Chalmers University of Technology

Lösningsförslag SnKfKb

MVE295 Komplex analys

Författare:
Sahlin Erik
Martinson Edvin

14 september 2021

Inledning

Detta lösningsförslag syftar att hjälpa framtidens studenter att få en bättre förståelse för komplex analys. Lösningsförslagen är på inget sätt definitiva svar på hur man bör lösa uppgifter och om du tycker att något känns konstigt var inte rädd att fråga examinator. Vem som helst får lov att redigera, komplettera och korrigera materialet som finns i detta dokument. Det får gärna existera flera lösningsförslag till samma uppgift om flera olika lösningsstrategier existerar. Om en student har lämnat in ett eller flera nya lösningsförslag till en uppgift eller gjort andra stora förbättringar av dokumentet får denne skriva upp sig som författare av dokumentet. Skaparna av detta lösningsförslagskompendium är Edvin Martinsson (Kf) och Erik Sahlin (Kf) i samarbete med studienämnden KfKb. Från SnKfKb:s håll hoppas vi att detta uppmuntrar andra studenter att skapa fler lösningsförslag, sammanfattningar, mm, för andra kurser. Speciellt viktigt för denna fil är att man **INTE** får lägga upp:

1. plagiat och/eller upphovsrättsskyddat material
2. svar på inlämningsuppgifter

Se mer om detta på SnKfKb:s google drive: **OBS! VIKTIGT! LÄS INNAN DU LÄGGER UPP MATERIAL**. Material som strider mot detta kommer att tas bort av SnKfKb. Även studenter från F och Tm får använda och förbättra dokumentet på samma villkor som studenter från KfKb så att vi tillsammans kan skapa en bättre inlärning. Om det uppstår större problem med lösningsförslaget (t.ex. att delning inte fungerar som det ska eller att stora delar av dokumentet har förstörts) då kan du komma i kontakt med oss genom att maila erik.ola.bjorn.sahlin@gmail.com.

Studienämnden KfKb
Sit Vis Vobiscum

Innehåll

Kapitel 1. **6**
1.2 . . . 6
b) . . . 6
1.3 . . . 6
d) . . . 6
1.11 . . . 6
a) . . . 6
1.22 . . . 7
h) . . . 7
1.24 . . . 7
a) . . . 7
b) . . . 7
1.29 . . . 7
a) . . . 7
b) . . . 8
c) . . . 8
d) . . . 8
1.33 . . . 8
a) . . . 8
b) . . . 9
c) . . . 9
d) . . . 9
e) . . . 10

Kapitel 2. **10**
2.18 . . . 11
(a) . . . 11
(c) . . . 11
2.21 . . . 12
2.22 . . . 12
2.23 . . . 13
2.25 . . . 13
b) . . . 13
2.26 . . . 14

Kapitel 3. **15**
3.5 . . . 15
3.9 . . . 15
(a) . . . 15
(b) . . . 16
(c) . . . 16
3.13 . . . 17
b) . . . 18
3.14 . . . 18
b) . . . 18

3.17 . . . 19
(a) . . . 19
3.21 . . . 21
(c) . . . 21
3.31 . . . 22
a) . . . 22
3.39 . . . 22
3.41 . . . 25
(c) . . . 25
(d) . . . 25
(e) . . . 26
3.45 . . . 26
(a) . . . 27
(b) . . . 27

Kapitel 4. **27**
4.1 . . . 27
c) . . . 27
4.5 . . . 28
(a) . . . 28
4.6 . . . 28
b) . . . 28
4.17 . . . 29
4.29 . . . 29
4.37 . . . 30
(a) . . . 30
(b) . . . 30
(c) . . . 31

Kapitel 5. **31**
5.1 . . . 31
c) . . . 31
5.3 . . . 31
a) . . . 31
5.11 . . . 32
5.15 . . . 34
5.16 . . . 35
5.18 . . . 35

Kapitel 6. **38**
6.4 . . . 38
a) . . . 38
b) . . . 39
6.7 . . . 39
6.11 . . . 39

Kapitel 7. **41**

7.12 41
7.25 41
(b) 41
7.26 42
(d) 42
7.28 44
a) 44
7.29 44
(a) 44
(b) 45
(c) 46
7.30 47
7.33 48
b) 48
c) 48
b) 48

Kapitel 8. **48**
8.1 48
b) 48
8.17 49
8.19 51
8.23 52
8.26 52
8.27 53
8.28 54
(a) 54
(b) 54
8.32 55
8.33 56

Kapitel 9. **57**
9.1 57
9.2 57
b) 57
9.5 57
b) 58
c) 58
9.7 59
(d) 59
9.8 59
(d) 59
9.9 61
9.11 62
9.15 64
9.17 67

9.18 69
9.21 69
c) 69

Residy-pdf **70**
Rs.4nr.1 70

Fourier-pdf **74**
Fs.8nr.1 74
(b) 74
Fs.8nr.2 76
Fs.8nr.4 77
Fs.13nr.3 81
(b) 81

Kapitel 1.

1.2

b)

I den här typen av uppgift kan man förlänga med det komplexa konjugatet, för att få bort de komplexa delarna ur nämnaren. Det är en väldigt användbar metod, som ni kommer använda mycket framöver, så lägg den på minnet!

$$\frac{3+5i}{1+7i} = \frac{(3+5i)(1-7i)}{(1+7i)(1-7i)} = \frac{3+35+i(5-21)}{1+49} = \frac{38-i16}{50} = \frac{19}{25} - i\frac{8}{25}$$

1.3

d)

När det är exponenter med är det nästan alltid lättast att byta till polär form och sen byta tillbaka till kvadratisk form om det behövs.

$$\begin{aligned}
&\text{Let } z = (1+i),\ |z| = \sqrt{2},\ \arg z = \frac{\pi}{4} \\
&\implies z = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} \\
&\implies w = z^6 = 8e^{i\frac{3\pi}{2}} \\
&\implies \begin{cases} |w| = 8 \\ \bar{w} = 8e^{-i\frac{3\pi}{2}} = 8i \end{cases}
\end{aligned}$$

Eftersom argumentet $-i\frac{3\pi}{2}$ går genom tre kvadranter i negativ riktning slutar den i $+i$.

1.11

a)

Den här kan vara lite klurig, ganska snabbt kan man komma fram till att 1 och -1 är lösningar, men för att hitta alla lösningar får man tänka till lite...

$$\begin{aligned}
z^6 &= 1 \\
|z|^6 e^{i6\arg(z)} &= 1 \implies \begin{cases} |z| = 1, \\ 6\arg(z) = 2n\pi \implies \arg(z) = \frac{n\pi}{3},\ n \in \mathbb{Z} \end{cases} \\
\implies z &= e^{i\frac{n\pi}{3}}
\end{aligned}$$

I själva verket får vi alltså oändligt antal lösningar, eftersom det komplexa argumentet inte är väldefinerat utan cykliskt/periodiskt.

1.22

Alla dessa är egentligen bara att skriva ut som $z = x + iy$ och brute forcea, ex

h)

Visa $\mathcal{I}m(z) = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$,

$$\frac{1}{2i}(z - \bar{z}) = \frac{1}{2i}(x + iy - (x - iy)) = \frac{1}{2i}(2iy) = y = \mathcal{I}m(z) \quad \square$$

P.S. Om ni inte redan känner igen detta kommer ni snart att göra det, för från detta tsm med Eulers formel får man att $\sin(\theta) = \frac{1}{2i}(e^{i\theta} - e^{-i\theta})$ och $\cos(\theta) = \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta})$, vilket kan vara bra att lägga på minnet!

1.24

a)

Definera $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + ... + a_0$, låt $z = re^{i\theta\pi}$, $\bar{z} = re^{-i\theta\pi}$.

$$p(z) = a_n r_n e^{in\theta\pi} + ... + a_0$$
$$p(\bar{z}) = a_n r_n e^{-in\theta\pi} + ... + a_0$$

$$\overline{p(z)} = \overline{a_n r_n e^{i\theta\pi} + ... + a_0}$$

Använd att konjugatet av en summa är summan av konjugaten

$$\overline{p(z)} = a_n r_n e^{-in\theta\pi} + ... + a_0 = p(\bar{z}) \quad \square$$

b)

b)-uppgiften går nog att göra på många sätt men ett ganska smidigt och snyggt sätt följer i princip direkt från föregående uppgift, se om du kan tänka ut den själv.

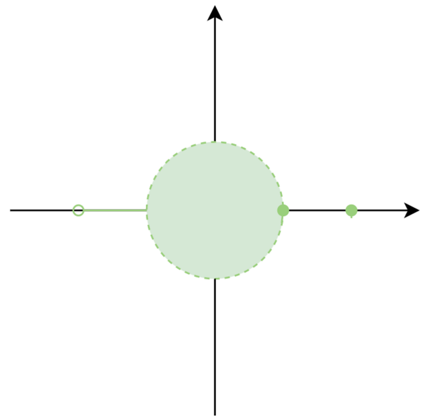
Ledtråd: Om $\omega = 0$ vad måste då gälla för $\bar{\omega}$? ($\omega \in \mathbb{C}$)

1.29

Vi har mängden, $G = \{z \in \mathbb{R} : -2 < z < -1, z = 1, z = 2 \,||\, z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$

a)

Området blir alltså, på realaxeln, intervallet mellan -2 och -1 (men inte inklusive dessa punkter) samt punkten 1 och punkten 2. Utöver det enhetscirkelskivan utan randpunkter.



b)

Inre punkter blir alltså, $\{z : |z| < 1\}$, ty punkterna på realaxeln är inte inre punkter då en cirkelskiva som omsluter en sådan punkt inte enbart skulle kunna tillhöra G.

c)

Inte heller skulle ovan nämnda punkter kunna omslutas av en cirkelskiva som enbart tillhör G^c, de är alltså randpunkter liksom enhetscirkeln som omsluter enhetscirkelskivan. Totalt har vi alltså, $\{z : |z| = 1,\ -2 < z < -1,\ z = 2\}$

d)

Endast $\{z : z = 2\}$ är en isolerad punkt.

1.33

Ett allmänt tips till dessa uppgifter är att använda Desmos för att visualisera parametriseringarna om man har svårt för det. Tyvärr har iaf jag inte hittat ett komplext talplan där, men om man delar upp sin parametrisering i real och imaginärdel går det ju att parametrisera som vanligt. Se bild längre ner.

a)

För att parametrisera cirkeln, $C[1 + i, 1]$, kan vi bara tänka oss att vi vill förskjuta enhetscirkeln. En förskjutning är bara som en konstant addition, därav ges parametriseringen av:

$$\gamma(\theta) = e^{i\theta} + (1 + i) = \cos(\theta) + 1 + i(\sin(\theta) + 1)\ , \theta \in [0, 2\pi]$$

Obs: Notera att den naturliga orienteringen därav blir moturs.

b)

För att parametrisera linjesegmentet $[-1-i, 2i]$ tänker vi först var vill vi börja? Jo i $(-1-i)$, och var vill vi sluta? Jo i $2i$. Vi behöver alltså lägga till något som beror av parametriseringsvariabeln som tar -1 till 0 och $-i$ till $3i$. Parametriseringen ges därför förslagsvis av,

$$\gamma(t) = (-1-i) + t(1+3i) = (t-1) + i(3t-1)\,,\ t \in [0,1]$$

Som får riktningen från $(-1-i)$ till $2i$, vilket vi söker .

c)

Återigen en cirkel, som är lätta att manipulera och parametrisera i det komplexa talplanet. $C[0,34]$ ges enkelt av $\gamma(\theta) = 34e^{i\theta}$, $\theta \in [0,2\pi]$. Men för att få övre halvcirkeln med medurs riktning får man tänka till lite. Ett enkelt trick med parametriseringar är att behålla ett enkelt intervall men ändra i uttrycket, såhär. Låt $\theta \in [0,\pi]$ så får vi övre halvan med moturs riktning. Men lägger om vi i uttrycket istället skriver argumentet till $\pi - \theta$ börjar vi istället i -1 och rör oss medurs i takt med att θ ökar. Alltså parametriseringen ges av,

$$\gamma(\theta) = 34e^{i(\pi-\theta)} = -34e^{-i\theta}\,,\ \theta \in [0,\pi]$$

d)

Nu blir det lite lurigare, för att det vi söker är **en** parametrisering (trots att man i vanliga fall nog hade valt att se detta som konkatinationen av 4 skilda). Hursomhelst behöver vi dela in det i fyra fall och fyra skilda intervall. Jag väljer för enkelhetens skull $t \in [0,1], [1,2], [2,3], [3,4]$ och börjar med linjesegmentet $[1+2i, -1+2i]$. Notera att imaginärdelen är konstant och allså ges av att bara addera $2i$, medan realdelen ges av $(1-2t)$, $t \in [0,1]$. Easy peasy, nu till de lite klurigare bitarna.

Såhär tänker jag inför de kommande linjesegmenten.

