur med tillgång till variablerna
  // stack och visited.
  void dfs(Integer i) {
    visited[i] = true;

    for all immediate successors j of i in g {
      if (not visited[j])
        dfs(j);
    }

    // Postordnings-push.
    stack.push(i);
  }
```

```
  // Djupet först-sökning.
  for (Integer i = 0; i < g.number-of-nodes; i++) {
    if (not visited[i])
      dfs(i);
  }

  // Den topologiskt sorterade listan.
  return stack;
}
```

3. *Enkel lösning.* Sortera arrayen, summera de k största elementen. Värstafallstidskomplexitet med t ex merge sort eller heap sort: $O(n \log n) + O(k) = O(n \log n)$. (Notera att N inte används i svaret. Om man använder radixsortering e d så kan det vara lämpligt att nämna hur N påverkar tidskomplexiteten.)

   En annan lösning. Använd en prioritetskö (en binär minheap) för att beräkna de k största elementen: gå igenom arrayen och sätt in varje element i kön, och ta bort det minsta elementet så fort kön innehåller $k + 1$ element. Extrahera därefter alla tal i kön (med delete-min), och summera dem. Värstafallstidskomplexitet: $O(n \log k) + O(k \log k) = O(n \log k)$.

4. Använd till exempel två hashtabeller, en för udda tal och en för jämna tal.

5. Betrakta följande sekvens bestående av n operationer (för $n \geq 2$):

   - Först $2^{\lfloor \log_2 n \rfloor - 1}$ insättningar.
   - Därefter omväxlande insättningar och borttagningar. Notera att var och en av de här operationerna leder till en fördubbling eller halvering av arrayens längd.

   Låt oss analysera tidskomplexiteten för en godtycklig sådan sekvens. De första insättningarna har tidskomplexiteten $\Theta(2^{\lfloor \log_2 n \rfloor - 1}) = \Theta(n)$. Varje efterföljande steg har tidskomplexiteten $\Theta(n)$. Antalet efterföljande steg är

   $$n - 2^{\lfloor \log_2 n \rfloor - 1} \geq n - 2^{\log_2 n - 1} = n - \frac{n}{2} = \frac{n}{2}.$$

   Den totala tidskomplexiteten blir därför $\Omega(n^2)$.

6. Följande implementation är linjär eftersom konstant arbete utförs för varje nod:

```
public void reverse() {
    ListNode prev = null;
    ListNode cur  = head;
    ListNode next;

    while (cur != null) {
        next     = cur.next;
        cur.next = prev;
        prev     = cur;
        cur      = next;
    }

    head = prev;
}
```