1. Addera ändringen (t ändras alltid med +1)
2. Förskjut linjen så den börjar i rätt punkt.

Alltså, för $[-1+2i, -1-2i]$ och $t \in [1,2]$

1. Vi vill ha $-4i$ i ändring alltså ändringen ges av $-4ti$
2. Vi ska börja i $-1+2i$ alltså addera konstanta termen $-1+6i$, (ty $t = 1$ i startpunkten $6-4=2$)

Alltså ges parametriseringen av

$$\gamma(t) = \begin{cases} 1-2t+2i, & t \in [0,1] \\ -1+i(6-4t), & t \in [1,2] \\ -5+2t-2i, & t \in [2,3] \\ 1+i(-14+4t), & t \in [3,4] \end{cases}$$

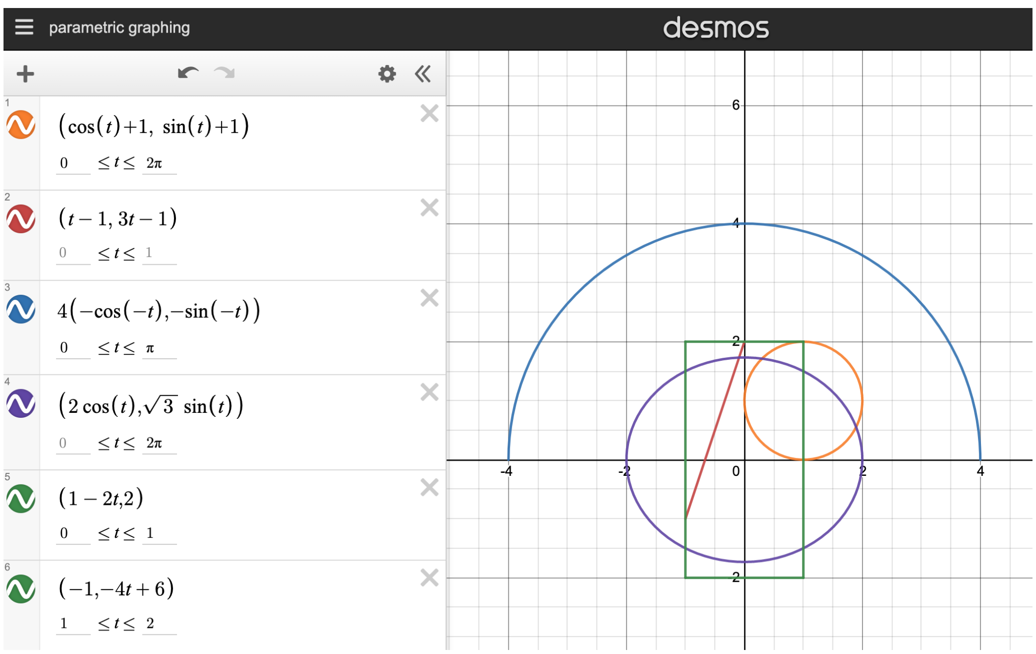
e)

Denna löses lättast geometriskt (För en algebraisk lösning kan man titta här, `https://math.stackexchange.com/questions/626554/find-all-z-in-bbb-c-such-that-z1-z-1-4`). Geometriskt kan man tänka att summan mellan avstånden mellan z och ± 1 alltid måste vara konstant. Eftersom vi vet att det är en ellips räcker det att vi hittar skärningspunkterna med axlarna så kan vi parametrisera. $z = x + iy$

Alltså, sätt $y = 0$ så har vi $|x-1| + |x+1| = 4$, varifrån vi enkelt får $x = \pm 2$, ellipsen skär alltså realaxeln i ± 2.
Sätt $x = 0$, så har vi $|iy-1| + |iy+1| = 4$, men $|iy-1| = |iy+1|$ eftersom vi nu bara kan röra oss längs med imaginäraxeln. Alltså får vi $|iy+1| = 2 \implies y = \pm\sqrt{3}$, dvs ellipsen skär imaginäraxeln i $\pm\sqrt{3}i$.

Nu kan vi parametrisera ellipsen som

$$\gamma(t) = 2\cos(t) + i\sqrt{3}\sin(t)\,,\, t \in [0{,}2\pi]$$



Figur 1: Kurvor för alla deluppgifter plottade i Desmos. Obs: att radien ska vara 34 på b) och inte 4, men för att få med alla i samma bild så gjorde jag sådär

Kapitel 2.

2.18

I dessa uppgifter vill vi kolla om funktionerna uppfyller Cauchy-Riemanns ekvationer (CR). Om CR:s ekvationer är uppfyllda vet vi att funktionen är holo på hela $\mathbb{C}$. Om funktionen inte uppfyller CR rakt av kan den fortfarande vara holo på en mindre mängd. Om den är holo på en mindre mängd måste den dock vara deriverbar i en hel öppen mängd. Exempelvis om funktionen är komplext deriverbar på en linje eller i en punkt så är det inte en öppen mängd. Däremot är funktionen isf komplext deriverbar på den linjen eller punkten. Se 2.18 (c) för ett sådant fall.

(a)

Vi har funktionen:

$$f(z) = e^{-x}e^{-iy} = e^{-x}(\cos(-y) + i\sin(-y)), \quad x,y \in \mathbb{R}$$

En komplexvärd funktion delas ofta in i realdel och imaginärdel: $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$. Mha detta kan vi identifiera $u(x,y)$ och $v(x,y)$. Notera att dessa funktioner är reellvärda:

$$\begin{aligned} =>u(x,y) &= e^{-x}\cos(-y) & v(x,y) &= e^{-x}\sin(-y) \\ \frac{\partial u}{\partial x} &= -e^{-x}\cos(-y) & \frac{\partial v}{\partial y} &= -e^{-x}\cos(-y) \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= e^{-x}\sin(-y) & \frac{\partial v}{\partial x} &= -e^{-x}\sin(-y) \end{aligned}$$

$$=> \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial v} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$$

CR:s ekvationer är därför uppfyllda och därför är $e^{-x}e^{-iy}$ holo på hela $\mathbb{C}$. Dess komplexa derivata är:

$$\begin{aligned} f'(z) &= \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \\ &= -e^{-x}\cos(-y) - ie^{-x}\sin(-y) = \\ &= -e^{-x}(\cos(-y) + i\sin(-y)) = \\ &= -e^{-x}e^{-iy} \end{aligned}$$

(c)

Vi har funktionen $f(z) = x^2 + iy^2, \quad x,y \in \mathbb{R}$. Faktoridentifiering ger:

$$
\begin{aligned}
&=>u(x,y) = x^2 && v(x,y) = y^2 \\
&=>\frac{\partial u}{\partial y} = 0 && \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \\
&\frac{\partial u}{\partial x} = 2x && \frac{\partial v}{\partial y} = 2y \neq \frac{\partial u}{\partial x} \quad => \text{ej holo på hela } \mathbb{C}
\end{aligned}
$$

CR:s ekvationer uppfylls dock på linjen $\{x + iy \in \mathbb{C} : x = y\}$. Detta är dock inte en öppen mängd, vilket är ett krav för att en funktion ska vara holo (se mer info i början av 2.18 i detta dokument). Alltså är $f(z)$ ej holo någonstans men däremot komplext deriverbar på linjen $\{x + iy \in \mathbb{C} : x = y\}$ med den komplexa derivatan:

$$
f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = 2x + 0 = 2x
$$

2.21

Visa att om $f(z)$ och $\overline{f(z)}$ är holo i $G \subseteq \mathbb{C}$ så är $f(z)$ konstant. Först noterar vi att

$$
f(z),\, \overline{f(z)} \text{ holo } \implies \begin{cases} g(z) = f(z) + \overline{f(z)} = 2\text{Re}(f(z)) & \text{är holo} \\ h(z) = f(z) - \overline{f(z)} = 2\text{Im}(f(z)) & \text{är holo} \end{cases}
$$

Notera nu att både $g(z)$ och $h(z)$ är reellvärda holomorfa funktioner. (Även imaginärdelen Im(z) är reellvärd!) Dvs, $v(x,y) = \text{Im}(g(z)) = 0$ och alltså enligt CauchyRiemann (med $u(x,y) = \text{Re}(g(z)) = 0$) så är

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \\
\frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial v}{\partial x} = 0
\end{aligned}
$$

Och alltså $g'(z) = 0$, på samma sätt får vi att $h'(z) = 0$. (Uppgift 2.20) .

Men eftersom $g(z)$ och $h(z)$ inte beror av något annat än real- respektive imaginärdel av $f(z)$ måste alltså även $f'(z) = 0$ vilket, då f är holomorf, enligt sats medför att f är konstant. $\square$

2.22

Visa att $f(z) = u(x) + iv(y) \implies f(z) = az + b$ då f är hel och $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{C}$.

Eftersom f är hel måste CauchyRiemann vara uppfyllda på hela $\mathbb{C}$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial y} = C \in \mathbb{R} \\
\frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial v}{\partial x} = 0
\end{aligned}
$$

Där C är en godtycklig konstant, vilket måste uppfyllas eftersom om y ändras så kan inte u ändras, ty den beror endast av x och eftersom likheten måste gälla kan därför inte heller v ändras när y ändras.

Därav får vi att både u och v har konstanta derivator och alltså kan beskrivas av en linjes ekvation.

$$\begin{cases} u(x) = Cx + D_1 \\ v(y) = Cy + D_2 \end{cases} \implies f(x,y) = u(x) + iv(y) = Cx + D_1 + i(Cy + D_2)$$
$$= C(x + iy) + D_1 + iD_2 = az + b \quad \square$$

2.23

$f(x,y) = u(x,y) + iv(x,y)$ är hel och $u \cdot v = 3$, visa att f är konstant.

Om f är holo så är även f^2 holo,

$$f^2(x,y) = \underbrace{u^2(x,y) - v^2(x,y)}_{=\tilde{u}(x,y)} + \underbrace{2iu(x,y)v(x,y)}_{=i\tilde{v}(x,y)=6i}$$
$$f^2(x,y) = \tilde{u}(x,y) + i\tilde{v}(x,y)$$

Eftersom $\tilde{v}(x,y)$ är konstant ger CauchyRiemann att även $\tilde{u}(x,y)$ måste vara konstant (ty partiella derivatorna måste vara =0).

Därav ges att f^2 är konstant $\implies$ f är konstant, då f är holo (specifikt kontinuerlig). $\square$

2.25

Vi vill att funktionen $f = u+iv$ ska vara holo i ett så stort område som möjligt (dvs uppfylla Cauchy Riemann). Alla deluppgifter följer samma princip, se först till att hitta en så allmän funktion som möjligt som uppfyller den ena CR-ekvationen, för att sen se till att den andra ekvationen också uppfylls. Se lösning för b-uppgiften.

b)

En bra grej att lägga på minnet är att $\frac{\partial}{\partial x}(\sinh(x)) = \cosh(x)$ och $\frac{\partial}{\partial x}(\cosh(x)) = \sinh(x)$, men man kan också använda förhållanden mellan sinh och sin respektive cosh och cos för att lösa denna uppgift.

$$u = \cosh(y)\sin(x)$$
$$\frac{\partial u}{\partial x} = \cosh(y)\cos(x)$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = \sinh(y)\sin(x)$$

För att uppfylla Cauchy Riemann har vi då alltså att v måste uppfylla,

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = \cosh(y)\cos(x) \\ \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial x} = -\sinh(y)\sin(x) \end{cases}$$

Om vi tar motsvarande primitiva funktion för den övre ekvationen får vi alltså att

$$v = \sinh(y)\cos(x) + g(x)$$

, där $g(x)$ är en godtycklig funktion som beror av x. Deriverar vi vårt v map x får vi

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\sinh(y)\sin(x) + g'(x)$$
$$\implies g'(x) = 0 \quad \text{(från ovanstående ekvationssystem)}$$
$$\implies g(x) = C \ \in \mathbb{C}$$

Eftersom vi i uppgiften söker **en** funktion v som gör f holomorf väljer vi $C = 0$ och alltså

$$v = \sinh(y)\cos(x)$$

.

2.26

Först och främst, en harmonisk funktion, $u(x,y)$ uppfyller att Laplacianen=0, ($\Delta u = \nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$). Så den här uppgiften är egentligen bara att derivera på...

$$u(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} \qquad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{-2x(x^2+y^2)^2 + 8xy^2(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^4} \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{-2x(x^2+y^2)^2 - (y^2-x^2)4x(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^4}$$

$$= \frac{-2x^3+6xy^2}{(x^2+y^2)^3} \qquad = \frac{2x^3-6xy^2}{(x^2+y^2)^3}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Och första funktionen är alltså harmonisk i $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Eftersom den inte är definerad i 0.

$$u(x,y) = \frac{x^2}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{-2x^2y}{(x^2+y^2)^2} \qquad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2xy^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{-2x^2(x^2+y^2)^2 + 8x^2y(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^4} \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{2y^2(x^2+y^2)^2 - 8x^2y^2(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^4}$$

$$= \frac{-2x^4-2x^2y^2+8x^2y^3}{(x^2+y^2)^3} \qquad = \frac{2y^4+2x^2y^2-8x^2y^2}{(x^2+y^2)^3}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \neq -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Därav är funktionen aldrig harmonisk.

Kapitel 3.

3.5

Bara att utgå från definitionen av Möbiustransformer så är man hemma!

$$\begin{aligned} f(z) = & \frac{az+b}{cz+d} = z \\ & az + b = cz^2 + dz \\ & cz^2 + (d-a)z + b = 0 \end{aligned}$$

Vi får alltså en andregradare med konstanta koefficienter vilken vi vet har som mest två lösningar!
$\square$

`Teaser:` Det sista påståendet kommer från algebrans fundamentalsats som ni strax kommer stöta på i kursen. Det var satsen som *Gauss* först misslyckades med att rigoröst bevisa så att han 17år senare (när en annan snubbe redan publicerat det första rigorösa beviset) kom tillbaka och publicerade två nya rigorösa bevis av satsen och sen en rättelse till sitt första bevis.

3.9

(a)

Generellt gäller det att $M(z) = \frac{a'z+b}{cz+b}$ är en mavb om $a'd - bc \neq 0$. Observera att i denna generella formel används notationen a' istället för a eftersom a används i uppgiftsbeskrivningen.

Vi vet fortsatt från uppgiftsbeskrivnignen att:

$$f_a(z) := \frac{z-a}{1-\bar{a}z} = \frac{z+(-a)}{-\bar{a}z+1}$$

Faktoridentifiering ger därför att $a' = 1$, $b = -a$, $c = -\bar{a}$ och $d = 1$ och:

$$\begin{aligned} 1 \cdot 1 - (-a)(-\bar{a}) = 1 - a\bar{a} = \\ = 1 - |a|^2 > 0 \end{aligned}$$

eftersom $|a| < 1$ enligt uppgiftsbeskrivningen.

VSV

(b)

Påstående: $f_a^{-1}(z) = f_{-a}(z)$

Från uppgiftsbeskrivningen får vi att:

$$f_a(z) := \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$$

Vi vet att

$$\begin{aligned} a &= x+iy \qquad => \qquad -a = -x-iy \\ \bar{a} &= x-iy \qquad => \qquad \overline{(-a)} = -x+iy \end{aligned}$$

Alltså är också:

$$f_{-a}(z) := \frac{z+a}{1+\bar{a}z}$$

För att f_{-a} ska vara inversfunktionen till f_a måste därför $f_a(f_{-a}(z)) = z$ enligt definitionen för en inversfunktion. Om detta stämmer bevisar det påståendet. Låt oss visa detta:

$$\begin{aligned} f_a(f_{-a}(z)) &= \frac{\frac{z+a}{1+\bar{a}z} - a}{1 - \bar{a}\frac{z+a}{1+\bar{a}z}} = \\ &= \frac{z + \cancel{a} - \cancel{a} - a\bar{a}z}{1+\bar{a}z} \cdot \frac{1+\bar{a}z}{1+\cancel{\bar{a}z} - \cancel{\bar{a}z} - \bar{a}a} = \\ &= \frac{z - a\bar{a}z}{\cancel{1+\bar{a}z}} \cdot \frac{\cancel{1+\bar{a}z}}{1-\bar{a}a} = \\ &= \frac{z - a\bar{a}z}{1-\bar{a}a} = \\ &= z\frac{\cancel{(1-\bar{a}a)}}{\cancel{1-\bar{a}a}} = \\ &= z \end{aligned}$$

Alltså stämmer påståendet

VSV

(c)

Låt $z \in C[0,1]$ => $|z| = 1$ => $\bar{z}z = 1$ eftersom $|z| = \bar{z}z$

$$
\begin{aligned}
|f_a(z)| &= \left|\frac{z-a}{1-\bar{a}z}\right| = \{\bar{z}z = 1\} \\
&= \left|\frac{z(1-a\bar{z})}{1-\bar{a}z}\right| = \\
&= \frac{|z||1-a\bar{z}|}{|1-\bar{a}z|} = \{|z| = 1\} \\
&= \frac{|1-a\bar{z}|}{|1-\bar{a}z|} = \\
&= \frac{|1-a\bar{z}|}{|\overline{1-a\bar{z}}|} = \{\text{För ett tal } w \in \mathbb{C} \text{ gäller det att } |w| = |\bar{w}|\} \\
&= 1
\end{aligned}
$$

Alltså gäller det att $C[0,1] \mapsto C[0,1]$.

Vi behöver nu studera vad som händer med själva disken innanför enhetscirkeln $D(0,1)$. Denna mängd kan antingen avbildas utanför enhetscirkeln eller innanför enhetscirkeln. Det räcker således att studera ett tal som tillhör $D[0,1]$ för att avgöra hur avbildningen sker. Enligt uppgiftsbeskrivningen är $|a| < 1 => a \in D(0,1)$.

$$f_a(a) = 0 \in D[0,1]$$

Alltså avbildas inandömet hos enhetsdisken innanför enhetscirkeln och $D[0,1] \mapsto D[0,1]$.

VSB

3.13

I den här uppgiften är det viktigaste att komma ihåg mantrat " Möbiustransform avbildar **cirklar och linjer** på **cirklar och linjer**" .

För alla uppgifer gäller att vi endast ska använda punkterna $0, \infty, \pm 2, \pm(1+i)$

$$
f(z) = \frac{2z}{z+2}
$$

$$
\begin{cases}
f(0) = 0 \\
f(\infty) = 2 \\
f(2) = 1 \\
f(-2) = \infty \\
f(1+i) = \frac{2+2i}{3+i} = \frac{6+2+i(-2+6)}{10} = \frac{4+2i}{5} \\
f(-1-i) = -\frac{2+2i}{1-i} = -\frac{2-2+i(2+2)}{2} = -2i
\end{cases}
$$

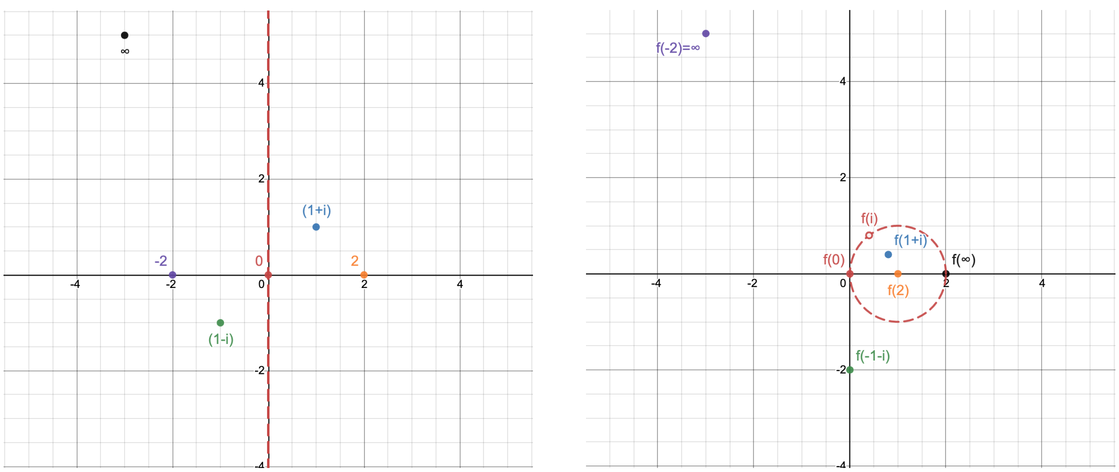
Vi kan därför direkt rita ut alla dessa punkter i både z-planet och ω-planet, se figur.

Alla uppgifter görs sedan på samma sätt men här väljs **b)**.

b)

Vi vill avbilda y-axeln (som är en linje) på antingen en cirkel eller en linje. Vi vet att 0an och ∞ är två punkter på y-axeln, så vi vet att bilden av y-axeln måste gå genom $f(0) = 0$ och $f(\infty) = 2$, men gör den det som en linje eller som en cirkel?

I vanliga fall hade man här bara kunnat kolla på en godtycklig punkt på y-axeln mellan 0 och ∞ exempelvis i och sett att $f(i) = \frac{2}{5}(1 + 2i)$ och därav dragit slutsatsen att det måste vara en cirkel (se $f(i)$ i figuren). Men i uppgiften ska vi endast använda de givna punkterna, så till vår hjälp har vi istället Möbiustransformens *konformitet*, dvs att Möbiustransformen bevarar vinklar. Vinkeln mellan y- och x-axeln är i z-planet 90°och alltså måste vinkeln mellan f(x-axeln) och f(y-axeln) vara 90° i ω-planet. Från **a)** har vi att f(x-axeln) = x-axeln. Därav följer att avbildningen måste vara en cirkel som skär x-axeln i origo och (2,0), dvs C(1,1) (enhetscirkeln med centrum i 1), eftersom den skär x-axeln med vinkeln 90°. Se figur



(a) z-planet

(b) w-planet (OBS: $f(i)$ inte en av de avsedda punkterna, bara med för att demonstrera)

3.14

b)

Vi ska ha någon Möbiustransformation $M(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ så att

$$\begin{cases} M(1) = 0 \\ M(1+i) = 1 \\ M(2) = \infty \end{cases}$$

Alltså, bara att sätta igång och ställa upp samband.

$$\begin{cases} M(1) = 0 \implies a + b = 0 \implies b = -a \\ M(1+i) = 1 \implies \frac{a(1+i)+b}{c(1+i)+d} = 1 \\ M(2) = \infty \implies 2c + d = 0 \implies d = -2c \end{cases}$$

Okej, nu har vi en hel del samband, men vi har **4** okända men bara **3** ekvationer. Men i uppgiften behöver vi bara hitta **en** Möbiustransform som uppfyller villkoren och från första och andra ekvationen har vi fått två direkta samband. Vi kan därför välja en variabel fritt, sätt alltså $a = 1$.

Mittenekvationen blir då

$$\frac{i}{c(-1+i)} = 1$$
$$c = \frac{i}{(-1+i)} = \frac{1-i}{2}$$

Vi får alltså

$$M(z) = \frac{z-1}{\frac{1-i}{2}(z-2)} = \frac{(1+i)z-(1+i)}{z-2}$$

(Sista steget förlänger vi bara med komplexa konjugatet för att få det på samma form som i facit, inte nödvändigt)

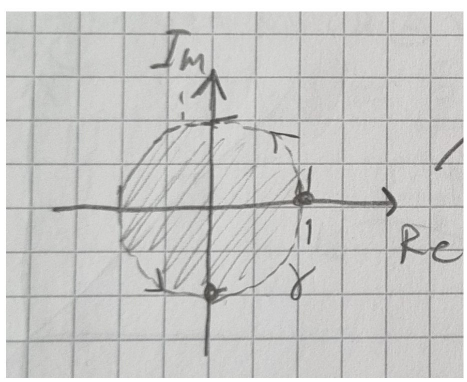
3.17

(a)

Vi har transformationen:

$$w = \frac{iz - i}{z + 1}$$

Låt γ vara kurvan som beskrivs av $|z| = 1$ i positiv riktning. Från uppgiftsbeskrivningen får vi att vi vill studera avbildningen av:



Vi kan se att vår transformation är skriven på formen för en mavb (möbiusavbildning/möbiustransformation), dvs $M(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, $\quad a = i, b = -i, c = 1$ och $d = 1$. Således är detta också en mavb om $ad - bc \neq 0$:

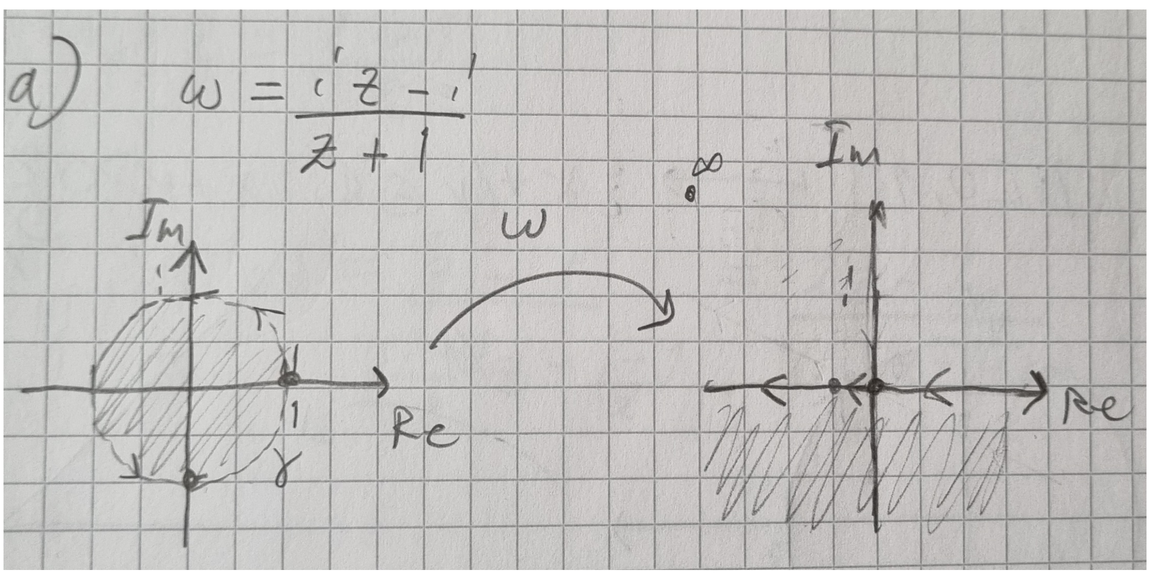
$$ad - bc = i \cdot 1 - (-i) \cdot 1 = 2i \neq 0$$

Alltså har vi att göra med en mavb. Kom ihåg att möbiustransformer avbildar **cirklar och linjer** på **cirklar och linjer**. Och vi har ju att göra med en cirkel. För att veta om vår avbildning är en cirkel eller linje (mer spcifikt vilken cirkel eller linje som vi får av transformationen) behöver vi bara välja tre punkter som ligger på vår cirkel och stoppa in dem i vår mavb. När vi har transformerat dessa punkterna kommer vi ha tre punkter på vår avbildning. Med dessa tre punkter kan man alltid ta fram en unik cirkel eller linje. Låt oss välja punkterna $1, -1$ och i som ligger på γ (notera att γ noteras lite annorlunda i bilden).

$$w(1) = \frac{\cancel{i} - \cancel{i}}{1+1} = 0 \qquad\qquad w(-1) = \frac{-i-i}{\cancel{-1} + \cancel{1}} = \text{"}\infty\text{"}$$

$$w(i) = \frac{i^2 - i}{i+1} = \frac{-1-i}{i+1} = \frac{-\cancel{(1+i)}}{\cancel{1+i}} = -1$$

=> γ (dvs kurvan $|z| = 1$) avbildas på realaxeln och detta är en linje. Fortsatt har $|z| < 1$ innandömet orienterat tv om kurvans riktning.[1] Innandömet hos avbildningen kommer därför också vara tv om kurvans riktning. Alltså avbildas $|z| < 1$ på $y < 0$, dvs på det nedre halvplanet:

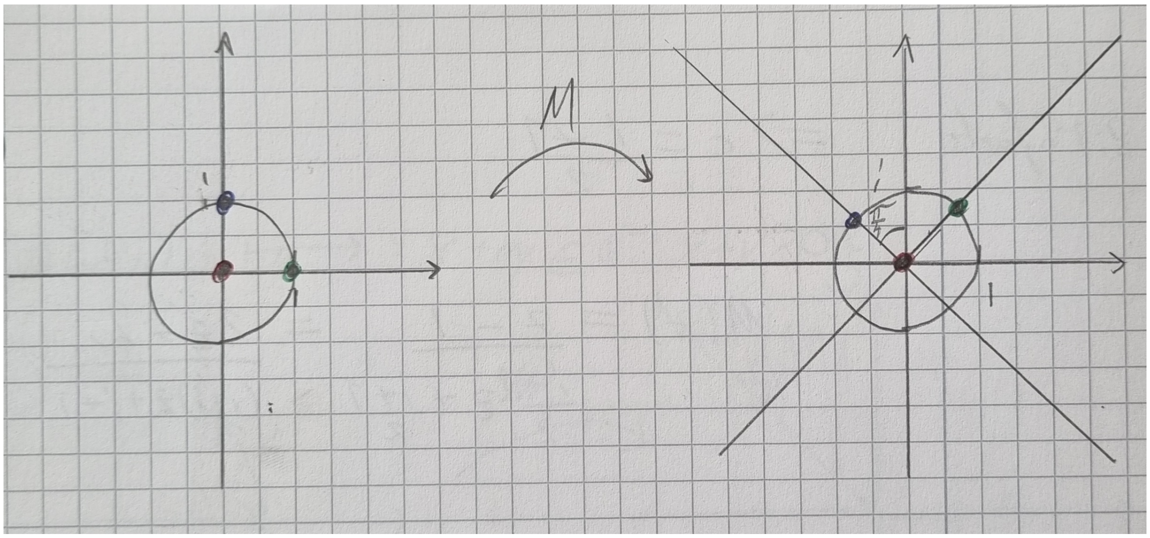


[1]Det finns två sätt att veta vart vårt innandöme kommer att avbildas. Antingen gör man som i denna uppgift och kollar på ytterkantens orientering. Innandömet kommer alltid vara på samma sida om kurvans riktning. Eller så tar man bara en punkt som tilhör innandömet och ser var den avbildas.

3.21

(c)

Från uppgiftbeskrivningen får vi att vi söker en mavb/transforamtion som roterar talplanet likt nedan:



Mer konkret ska alltså möbiusavbildningen rotera det komplexa talplanet $\frac{\pi}{4}$ rad. En bra sak att veta är att transformationen $e^{i\varphi}$ är en transformation som roterar talplanet med φ rad.

$$
\begin{aligned}
=> M(z) &= e^{i\frac{\pi}{4}} z = \\
&= \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) z = \\
&= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) z = \\
&= \frac{(1+i)z}{\sqrt{2}} = \\
&= \frac{(1+i)z + 0}{0 \cdot z + \sqrt{2}}
\end{aligned}
$$

Den generella formeln för en mavb är $M(z) = \frac{az+b}{cz+d}$. Faktoridentifiering ger därför att $a = 1 + i$, $b = 0$, $c = 0$ och $d = \sqrt{2}$. Enligt definitionen för en mavb måste dock också $ad - bc \neq 0$.[2] Låt oss kontrollera detta:

[2] Anledningen till att detta är en del av defintionen är för att om $= 0$ är den rationella funktionen $M(z)$ konstant och då är inte $M(z)$ särskilt intressant. Fortsatt är isf $M(z)$ inte holo eftersom konstanta funktioner inte är holo. Mavbs är alltid holo.

$$ad - bc = (1+i)\sqrt{2} - 0 \cdot 0 = (1+i)\sqrt{2} \neq 0$$

Alltså är detta en mavb och vi har funnit vårt $M(z) = \frac{(1+i)z}{\sqrt{2}}$.

3.31

a)

Metod 1: (Trigonometriska samband)

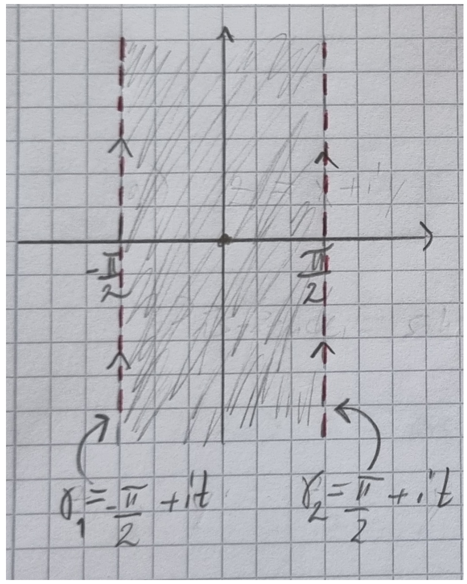
$$\begin{aligned}\sin(z) = \sin(x+iy) &= \sin(x)\cos(iy) + \cos(x)\sin(iy) \\ &= \sin(x)\cos(iy) + i\cos(x)(-i\sin(iy)) \\ &= \sin(x)\cosh(y) + i\cos(x)\sinh(y) \quad \square\end{aligned}$$

Metod 2: (Exponentialdefinitioner)

$$\begin{aligned}&\sin(x)\cosh(y) + i\cos(x)\sinh(y) = \\ &= \frac{(e^{ix}-e^{-ix})(e^{y}+e^{-y})}{4i} + i\frac{(e^{ix}+e^{-ix})(e^{y}-e^{-y})}{4} \\ &= \frac{e^{ix+y}+e^{ix-y}-e^{-ix+y}-e^{-ix-y}}{4i} - \frac{e^{ix+y}-e^{ix-y}+e^{-ix+y}-e^{-ix-y}}{4i} \\ &= \frac{2e^{ix-y}-2e^{-ix+y}}{4i} = \frac{e^{i(x+iy)}-e^{-i(x+iy)}}{2i} \\ &= \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i} = \sin(z) \qquad \square\end{aligned}$$

3.39

Vi vill ta reda på hur området $M = \{z \in \mathbb{C} : -\frac{\pi}{2} < \operatorname{Re}(z) < \frac{\pi}{2}\}$ avbildas under funktionen $f(z) = \sin(z)$. Låt därför $\gamma_1(t) = -\frac{\pi}{2} + it$ och $\gamma_2(t) = \frac{\pi}{2} + it, \quad t \in (-\infty,\infty)$. Dessa parametrsierade funktioner följer utkanten av vårt område M. I bilden nedan ses M, γ_1 och γ_2:

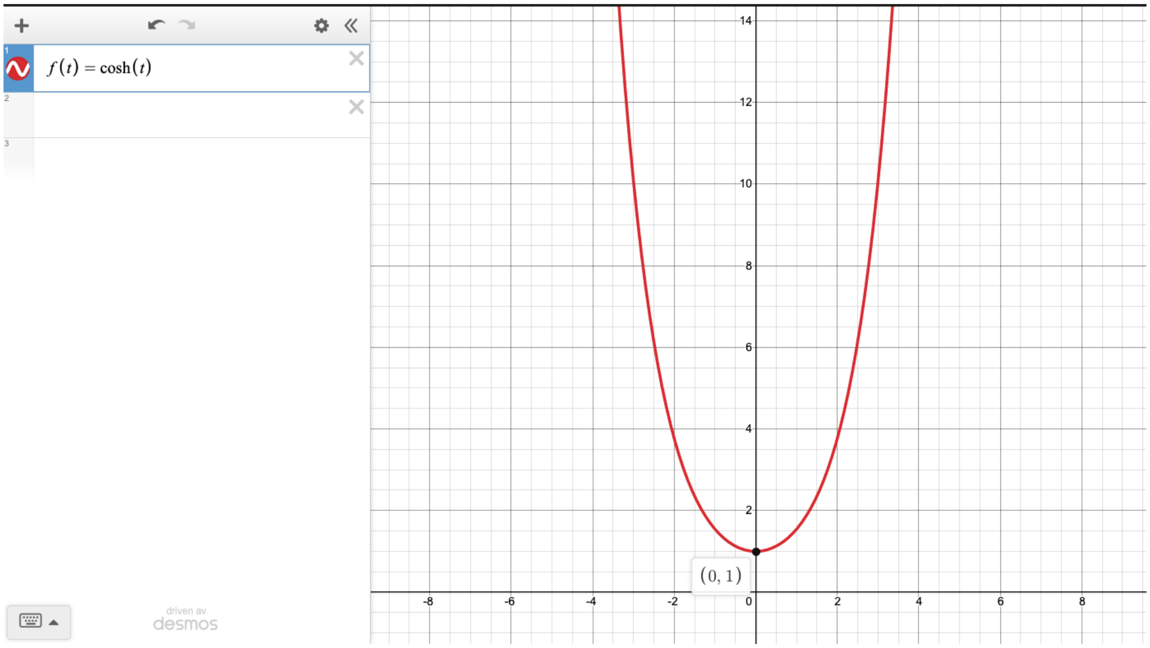


$$
\begin{aligned}
f(\gamma_1) &= \sin\left(-\frac{\pi}{2} + it\right) = \{\text{Resultatet från uppgift 3.31 (a) ger}\} \\
&= \underbrace{\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)}_{=-1}\cosh(t) + i\underbrace{\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)}_{=0}\sinh(t) = \\
&= -\cosh(t)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f(\gamma_2) &= \sin\left(\frac{\pi}{2} + it\right) = \{\text{Resultatet från uppgift 3.31 (a) ger}\} \\
&= \underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{=1}\cosh(t) + i\underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{=0}\sinh(t) = \\
&= \cosh(t)
\end{aligned}
$$

Alltså avbildas utkanterna av området M på den reella linjen som är samma som $\pm$ värdemängden[3] av funktionen $\cosh(t)$, $\quad t \in (-\infty,\infty)$. Om man inte redan känner till värdemängden hos $\cosh(t)$ (och någon av de övriga hyperbolicusfunktionerna $\sinh(t)$ och $\tanh(t)$) kan det vara bra att känna till. Värdemängden för $\cosh(t)$ är emellertid $[1,\infty)$ (se Figur 2) och värdemängden för $-\cosh(t)$ blir därför $(-\infty,-1]$. Således avbildas utkanterna av M (dvs γ_1 och γ_2) på linjerna $[1,\infty)$ och $(-\infty,-1]$.

[3] värdemängd=vilka y-värden en funktion antar

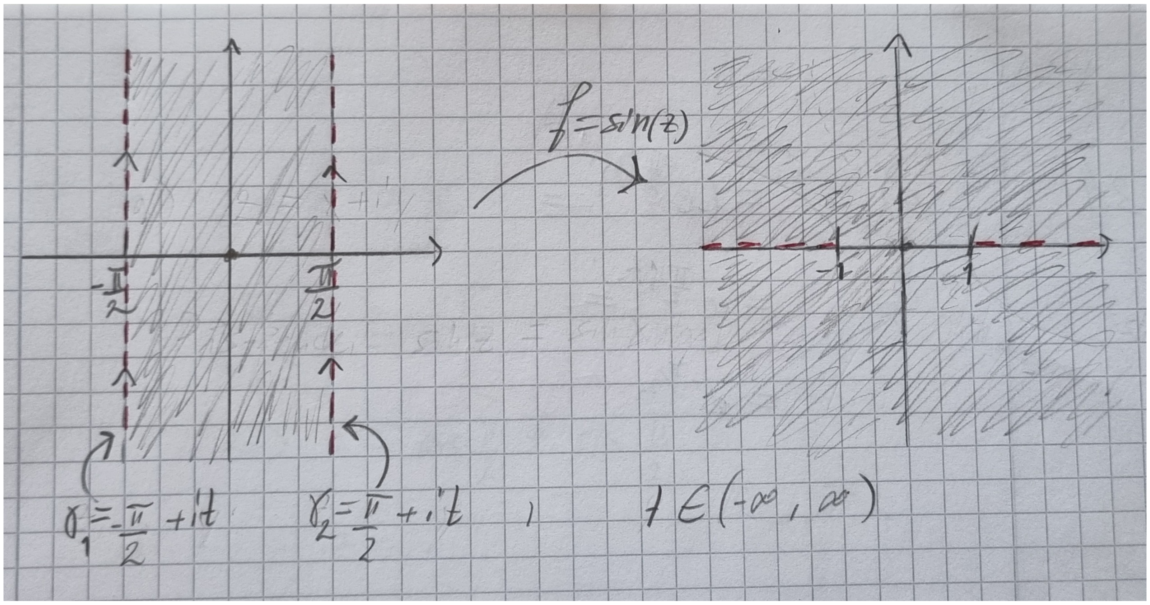


Figur 2: Detta är den reella plotten $\cosh(t)$ för de som inte är familjär med den. Här ser vi bl.a. att $\cosh(t)$ inte antar värden mindre än 1. Värt att notera är att $\cosh(t)$ inte är ett andragradspolynom även fast formen på grafen kan likna formen hos ett andragradspolynom.

Nu behöver vi veta var innandömet av M avbildas. Låt oss därför ta en punkt, t.ex. punkten $z = 0$, och se vart den avbildas i förhållande till $f(\gamma_1)$ och $f(\gamma_2)$:

$$\begin{aligned} \sin(0) &= \sin(0)\cosh(0) + i\cos(0)\sinh(0) = \\ &= 0 \cdot 1 + i \cdot 1 \cdot 0 = \\ &= 0 \end{aligned}$$

Detta ger oss att området M avbildas på $\mathbb{C}\backslash\{(-\infty, -1],[1,\infty)$. Detta syns i bilden nedan där de rödstreckade linjerna inte tillhör respektive mängd:



3.41

(c)

$$\begin{aligned} i^i &= \left(e^{\frac{\pi}{2}i}\right)^i = \\ &= e^{\frac{\pi}{2}i^2} = \\ &= e^{-\frac{\pi}{2}} \end{aligned}$$

Kom ihåg att $e^{-\frac{\pi}{2}}$ är ett reellt tal alltså har vi det nu på formen $x+iy$ där $x = e^{-\frac{\pi}{2}}$ och $y = 0$.

(d)

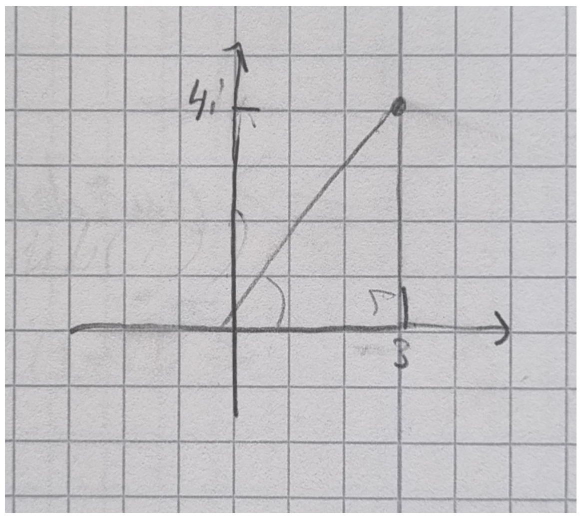
$$\begin{aligned} e^{\sin(i)} = \left\{ \text{Utnyttja att } \sin(\varphi) = (e^{i\varphi} - e^{-i\varphi})\frac{1}{2i} \right\} &= e^{\left(e^{i^2} - e^{-i^2}\right)\frac{1}{2i}} = \\ &= e^{(e^{-1} - e^{1})\frac{1}{2i}} = \{\text{Förläng med } i \text{ i bråket}\} \\ &= e^{(e^{-1} - e^{1})\frac{i}{2i^2}} = \\ &= e^{i\frac{(e^{1} - e^{-1})}{2}} = \left\{ \text{Utnyttja att } \sinh(\varphi) = \frac{e^{\varphi} - e^{-\varphi}}{2} \right\} \\ &= e^{i\sinh(1)} = \{\text{Utnyttja att: } e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i\sin(\varphi)\} \\ &= \cos(\sinh(1)) + i\sin(\sinh(1)) \end{aligned}$$

Detta är på formen $x + iy$ eftersom $\sinh(1) \approx 1.175$ är ett reellt tal och när vi stoppar in ett rellt tal i cos och sin får vi ut reella värden. Dvs $\cos(\sinh(1)) \approx 0.385 \in \mathbb{R}$ och $\sin(\sinh(1)) \approx 0.923 \in \mathbb{R}$. Kort och gott kan man alltså approximera $e^{\sin(i)} \approx 0.385 + i \cdot 0.923$. Alltså är ett tips att det ibland är lättare att se vissa saker om man slår det på en miniräkanre.[4]

(e)

$$e^{\mathrm{Log}(3+4i)} = \{\arg(3+4i) \in (-\pi,\pi]\} = 3 + 4i$$

Detta är den *principala logaritmen* och eftersom $\arg(3+4i) \in (-\pi,\pi]$ (den principala logaritmen existerar bara på detta intervall) så existerar ett värde för logaritmen.



3.45

I dessa uppgifterna har vi att göra med den *principala grenen* av de komplexa logaritmerna.[5] För att man ska existera en lösning måste vi alltså kontrollera om $\arg(z) \in (-\pi,\pi]$. Detta för eftersom den principala grenen endast är definierat inom det spannet.

[4] Precis som med de trigonometriska funktionerna $(\sin(x), \cos(x), \tan(x))$ får man ut ett reellt värde ur en hyperbolicusfunktion $(\sinh(x), \cosh(x), \tanh(x))$ om man stoppar in ett reellt värde i den. Det kan vara bra att bekanta sig med hyperbolicusfunktionerna om man inte känner till dem tillräckligt sedan innan.

[5] Kom ihåg att det finns oändligt många grenar hos de komplexa logaritmerna. En logaritm ska fungera som inversfunktioner till $\exp(z)$. Dock gäller det att en funktion omm har en invers om de är injektiva. Men $\exp(z)$ är inte injektiv tillskillnad från sin reella motsvarighet. Det finns alltså olika input z som ger samma output. Däremot är den injektiv inom vissa intervall och därför delar vi upp de komplexa logaritmerna i flera sk grenar. Om man tycker detta är svårt kan det vara bra att bättra på ens förståelse för inversfunktioner generellt. Och två exempel på funktioner från envariabelanalys som endast har en invers på ett specifikt intervall är $y = x^2$ som har en inversen $\sqrt{y}$ för $x \geq 0$ eller $y = \tan(x)$ som har inversen $\arctan(y)$ inom intervallet $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$. Anledningen till att funktionen är rätt så logiskt om man tänker på det. Om man exempelvis har funktionen $y = x^2$ som man låter vara definierad på hela $\mathbb{R}$ och som antar värdet $y = 4$ både för $x = -2$ och $x = 2$. Om dess invers är $f^{-1}(y)$ vad skulle då värdet för $f^{-1}(4)$ då vara? Skulle det vara $x = 2$ eller $x = -2$?

(a)

Argumentet för z är $\frac{\pi}{2} \in (-\pi,\pi]$. Alltså existerar en lösning.

$$\begin{aligned}
\operatorname{Log}(z) &= \frac{\pi}{2} i \\
z &= e^{\frac{\pi}{2} i} \\
=> z &= \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \\
z &= i
\end{aligned}$$

(b)

Vi har ekvationen:

$$\operatorname{Log}(z) = \frac{3\pi}{2} i$$

Dock kan vi ju utläsa att argumentet hos z för den här ekvationen hade varit $\frac{3\pi}{2} \notin (-\pi,\pi]$. Alltså saknar denna ekvation någon lösning eftersom den principala grenen inte är definierat för detta argument.

Kapitel 4.

4.1

c)

$$\gamma(t) = i \sin(t) \ , t \in [-\pi, \pi]$$

Längden på en kurva γ är $|\gamma(t)| = \int_a^b |\gamma'(t)| \, \mathrm{d}t$

Alltså,

$$\begin{aligned}
&|\gamma'(t)| = |i \cos(t)| = |\cos(t)| = \begin{cases} cos(t) & -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2} \\ -cos(t) & -\pi < t < -\frac{\pi}{2} \ , \ \frac{\pi}{2} < t < \pi \end{cases} \\
&|\gamma(t)| = \int_{-\pi}^{\pi} |\cos(t)| \, \mathrm{d}t = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(t) \, \mathrm{d}t - \int_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}} \cos(t) \, \mathrm{d}t - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos(t) \, \mathrm{d}t \\
&= 1 - (-1) - (-1) + 0 - 0 + 1 = 4
\end{aligned}$$

`Alt.` Notera att intervallet är exakt en period (2π-långt). $\cos(x)$ är en symmetrisk och 2π-periodisk funktion. $|\cos(x)|$ däremot är en π-periodisk funktion , därav följer att

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\cos(t)| \, \mathrm{d}t = 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(t) \, \mathrm{d}t = 2 \cdot 2 = 4$$

4.5

(a)

Vi har funktionen:

$$f(z) = z + \overline{z}$$

Vi vill parametrisera $C[0,2]$ på liknande sätt som man brukade göra i flervariabelanalyskursen och sedan integrera $f(z)$ över detta. Vi vill använda formeln:

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,\mathrm{d}t, \quad t \in [a,b] \text{ eller } t \in (a,b)$$

Cirkeln $C[0,2]$ kan beskrivas av parametriseringen: $\gamma(t) = 2e^{it}, \quad t \in [0,2\pi] => \gamma'(t) = 2ie^{it}$.

$$\begin{aligned}
=> \int_\gamma f(z) &= \int_\gamma (z + \overline{z})\,\mathrm{d}z = \{z = \gamma(t) \text{ på integrationsområdet}\} \\
&= \int_0^{2\pi} (\gamma(t) + \overline{\gamma}(t))\,\gamma'(t)\,\mathrm{d}t = \{\overline{e^{ix}} = e^{-ix}\} \\
&= \int_0^{2\pi} \left(2e^{it} + 2e^{-it}\right) 2ie^{it}\,\mathrm{d}t = \\
&= \int_0^{2\pi} \left(4ie^{2it} + 4i\right)\,\mathrm{d}t = \\
&= \left[2e^{2it} + 4it\right]_0^{2\pi} = \\
&= 2e^{4\pi i} + 8\pi i - (2e^{2i\cdot 0} + 0) = \{\text{Eulers formel ger}\} \\
&= 2(\cos(4\pi) + i\sin(4\pi)) + 8\pi i - 2 = \\
&= 2(1+0) + 8\pi i - 2 = \\
&= \cancel{2} + 8\pi i - \cancel{2} = \\
&= 8\pi i
\end{aligned}$$

4.6

Vi söker här $\int_\gamma x\,\mathrm{d}z$, $\int_\gamma y\,\mathrm{d}z$, $\int_\gamma z\,\mathrm{d}z$, $\int_\gamma \bar{z}\,\mathrm{d}z$

b)

$\gamma = C[0,1]$, vilken kan parametriseras som

$$\begin{aligned}
\gamma(t) &= e^{it} = \cos(t) + i\sin(t) \qquad t \in [0, 2\pi] \\
\gamma'(t) &= ie^(it) = -\sin(t) + i\cos(t)
\end{aligned}$$

Vilket innebär att,

$$\int_\gamma x\,\mathrm{d}z = \int_\gamma \mathrm{Re}[\gamma(t)]\gamma'(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \cos(t)(-\sin(t) + i\cos(t)) = ... = i\pi$$

och på samma sätt för integralen över y, fast där med imaginärdelen får vi $\int_\gamma y\,\mathrm{d}z = -\pi$.

För de två resterande kan vi nu göra som tipset säger och enkelt skriva om till

$$\int_\gamma z\,\mathrm{d}z = \int_\gamma x\,\mathrm{d}z + i\int_\gamma y\,\mathrm{d}z = i\pi - i\pi = 0$$
$$\int_\gamma \bar{z}\,\mathrm{d}z = \int_\gamma x\,\mathrm{d}z - i\int_\gamma y\,\mathrm{d}z = i\pi + i\pi = 2\pi i$$

4.17

Vi har

$$F(z) = \frac{i}{2}\left(\mathrm{Log}(z+i) - \mathrm{Log}(z-i)\right)$$

Notera att denna funktionen är väldefinerad och holo för $\mathrm{Re}(z) > 0$ eftersom vi inte riskerar att få logaritmen av 0 och vi kan hålla oss till en logaritmisk gren.

För att visa att det är en antiderivata räcker det alltså att visa att dess derivata är den sökta,

$$F'(z) = \frac{i}{2}\left(\frac{1}{z+i} - \frac{1}{z-i}\right) = \frac{i}{2}\left(\frac{z-i-(z+i)}{z^2+1}\right) = \frac{1}{z^2+1}$$

Om $F(z) = \arctan(z)$ så skulle $\tan(F(z)) = z$ eller $F(\tan(z)) = z$, man kan välja att försöka visa vilken som av dessa tror jag. Här kommer ett exempel,

$$\tan(F(z)) = \frac{\sin(F(z))}{\cos(F(z))} = \frac{e^{iF(z)} - e^{-iF(z)}}{i(e^{iF(z)} + e^{-iF(z)})} =$$
$$\% \left[e^{iF(z)} = e^{i\frac{i}{2}(\mathrm{Log}(z+i) - \mathrm{Log}(z-i))} = e^{\frac{1}{2}}\frac{(z-i)}{(z+i)}\right]$$
$$= \frac{e^{\frac{1}{2}}\left(\frac{(z-i)}{(z+i)} - \frac{(z+i)}{(z-i)}\right)}{e^{\frac{1}{2}}\left(\frac{(z-i)}{(z+i)} + \frac{(z+i)}{(z-i)}\right)} = \frac{(z-i)^2 - (z+i)^2}{i((z-i)^2 + (z+i)^2)} = \frac{-4zi}{i(2z^2-2)} = \frac{2z}{1-z^2} \neq z$$

Alltså är $F(z) \neq \arctan(z)$ trots att den är en antiderivata till $\frac{1}{1+z^2}$.

($\arctan(z)$ är en antiderivata till $\frac{1}{z^2+1}$ endast då $z \in \mathbb{R}$, om jag minns rätt)

4.29

Vi vill visa att

$$\int_{C[0,\,2]} \frac{1}{z^3+1}\,\mathrm{d}z = 0$$

Låt $f(z) = \frac{1}{z^3+1}$. Vi kan då notera att $f(z)$ är holo i området $G = \mathbb{C} \setminus \{-1\}$. (Visa med Cauchy Riemann).

Vi kan nu notera att $C[0, 2] \sim_G C[0, r]$ när $r > 1$. Dvs cirklarna är homotopa på området G där funktionen är holomorf. Cirklarna är dessutom slutna och deriverbara (C^1). Då det följer från Cauchys sats att

$$\int_{C[0,\,2]} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{C[0,\,r]} f(z)\,\mathrm{d}z \quad , r > 1$$

Från triangelolikheten för integraler kan vi ställa upp följande.

$$\left|\int_{C[0,\,r]} \frac{1}{z^3+1}\,\mathrm{d}z\right| \leq \max_{z\in C[0,\,r]} \underbrace{\left|\frac{1}{z^3+1}\right|}_{=\star} \underbrace{|C[0,r]|}_{=2\pi r} = \frac{2\pi r}{r^3-1} \longrightarrow 0 \text{ då } r \to \infty$$

$$\star = \left|\frac{1}{r^3e^{3i\theta}+1}\right| \leq \frac{1}{|r^3e^{3i\theta}| - |1|} = \frac{1}{r^3-1}$$

Vilket bevisar påståendet genom likeheten ovan.

$\square$

Kommentar $\star$: Det största värdet i ett bråk fås när nämnaren är så liten som möjligt. Från triangelolikheten följer att $|a + b| \geq |a| - |b| \iff \frac{1}{|a+b|} \leq \frac{1}{|a|-|b|}$.

4.37

(a)

$$\int_{C[-1,2]} \frac{z^2}{4-z^2}\,\mathrm{d}z = \int_{C[-1,2]} \frac{z^2}{(2-z)(2+z)}\,\mathrm{d}z = \{\text{Endast } z = -2 \text{ är innanför } C[-1{,}2]\}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{C[-1,2]} \frac{\frac{z^2}{2-z}}{2+z}\,\mathrm{d}z = \left\{ \text{=> } f(z) = \frac{z^2}{2-z} \text{ CIF ger} \right\} \\
&= 2\pi i f(-2) = \\
&= 2\pi i \frac{\cancel{(-2)^2}}{\cancel{2-(-2)}} = \\
&= 2\pi i
\end{aligned}$$

(b)

$$\int_{C[0,1]} \frac{\sin(z)}{z}\,\mathrm{d}z = \{\text{CIF ger}\} = 2\pi i \sin(0) = 0$$

(c)

$$\begin{aligned}\int_{C[0,2]} \frac{e^z}{z(z-3)}\,\mathrm{d}z = \int_{C[0,2]} \frac{\frac{e^z}{z-3}}{z}\,\mathrm{d}z = \{\text{CIF ger}\} \\ = 2\pi i \frac{e^0}{0-3} = \\ = -\frac{2}{3}\pi i\end{aligned}$$

Kapitel 5.

5.1

c)

Beräkna

$$I = \int_{\square} \frac{\sin(2z)}{(2-\pi)^2}\,\mathrm{d}z$$

där $\square$ är kvadraten med centrum i origo och sidlängden 4. Notera att integranden är holo på $\mathbb{C}\setminus\{\pi\}$ och att den singulära punkten π ligger i området som innesluts av $\square$. Vi har att $\square$ är homotop med någon $D(\pi, R) \subseteq \square$ (R kan väljas tillräckligt litet så att cirkeldisken innesluter sig i $\square$ ($R < 4-\pi$)).

Från Cauchys sats har vi då först att,

$$I = \int_{\square} \frac{\sin(2z)}{(2-\pi)^2}\,\mathrm{d}z = \int_{D(\pi,R)} \frac{\sin(2z)}{(2-\pi)^2}\,\mathrm{d}z$$

Låt $f(z) = \sin(2z)$, vilken är holomorf i hela $\mathbb{C}$, och vi kan nu direkt använda Cauchys integralformel för derivator

$$\begin{aligned}f'(\pi) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{D(\pi,R)} \frac{f(z)}{(2-\pi)^2}\,\mathrm{d}z = I \\ I &= f'(\pi)2\pi i \\ I &= 2\cos(2\pi)2\pi i = 4\pi i\end{aligned}$$

5.3

a)

Beräkna integralen

$$\int_{C[0,3]} \mathrm{Log}(z-4i)\,\mathrm{d}z$$

.

Här ska vi använda oss av lite kluriga knep! Vi vet att den komplexa logaritmen blir problematisk i origo och när argumentet passerar den negativa real-axeln eftersom argumentet är periodiskt. Det kan därför kännas väldigt konstigt att integrera över $C[0,3]$ som ju passerar den negativa realaxeln. Men tack och lov så har vi i argumentet till logaritmen en translation med $-4i$, vilket innebär att vi faktiskt alltid kommer att befinna oss i det nedre halvplanet.

Vi kan se det lättare med ett variabelbyte. Låt $\omega = z - 4i$, då blir integralen

$$\int_{C[0,3]} \mathrm{Log}(z - 4i)\,\mathrm{d}z = \int_{C[-4i,3]} \mathrm{Log}(\omega)\,\mathrm{d}\omega$$

Notera nu att $\mathrm{Log}(\omega)$ holomorf i området $G = D[-4i,3]$ som innesluts av $C[-4i,3]$ (eftersom vi kan hålla oss till den principala grenen av komplexa logaritmen). $C[-4i,3]$ är dessutom sluten, glatt och nollhomotop i G. Från Cauchys sats följer då att,

$$\int_{C[-4i,3]} \mathrm{Log}(\omega)\,\mathrm{d}\omega = 0$$

`Tips:` För en grafisk representation av detta, skriv in $(3\cos(t), 3\sin(t) - 4)$ och $0 < t < 2\pi$ i **Desmos**! Eller tänk själv att det inte finns något $z \in C[0,3]$ sådant att argumentet i logaritmen kommer passera real-axeln. Det absolut närmaste vi kommer är när $z = 3i$!

5.11

Strategi:

Innan vi påbörjar beviset kan det vara bra att säga att nyckeln till det här beviset är att använda sig av AFS och faktorsatsen i ett *induktionsbevis*. Det 'intuitiva' sättet att förstå den här uppgiften är att man vill applicera AFS+faktorsatsen på $p(z)$ n antal gånger. Men eftersom 'n' är ett godtyckligt heltal är detta emellertid inte ett rigoröst sätt att bevisa den här typen av saker. I sådana här situationer applicerar man därför s.k. induktionsbevis. Du bör ha kommit i kontakt med den här typen av bevis förut men annars kan det vara bra att repetera det genom att besöka: `https://www.matteboken.se/lektioner/matte-5/talfoljder-och-induktionsbevis/induktionsbevis`.

Påstående:
Om p är ett polynom av graden $n > 0$ existerar det komplexa tal $c, z_1, z_2, ..., z_k$ och postiva heltal $j_1, j_2, ..., j_k$, där $j_1 + j_2 + ... + j_k = n$, sådana att:

$$p(z) = c(z - z_1)^{j_1}(z - z_2)^{j_2}...(z - z_k)^{j_k}$$

Bevis:

Vi vill nu göra ett *induktionsbevis* för att bevisa detta.

1. Låt oss börja med fallet $n = 1$. Då har vi att:

$$p(z) = az + b$$

Om vi faktoriserar ut a får vi att:

$$p(z) = a\left(z + \frac{b}{a}\right) = c(z + z_1)$$

där $c = a$, $z_1 = \frac{a}{b}$ och $j_1 = 1$. Alltså stämmer påståendet för $n = 1$.

2. Låt nu $p(z)$ vara ett polynom av grad $n = m > 0$. Antag nu att påståendet stämmer för p av denna grad m (att göra ett sådant här antagande är <u>mycket viktigt</u> när man håller på med induktionsbevis även fast det kanske låter konstigt). Dvs:

$$p(z) = cz^m + a_{m-1}z^{m-1} + ... + a_0 = c(z - z_1)^{j_1}(z - z_2)^{j_2}...(z - z_k)^{j_k}, \quad m > 0$$

3. Låt oss nu undersöka om påståendet också stämmer för ett polynom av grad $m + 1$. Vi har :

$$q(z) = cz^{m+1} + a_m z^m + ... + a_0$$

AFS ger då att $\exists z_1 \in \mathbb{C} : q(z_1) = 0$. Faktorsatsen säger nu att $q(z)$ kan skrivas som:

$$q(z) = (z - z_1)r(z)$$

där $r(z)$ är ett nytt polynom av grad $m \geq 0$.

Men för ett polynom av grad m stämmer påståendet enligt antagande. Alltså måste även påståendet gälla för $q(z)$ eftersom:

$$q(z) = (z - z_1)r(z) = c(z - z_1)^{j_1}(z - z_2)^{j_2}...(z - z_k)^{j_k}$$

Slutligen vet vi också att om man har ett polynom av grad $m+1$ är den högsta potensen just $m+1$ alltså måste även $j_1 + j_2 + ... + j_k = m + 1$.

1., **2.** och **3.** <u>tillsammans</u> ger nu genom induktion att påståendet stämmer.

VSB

5.15

$$f(z) = u(z) + iv(z)$$

$f(z)$ är hel => $u(z)$ och $v(z)$ är hela och harmoniska. Från uppgiftbeskrivningen får vi att det $\exists M > 0 : |u(z)| \leq M \forall z \in \mathbb{C}$.

Påstående: $f(z)$ är konstant.

Låt $\Phi(z) = e^{f(z)}$ => $\Phi(z)$ är hel (ty $f(z)$ och e^z är hela)

$$\begin{aligned}
\Phi(z) &= e^{f(z)} = \\
&= e^{u(z)+iv(z)} = \\
&= e^{u(z)}e^{iv(z)} = \\
&= e^{u(z)}(\cos(v(z)) + i\sin(v(z)))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
=> |\Phi(z)| &= |e^{u(z)}(\cos(v(z)) + i\sin(v(z)))| = \\
&= \sqrt{e^{2u(z)}\cos^2(v(z)) + e^{2u(z)}\sin^2(v(z))} = \\
&= \sqrt{e^{2u(z)}\underbrace{\left(\cos^2(v(z)) + \sin^2(v(z))\right)}_{=1}} = \{\text{Trig. 1 ger}\} \\
&= \sqrt{e^{2u(z)}} = \\
&= e^{u(z)} \leq \\
&\leq e^M
\end{aligned}$$

Liouvilles sats ger att $\Phi(z)$ är konstant.

$$\begin{aligned}
&=>\Phi'(z) = e^{f(z)}f'(z) = 0 \quad \forall z \in \mathbb{C} \\
&=>f'(z) = 0 \quad \forall z \in \mathbb{C} \text{ eftersom } e^{f(z)} \neq 0 \text{ på } \mathbb{C}.
\end{aligned}$$

Sats ger nu att $f(z)$ är konstant. Alltså stämmer påståendet.

VSV

5.16

f holo på $\mathbb{C}$ och $|f(z)| < a|z| + b$ för $a, b \in \mathbb{R}$. Visa att f är ett polynom av max grad 1. dvs $f = Cz + D$.

Vi vet att för ett polynom av grad $\leq$1 gäller att andraderivatan är 0. Vi ställer direkt upp Cauchys integralformel för andraderivatan på ett område $C[\omega,R]$ som vi kommer låta omsluta hela $\mathbb{C}$ (genom att låta $R \to \infty$ och ω är en godtycklig punkt) där ju f är holo, så det är okej! Sen använder vi triangelolikheten för integraler för att uppskatta andraderivatan vid detta gränsvärde.

$$\begin{aligned}
f''(\omega) &= \frac{1}{\pi i}\int_{C[\omega,R]} \frac{f(z)}{(z-\omega)^3}\,\mathrm{d}z \\
|f''(\omega)| &= \left|\frac{1}{\pi i}\int_{C[\omega,R]} \frac{f(z)}{(z-\omega)^3}\,\mathrm{d}z\right| \leq \max_{z\in C[\omega,R]}\left|\frac{f(z)}{(z-\omega)^3}\right| 2R \\
&\leq \max_{z\in C[\omega,R]} \frac{a|z|+b}{|z-\omega|^3} 2R \leq \frac{a(|\omega|+R)+b}{R^3} 2R \underset{R\to\infty}{\longrightarrow} 0 \\
&\implies f''(\omega) = 0 \implies f'' \equiv 0 \text{ eftersom } \omega \text{ är en godtyckligt vald punkt.}
\end{aligned}$$

Därmed gäller att f är ett polynom av max grad 1. $\square$

`Kommentar:` Den sista omskrivningen i olikheterna kommer ifrån att för z på $C[\omega,R]$ är

$$\begin{aligned}
&|z-\omega| = R \\
&|z-\omega| \geq |z| - |\omega| \quad \text{omvända triangelolikh.} \\
&\implies R \geq |z| - |\omega| \\
&\implies |z| \leq R + |\omega|
\end{aligned}$$

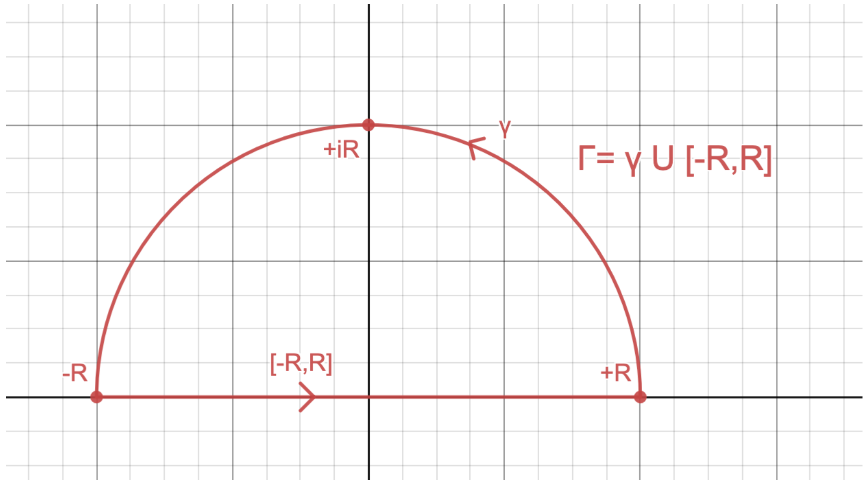
5.18

Nu börjar vi äntligen komma till de coola applikationerna av komplex analys! Beräkna

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^4+1}\,\mathrm{d}x$$

Först och främst, notera att detta är en reell integral, dvs $x \in \mathbb{R}$, så varför ska vi använda komplex analys för att lösa ett reellt problem? Kommer du på någon primitiv funktion till $\frac{1}{x^4+1}$? Nä, tänkte väl det.

Därför ska vi börja med att göra en omskrivning till det komplexa talplanet. Först konstruerar vi kurvan $\Gamma = \gamma \cup [-R,R]$ enligt figuren, dvs halvmånen som består av halvcirkeln med radie R och linjesegmentet mellan $-R$ och R. Av konvention låter vi kurvan ha positiv orientering (moturs).



Figur 3: Γ i det komplexa talplanet

Med dessa termer kan vi notera att när $R \to \infty$ så är $I = \int_{[-R,R]} \frac{1}{z^4+1}\,\mathrm{d}z$.

Framförallt kan vi ställa upp,

$$\int_\Gamma \frac{1}{z^4+1}\,\mathrm{d}z = \int_{-R}^{R} \frac{1}{z^4+1}\,\mathrm{d}z + \int_\gamma \frac{1}{z^4+1}\,\mathrm{d}z \tag{1}$$

Där mittentermen alltså är det sökta då $R \to \infty$. Vi vill nu visa att högertermen (γ-integralen) går till 0 just när $R \to \infty$. Till vår hjälp har vi triangelolikheten för integraler.

$$\left| \int_\gamma \frac{1}{z^4+1}\,\mathrm{d}z \right| \le \max_{z\in\gamma} \left| \frac{1}{z^4+1} \right| \pi R \le \max_{z\in\gamma} \frac{1}{|z|^4-1} \pi R = \frac{\pi R}{R^4-1} \underset{R\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

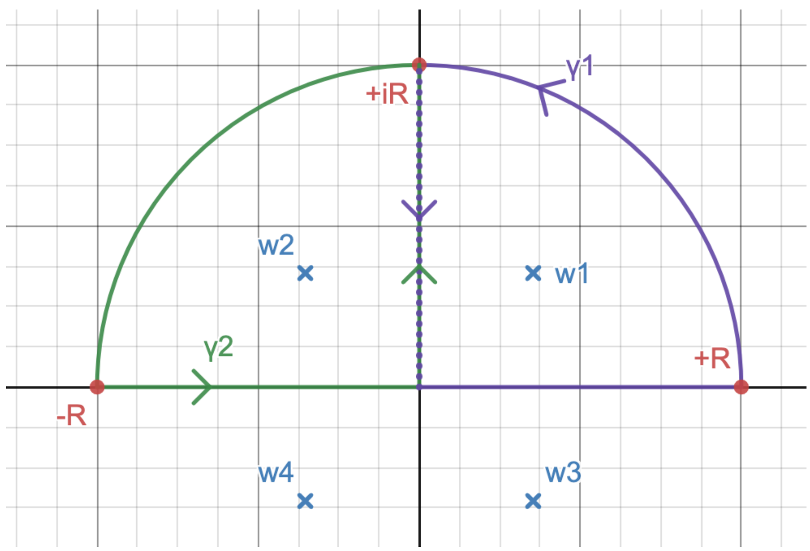
`Kommentar:` Först omvända triangelolikheten, kom ihåg ett bråk är som störst när nämnaren är som minst. Sen gäller på γ att $|z| = R$ eftersom R är radien på halvcirkeln.

Alltså har vi att när $R \to \infty$ så är $I = \int_\Gamma \frac{1}{z^4+1}\,\mathrm{d}z$ för vilken vi kan använda några av de satser vi tagit fram. (Senare i kursen kommer vi göra detta med Residykalkyl, men för närvarande får vi använda oss av Cauchys integralformel!).

Först och främst behöver vi hitta integrandens poler (dvs då $z^4 + 1 = 0$).

$$\begin{aligned} \omega^4 &= -1 \\ \rho^4 e^{4i\theta} &= -1 \implies \rho = 1 \\ e^{4i\theta} &= e^{in\pi} \quad n = 1, 3, 5, 7 \\ \theta = n\pi\frac{3}{4} &\implies \begin{cases} \theta_1 = \pi\frac{1}{4} \implies \omega_1 = e^{i\frac{\pi}{4}} \\ \theta_2 = \pi\frac{3}{4} \implies \omega_2 = e^{i\frac{3\pi}{4}} \\ \theta_3 = \pi\frac{5}{4} \implies \omega_3 = e^{i\frac{5\pi}{4}} = \overline{\omega}_2 \\ \theta_4 = \pi\frac{7}{4} \implies \omega_4 = e^{i\frac{7\pi}{4}} = \overline{\omega}_1 \end{cases} \end{aligned}$$

Av dessa poler ligger ω_1 och ω_2 i området som innesluts av Γ. Vi kan nu istället skapa kvartscirklarna γ_1 och γ_2 som omsluter varsin av ω_1 och ω_2 och tillsammans kommer utgöra Γ (notera att mittenbiten där båda kurvorna möts tar ut varandra eftersom de har motsatt riktning).



Figur 4: γ_1 och γ_2 i det komplexa talplanet som omsluter ω_1 och ω_2

Vi noterar också att för ett polynom gäller att $(z^4 + 1) = (z - \omega_1)(z - \omega_2)(z - \omega_3)(z - \omega_4)$.

Vi kan nu ställa upp ,

$$
\begin{aligned}
I = \int_\Gamma \frac{1}{z^4+1}\,\mathrm{d}z &= \int_{\gamma_1} \frac{1}{z^4+1}\,\mathrm{d}z + \int_{\gamma_2} \frac{1}{z^4+1}\,\mathrm{d}z \\
&= \int_{\gamma_1} \frac{1}{(z-\omega_1)(z-\omega_2)(z-\omega_3)(z-\omega_4)}\,\mathrm{d}z + \int_{\gamma_2} \frac{1}{(z-\omega_1)(z-\omega_2)(z-\omega_3)(z-\omega_4)}\,\mathrm{d}z \\
&= \int_{\gamma_1} \frac{\frac{1}{(z-\omega_2)(z-\omega_3)(z-\omega_4)}}{(z-\omega_1)}\,\mathrm{d}z + \int_{\gamma_2} \frac{\frac{1}{(z-\omega_1)(z-\omega_3)(z-\omega_4)}}{(z-\omega_2)}\,\mathrm{d}z \\
&= \int_{\gamma_1} \frac{f_1(z)}{(z-\omega_1)}\,\mathrm{d}z + \int_{\gamma_2} \frac{f_2(z)}{(z-\omega_2)}\,\mathrm{d}z
\end{aligned}
$$

Vi vet nu att f_1 och f_2 är holo på de områden som omsluts av γ_1 respektive γ_2, eftersom polerna som fanns i dessa områden har faktoriserats ut ur f. Kurvorna är i sin tur slutna och glatta kurvor. Alltså kan vi här köra på med Cauchys Integralformel. ($f(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-a)}\,\mathrm{d}z$)

$$
\begin{aligned}
I &= 2\pi i\,(f_1(\omega_1) + f_2(\omega_2)) \\
&= 2\pi i\left(\frac{1}{(\omega_1-\omega_2)(\omega_1-\omega_3)(\omega_1-\omega_4)} + \frac{1}{(\omega_2-\omega_1)(\omega_2-\omega_3)(\omega_2-\omega_4)}\right) \\
&= 2\pi i\left(\frac{1}{(2\frac{\sqrt{2}}{2})(2i\frac{\sqrt{2}}{2})(2\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i))} + \frac{1}{(-2\frac{\sqrt{2}}{2})(2\frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i))(i2\frac{\sqrt{2}}{2})}\right) \\
&= \frac{\pi}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{1+i} + \frac{1}{1-i}\right) \\
&= \frac{\pi}{\sqrt{2}}\left(\frac{1-i}{2} + \frac{1+i}{2}\right) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}
\end{aligned}
$$

Kapitel 6.

6.4

$$u(x,y) = e^x \sin(y)$$

a)

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \sin(y) \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = e^x \cos(y)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = e^x \sin(y) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -e^x \sin(y)$$

Vilket medför att laplacianen

$$\Delta = \nabla^2 = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

och funktionen är därmed harmonisk .

b)

Nu ska vi hitta en hel funktion f s.a. $u(x{,}y) = \mathrm{Re}(f)$. Vi vill alltså hitta någon $v(x{,}y) = \mathrm{Im}(f)$ som uppfyller Cauchy Riemanns ekvationer, (som i kapitel 2).

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = e^x \sin(y) &\implies v(x{,}y) = -e^x \cos(y) + g(x) \\
-\frac{\partial v}{\partial x} = e^x \cos(y) - g'(x) &= e^x \cos(y) = \frac{\partial u}{\partial y} \\
\implies g'(x) = 0 &\implies g(x) = C \text{ välj } C = 0
\end{aligned}$$

Slutligen har vi då alltså

$$\begin{aligned}
&f(x{,}y) = u(x{,}y) + iv(x{,}y) \\
&f(x{,}y) = e^x \sin(y) - ie^x \cos(y) = -ie^x \underbrace{(i \sin(y) + \cos(y))}_{=e^{iy}} = -ie^{x+iy} = -ie^z
\end{aligned}$$

6.7

$u(x{,}y)$ är en funktion på $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ som endast beror av x. Fortsatt ska $u(x{,}y)$ också vara harmonisk.

$$=> \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

Eftersom $u(x{,}y)$ inte beror av y innebär det att $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$. För att likheten ovan ska vara uppfylld måste därför $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$. Alltså är $u(x{,}y)$ harmonisk när $u(x{,}y)$ är ett polynom av högst grad 1 med avseende på x.

6.11

Påstående:

Om u är harmonisk och begränsad på $\mathbb{C}$ då är u konstant.

Strategi:

Vi vill lösa denna uppgift på ett liknande sätt som uppgift 5.15 och applicera Liouvilles sats. Denna typ av strategi är ofta användbar när man misstänker att man kan använda Liouvilles sats. Det som kan indikera att Liouvilles sats är en bra idé att använda i denna uppgift är att u är begränsad. En bra sak att ha med sig också är att det är underförstått att u är en reellvärd funktion som är realdelen av någon komplex funktion $f = u + iv$.

Lösning:

Eftersom u är harmonisk $\exists v$, som är harmonisk, sådan att $f(z) = u(z) + iv(z)$ där f är hel.[6]

Låt nu:

$$\Phi(z) = e^{f(z)} = e^{u(z)}e^{iv(z)}$$

$$\begin{aligned}
|\Phi(z)| &= \left|e^{u(z)}e^{iv(z)}\right| = \\
&= \left|e^{u(z)}\right|\left|e^{iv(z)}\right| = \left\{\left|e^{iv(z)}\right| = 1\right\} \\
&= \left|e^{u(z)}\right| = \\
&= \sqrt{\left(e^{u(z)}\right)^2} = \\
&= e^{u(z)}
\end{aligned}$$

Eftersom u är begränsad $\exists M \in \mathbb{R} : u \leq M$. Alltså måste även:

$$e^{u(z)} \leq e^M$$

Liouvilles sats ger nu att $\Phi(z)$ är konstant.

$$=> \Phi(z) = e^{f(z)}f'(z) = 0$$

Men eftersom $e^z \neq 0$ måste:

$$f'(z) = 0$$

$=>$ f är konstant.

Fortsatt kan vi skriva f som:

[6] Detta är en egenskap som harmoniska funktioner har.

$$f(z) = f(x,y) = u(x,y) + iv(x,y)$$

Kom nu ihåg att både u och v är reellvärda funktioner. Detta gör att u och v inte kan 'ta ut varandra' pga faktorn i framför v som gör att alla värden på $iv(x,y)$ måste vara imaginära medan alla värden på $u(x,y)$ är reella. Alltså måste därför u och v också vara konstanta.

VSB

Kapitel 7.

7.12

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} (\mathrm{Re}(c_n) + i\,\mathrm{Im}(c_n)) = \lim_{n\to\infty} (\mathrm{Re}(c_n)) + i \lim_{n\to\infty} (\mathrm{Im}(c_n))$$

Om $\lim_{n\to\infty}(\mathrm{Re}(c_n)) = a$ och $\lim_{n\to\infty}(\mathrm{Im}(c_n)) = b$ så är $\lim_{n\to\infty} c_n = a + ib = c$ men om $\lim_{n\to\infty}(\mathrm{Re}(c_n))$ ellerlim$_{n\to\infty}(\mathrm{Im}(c_n))$ divergerar kommer även $\lim_{n\to\infty} c_n$ divergera.

7.25

I de här uppgifterna vill vi ta fram potensserien till en funktion och från det sedan finna konvergensradien genom att avläsa detta ur vår potensserie.

(b)

Vi har funktionen:

$$f(z) = \frac{1}{3 - \frac{z}{2}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z}{6}}$$

Nu är vår funktion skriven på formen för en geometrisk serie, dvs $\sum_{k=0}^{\infty} a^k = \frac{1}{1-a}$ där serien endast konvergerar om $|a| < 1$ (läs mer om geometriska serier på `https://sv.wikipedia.org/wiki/Geometrisk_summa`). Om $\left|\frac{z}{6}\right| < 1$ kan vi alltså skriva f som:

$$
\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{3}\sum_{0}^{\infty}\left(\frac{z}{6}\right)^k = \\
&= \frac{1}{3}\sum_{0}^{\infty}\frac{z^k}{6^k} = \\
&= \frac{1}{3}\sum_{0}^{\infty}\frac{z^k}{(2\cdot 3)^k} = \\
&= \sum_{0}^{\infty}\frac{1}{3}\frac{z^k}{2^k\cdot 3^k} = \\
&= \sum_{0}^{\infty}\frac{1}{2^k\cdot 3^{k+1}}z^k
\end{aligned}
$$

Nu vill vi finna konvergensradien till den här potensserien. Då kommer vi ihåg att $\left|\frac{z}{6}\right| < 1$ för att den geometriska serien skulle konvergera. [7] Således är konvergensradien de z som uppfyller att $\left|\frac{z}{6}\right| < 1$. Låt oss finna dessa z:

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{z}{6}\right| &< 1 \\
\frac{|z|}{6} &< 1 \\
|z| &< 6
\end{aligned}
$$

Alltså är konvergensradien 6.

7.26

(a), (b) och (c) går ut på att använda sig av kända taylorutvecklingar (TU:s) och sedan applicera kvotkriteriet eller rotkriteriet för att finna konvergensradien.

(d)

Vi vill finna potensserien till:

$$f(z) = (\sin(z))^2$$

Strategi:

Att rakt av finna potensserien till $f(z)$ är svårt. Därför ska vi istället kolla på potensserien till $f'(z)$ och sedan undersöka om $f'(z)$:s potensserie konvergerar likformigt. Serier som konvergerar

[7] Om $\left|\frac{z}{6}\right| \geq 1$ kommer alltså vår potensserie inte att gå mot $f(z)$.

likformigt har en del riktigt användbara egenskaper. Exempelvis är en egenskap att man kan flytta in integrationstecknet innanför summationstecknet (samma egenskap gäller för derivering). Och på så sätt kommer vi kunna ta fram $f(z)$ från $f'(z)$. En annan viktig egenskap är att konvergensradien för $f(z)$:s potensserie och $f'(z)$:s potensserie är densamma. Anledningen till att vi väljer att studera just $f'(z)$ är för att:

$$f'(z) = 2\sin(z)\cos(z) = \sin(2z)$$

och vi känner ju redan till potensserien för $\sin(z)$! Att se detta är inte helt lätt men att kolla på derivator och primitiva funktioner är ibland ett avnändbart redskap i denna typen av uppgifter.

Lösning:

$$\begin{aligned} f'(z) &= \sin(2z) = \{\text{TU ger}\} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}(2z)^{2k+1} = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 2^{2k+1}}{(2k+1)!} z^{2k+1} \end{aligned}$$

Låt oss nu undersöka konvergensradien hos potensserien för $f'(z)$ genom att använda oss av kvotkriteriet:

$$c_k = \frac{(-1)^k 2^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad => \quad c_{k+1} = \frac{(-1)^{k+1} 2^{2k+3}}{(2k+3)!}$$

$$\frac{|c_{k+1}|}{|c_k|} = \frac{(-1)^{k+1} 2^{2k+3}}{(2k+3)!} \cdot \frac{\cancel{(2k+1)!}}{\cancel{(-1)^k 2^{2k+1}}} = \frac{(-1)\cdot 2^2}{(2k+2)(2k+3)} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0 = H$$

=> konvergensradien för $f'(z)$ är $R = \frac{1}{H} =$ "∞" enligt kvotkriteriet. Alltså måste även $f(z)$ ha konvergensradien $R =$ "∞".

Låt oss nu ha en disk $\bar{D}(0,r)$ där $r < R$. Enligt Sats 7.31 konvergerar då potensserien till $f'(z)$ likformigt på $\bar{D}(0,r)$. Alltså kommer vi kunna flytta in integrationstecknet när vi nu vill finna potensserien till $f(z)$:

$$
\begin{aligned}
f(z) = (\sin(z))^2 &= \int \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 2^{2k+1}}{(2k+1)!} z^{2k+1} \right) \mathrm{d}z = \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\int \frac{(-1)^k 2^{2k+1}}{(2k+1)!} z^{2k+1} \, \mathrm{d}z \right) = \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 2^{2k+1}}{(2k+1)!} \left(\int z^{2k+1} \, \mathrm{d}z \right) = \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 2^{2k+1}}{(2k+1)!} \frac{z^{2k+2}}{2k+2} = \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 2^{2k+1}}{(2k+2)!} z^{2k+2} = \{\text{Låt } m = k+1 <=> k = m-1\} \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1} 2^{2m-1}}{(2m)!} z^{2m}
\end{aligned}
$$

7.28

a)

$f(z) = \frac{1}{z}$ och vi vill hitta en potensserie kring punkten 1. Taylorutveckling ger

$$
\begin{aligned}
f(1) + \frac{f'(1)}{1!}(z-1) + \frac{f''(1)}{2!}(z-1)^2 + ... \\
1 - 1(z-1) + 2(z-1)^2 - .... \\
\implies \frac{1}{z} = \sum_{k \geq 1} (-1)^k (z-1)^k
\end{aligned}
$$

Konvergensradien hittas enkelt med rotkriteriet,

$$
|(-1)^k|^{\frac{1}{k}} = 1 \implies R = 1
$$

7.29

(a)

Vi har potensserien:

$$
\sum_{k \geq 1} \frac{z^k}{k^2}
$$

på $\bar{D}[0,1]$. Alltså är $f_k(z) = \frac{z^k}{k^2}$. När vi använder Weierstraß majorantsats vill vi hitta en summa som är mindre än beloppet av vår potensserie $\forall z \in \bar{D}[0,1]$ och $\forall k \geq 1$. Låt oss därför studera $|f_k(z)|$:

$$|f_k(z)| = \left|\frac{z^k}{k^2}\right| = \frac{|z^k|}{k^2} \leq \frac{1^k}{k^2} = \frac{1}{k^2} \quad \forall k \geq 1$$

Fortsatt vet vi att:

$$\sum_{k\geq 1} \frac{1}{k^2}$$

konvergerar. Weierstraß majorantsats ger då att:

$$\sum_{k\geq 1} \frac{z^k}{k^2}$$

är likformigt konvergent på $\bar{D}[0,1]$.

VSV

(b)

Vi har potensserien:

$$\sum_{k\geq 0} \frac{1}{z^k} = \sum_{k\geq 1} \frac{1}{z^{k-1}}$$

på $M = \{z \in \mathbb{C} : |z| \geq 2\}$. Alltså är $f_k(z) = \frac{1}{z^{k-1}}$. Precis som i (a) vill vi nu hitta en summa som är mindre än beloppet av vår potensserie $\forall z \in M$ och $\forall k \geq 1$. Låt oss därför studera $|f_k(z)|$:

$$|f_k(z)| = \left|\frac{1}{z^{k-1}}\right| \leq \frac{1}{2^{k-1}} \quad \forall k \geq 1$$

Vi vet att:

$$\sum_{k\geq 1} \frac{1}{2^{k-1}}$$

konvergerar. Weierstraß majorantsats ger därför att:

$$\sum_{k\geq 0} \frac{1}{z^k}$$

konvergerar likformigt på M.

VSV

(c)

Vi har potensserien:

$$\sum_{k\geq 0} \frac{z^k}{z^k+1}$$

på $\bar{D}(0,r)$. Alltså är $f_k(z) = \frac{z^k}{z^k+1}$. Precis som i (a) och (b) vill vi nu hitta en summa som är mindre än beloppet av vår potensserie $\forall z \in \bar{D}(0,r)$ och $\forall k \geq 1$. Låt oss därför studera $|f_k(z)|$:

$$\begin{aligned}|f_k(z)| &= \left|\frac{z^k}{z^k+1}\right| = \\ &= \frac{|z^k|}{|z^k+1|}\end{aligned}$$

Vi vill nu skriva om $\frac{|z^k|}{|z^k+1|}$ mha omvända triangelolikheten (btw triangelolikheten är något av det viktigaste i denna kursen så vet du den inte redan så bör du verkligen lära dig den). Omvända triangelolikheten ger:

$$|z^k+1| \geq 1 - |z^k|$$

Observera att $1 - |z^k| > 0$ på $\bar{D}(0,r)$. Låt oss nu utnyttja denna olikhet i vårt uttryck för $|f_k(z)|$:

$$\begin{aligned}|f_k(z)| &\leq \frac{z^k}{1-|z^k|} \leq \{\text{Maximalt värde antas då } |z| = r \to 1\} \\ &\leq \frac{r^k}{1-r^k} = \\ &= \frac{r^k - 1 + 1}{1-r^k} = \\ &= -\frac{\cancel{1-r^k}}{\cancel{1-r^k}} + \frac{1}{1-r^k} = \\ &= -1 + \frac{1}{1-r^k} \leq \\ &\leq \frac{1}{1-r^k}\end{aligned}$$

Låt oss nu se på konstanten r som en variabel istället för ett talet $r \to 1$. Fortsatt studerar vi summan:

$$S = \sum_{k\geq 0} \frac{1}{1-r^k}$$

Vi vill ta reda på denna potensseries konvergensradie för att se om summan då $r \to 1$ konvergerar. Notera att denna potensserie är reell och därför kan vi använda oss av metoder från kursen Matematisk fördjupning (envariabelanalys för F+Tm kanske?):

Låt $a_k = \frac{1}{1-r^k}$ och $a_{k+1} = \frac{1}{1-r^{k+1}}$

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{\frac{1}{1-r^{k+1}}}{\frac{1}{1-r^k}} = \frac{1-r^k}{1-r^{k+1}}$$

$$H = \lim_{k\to\infty} \frac{1-r^k}{1-r^{k+1}} = 1$$

Alltså blir konvergensradien för summan S:

$$R = \frac{1}{H} = \frac{1}{1} = 1$$

Alltså konvergerar summan $S \forall r : -1 < r < 1$ men eftersom $r \geq 0$ enligt uppgiftsbeskrivningen konvergerar $S \forall r : 0 \leq r < 1$.

Nu vet vi att att $|f_k(z)|$ hos vår komplexa potensserie alltså är mindre än $\frac{1}{1-r^k}$ där r är ett tal sådant att $r \to 1$. Summan S som $\frac{1}{1-r^k}$ motsvarar konvergerar alltså när $r \to 1$. Weierstraß majorantsats säger då att potensserien:

$$\sum_{k\geq 0} \frac{z^k}{z^k+1}$$

konvergerar likformigt på $\bar{D}(0,r), \quad 0 \leq r < 1$.

VSV

[Disclaimer: Kolla gärna med David så att denna lösning faktiskt stämmer]

7.30

Fixera $z \in \mathbb{C}$, låt $r > |z|$ samt inför variabeln ω så att $|\omega| \geq r$

$$S = \sum_{k\geq 0} \left(\frac{z}{\omega}\right)^k$$

Vi vet att

$$\left|\frac{z}{\omega}\right| \leq \left|\frac{z}{\omega_{\min}}\right| = \left|\frac{z}{r}\right| < 1$$

Vilket betyder att $\sum_{k\geq 0} \left|\frac{z}{r}\right|^k$ är en konvergent geometrisk serie. Alltså gäller från Weierstrass Majorantsats att S är likformigt konvergent.

7.33

Quick fire solutions!

b)

Rotkriteriet,

$$|k^n|^{\frac{1}{k}} = |k^{\frac{1}{k}}|^n \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 1^n = 1 \implies R = 1$$

c)

Tänk själv, fackulteter växer snabbt som satan! Så exponentiella fackulteter måste vara helt galna O.o

Men okej, anta först $|z| < 1$ då gäller att $|z|^{k!} \leq |z|^k \, \forall k > 0$ och $\sum_{k\geq 0} |z|^k$ konvergerar så då måste alltså även $\sum_{k\geq 0} |z|^{k!}$ konvergera för $|z| < 1$. ($k = 0$ - termen spelar inte så stor roll. Det viktiga är vad som händer i svansarna").

För $|z| \geq 1$ gäller att $|z|^{k!} \geq |z|^k$ och $\sum_{k\geq 0} |z|^k$ divergerar så då måste alltså även $\sum_{k\geq 0} |z|^{k!}$ divergera för $|z| \geq 1$.

Kort o gott, $R = 1$.

b)

Rotkriteriet,

$$|\frac{1}{k^k}|^{\frac{1}{k}} = |\frac{1}{k}| \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0 \implies R = \infty$$

Tänk själv, nämnaren växer superfort! Så vi kan ha jättestora z och ändå konvergera!

Kapitel 8.

8.1

b)

Det är en geometrisk serie, den konvergerar absolut när

$$\left|\frac{1}{z-3}\right| < 1 \implies |z-3| > 1$$

Medan likformig konvergens inte kan uppnås "i gränsvärden" dvs vi måste ha något $r > 1$ och $R < \infty$. Alltså likformig konvergens uppnås om

$$\left|\frac{1}{z-3}\right| < r < 1 \implies |z-3| > r$$

. Samt med oändlighetsbegränsningen, så exakt: $1 < r < |z-3| \leq R < \infty$.

`Kommentar:` För att förstå detta kan man tänka på vad likformig konvergens innebär, jo att funktionen närmar sig något lika mycket överallt samtidigt. Medan absolut/punktformig konvergens bara uttalar sig om att varje punkt närmar sig något men inte nödvändigtvis alla samtidigt. T.ex kan en den divergera precis precis i gränsvärdet och alltså växa sig oändlig där trots att alla punkter var för sig konvergerar. För likformig konvergens behöver vi därför kolla på en sluten och begränsad mängd (kompakt mängd)... Inser hur svårt det här är att förklara i text så här finns en bra **länk** med animationer!)

8.17

I den här uppgiften vill vi skriva om funktionerna så att de blir en geometrisk serie och därmed också som en Laurentserie. För mer info om geometriska serier rekommenderas: `https://sv.wikipedia.org/wiki/Geometrisk_summa`. Men låt oss först börja med att skriva om funktionen genom att göra en variabelsubstitution:

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z+1)} = \{\text{Låt } w = z-1\} = \frac{1}{w(w+2)}$$

Det finns nu <u>två annaluser</u> f kan skrivas som en konvergent Laurentserie i: $D(1{,}2)^x$ och $A(1{,}2{,}\infty)$. Observera att facit endast ger svaret för en av dessa annalusar.

<u>I annalusen $D(1{,}2)^x$:</u>

I den här annalusen är $|w| < 2$ (ty $|z-1| < 2$). Detta är viktigt när vi sedan ska skriva om det som en geometrisk summa. Fortsatt är:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{w+2} &= \frac{1}{2}\frac{1}{1-\left(-\frac{w}{2}\right)} = \left\{\left|-\frac{w}{2}\right| < 1 => \text{vi kan skriva om detta som en geometrisk serie}^8\right\} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{0}^{\infty}\left(-\frac{w}{2}\right)^k = \\
&= \frac{1}{2}\sum_{0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2^k}2^k = \\
&= \sum_{0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2^{k+1}}w^k
\end{aligned}$$

Alltså blir:

[8] För att en geometrisk serie ska konvergera måste detta vara < 1. För mer info se: `https://sv.wikipedia.org/wiki/Geometrisk_summa`.

$$
\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{w}\sum_{0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2^{k+1}}w^k = \\
&= \sum_{0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2^{k+1}}w^{k-1} = \{w = z-1\} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2^{k+1}}(z-1)^{k-1} = \{\text{Låt } m = k-1 <=> k = m+1\} \\
&= \sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m+1}}{2^{m+2}}(z-1)^m
\end{aligned}
$$

Denna Laurentserie är konvergent i $\left|-\frac{w}{2}\right| < 1 <=> |w| < 2$. Och uttryckt i z blir detta $|z-1| < 2$.

<u>I annalusen $A(1{,}2{,}\infty)$:</u>

I den här annalusen är $|w| > 1$ (ty $|z-1| > 1$). Detta är viktigt när vi sedan ska skriva om det som en geometrisk summa. Fortsatt är:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{w+2} = \left\{\text{Förläng med } \frac{1}{w}\right\} &= \frac{\frac{1}{w}\cdot 1}{\frac{1}{w}(2+w)} = \\
&= \frac{1}{w}\frac{1}{\frac{2}{w}+1} = \\
&= \frac{1}{2}\frac{1}{1-\left(-\frac{2}{w}\right)} = \left\{\left|-\frac{2}{w}\right| < 1 => \text{vi kan skriva om detta som en geometrisk serie}^{9}\right\} \\
&= \frac{1}{w}\sum_{0}^{\infty}\left(-\frac{2}{w}\right)^k = \\
&= \frac{1}{w}\sum_{0}^{\infty}(-1)^k 2^k w^{-k} = \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k 2^k w^{-k-1} = \{\text{Låt } m = -k-1 <=> k = -m-1\} \\
&= \sum_{m=-\infty}^{-1}(-1)^{-m-1}2^{-m-1}w^m = \{(-1)^{m-1} <=> (-1)^{-m-1}\} \\
&= \sum_{-\infty}^{-1}\frac{(-1)^{m-1}}{2^{m+1}}w^m
\end{aligned}
$$

[9] För att en geometrisk serie ska konvergera måste detta vara < 1. För mer info se: `https://sv.wikipedia.org/wiki/Geometrisk_summa`.

Alltså blir:

$$
\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{w}\sum_{-\infty}^{-1}\frac{(-1)^{m-1}}{2^{m+1}}w^m = \\
&= \sum_{m=-\infty}^{-1}\frac{(-1)^{m-1}}{w^{2m+1}}w^{m-1} = \{\text{Låt } n = m-1 <=> m = n+1\} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{-2}\frac{(-1)^n}{2^{n+2}}w^n = \{w = z-1\} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{-2}\frac{(-1)^n}{2^{n+2}}(z-1)^n
\end{aligned}
$$

Denna Laurentserie är konvergent i $\left|-\frac{2}{w}\right| < 1 => |w| > 2$. uttryckt i z blir detta $|z-1| > 2$.

8.19

Vi har funktionen:

$$f(z) = \frac{z-2}{z+1}$$

I den här uppgiften kommer vi att behöva tänka lite utanför boxen när det kommer till summor generellt. Vi kommer inte utnyttja geometriska serier eller taylorutvecklingar. Vi kommer att göra detta genom att göra en smart omskrivning. Nyckeln till att vi kan göra den här omskriningen är att vi ska hitta LSU:n centrerad i $z = -1$. Generellt kan en sådan serie kunna skrivas som:

$$\sum_{-\infty}^{\infty} c_k(z-(-1))^k = \sum_{-\infty}^{\infty} c_k(z+1)^k$$

Men vi har ju redan $z+1$ i nämnaren i $f(z)$. Vad jag menar med detta kommer att bli tydligare när vi faktiskt gör omskrivninen:

$$
\begin{aligned}
f(z) &= \frac{z-2}{z+1} = \\
&= \frac{z+1-3}{z+1} = \\
&= \frac{\cancel{z+1}}{\cancel{z+1}} - 3\frac{1}{z+1} = \\
&= 1 - 3\frac{1}{z+1} = \\
&= 1 \cdot (z+1)^0 - 3(z+1)^{-1} = \\
&= \sum_{-\infty}^{\infty} c_k (z+1)^k
\end{aligned}
$$

där $c_k = 0$ när $k \neq -1{,}0$ och $c_{-1} = -3$ och $c_0 = 1$.

8.23

Visa att $\frac{z-1}{z-2} = \sum_{k \geq 0} \frac{1}{(z-1)^k}$, när $|z-1| > 1$

Först kom ihåg den geometriska serien $\frac{1}{1-\omega} = \sum_{k \geq 0} \omega^k$, $\omega < 1$. (se **här**)

Nu är målet bara att skriva om vårt uttryck på den geometriska formen.

$$
\frac{z-1}{z-2} = \frac{z-1}{z-1-1} = \frac{1}{1 - \frac{1}{z-1}}
$$

Om $\left|\frac{1}{z-1}\right| < 1 \iff |z-1| > 1$ kan vi nu använda den geometriska serien,

$$
\frac{1}{1 - \frac{1}{z-1}} = \sum_{k \geq 0} \left(\frac{1}{z-1}\right)^k = \sum_{k \geq 0} \frac{1}{(z-1)^k}
$$

8.26

Hitta Laurentserien till $\sec(z) = \frac{1}{\cos(z)}$ centrerad i origo. Bered er på magi!

Först och främst, kom ihåg MacLaurinserien för $\cos(z)$.

$$
\begin{aligned}
\cos(z) &= \sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \mathcal{O}(z^8) \\
\implies \frac{1}{\cos(z)} &= \frac{1}{1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \mathcal{O}(z^8)} = \frac{1}{1 - \left(\frac{z^2}{2!} - \frac{z^4}{4!} + \frac{z^6}{6!} + \mathcal{O}(z^8)\right)} \\
&\quad \text{\% Kom ihåg den geometriska serien, förutsatt att } \left| \frac{z^2}{2!} - \frac{z^4}{4!} + \frac{z^6}{6!} + \mathcal{O}(z^8) \right| < 1 \\
&\quad \text{\% } \quad \text{, vilket är sant för små } z \\
&= \sum_{k\geq 0} \left(\frac{z^2}{2!} - \frac{z^4}{4!} + \frac{z^6}{6!} + \mathcal{O}(z^8) \right)^k \\
&= \underbrace{(1)}_{k=0} + \underbrace{\left(\frac{z^2}{2!} - \frac{z^4}{4!} + \frac{z^6}{6!} + \mathcal{O}(z^8) \right)}_{k=1} + \underbrace{\left(\frac{z^4}{(2!)^2} - 2\frac{z^6}{4!2!} + \mathcal{O}(z^8) \right)}_{k=2} + \underbrace{\left(\frac{z^6}{(2!)^3} + \mathcal{O}(z^8) \right)}_{k=3} \\
&= 1 + \frac{z^2}{2!} + \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{4!} \right) z^4 + \left(\frac{1}{2^3} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{6!} \right) z^6 + \mathcal{O}(z^8) \\
&= 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{5}{4!} z^4 + \frac{61}{6!} z^6 + \ldots
\end{aligned}
$$

`Kommentar:`
1. Man får själv välja hur många termer man väljer att utveckla, som ni märker blir det mer jobb ju fler man har. Jag valde att ha med t.om z^6 termer, medan facit bara har z^4.
2. När man utvecklar paranteserna^k får man tänka till så man inte jobbar i onödan, så fort man ser att exponenten kommer bli $\geq$ det i $\mathcal{O}$ kan man bara direkt låta det vara en del av $\mathcal{O}$. Å andra sidan gäller det att vara vaksam på hur många k man behöver utveckla för. Hade man i det här exemplet inte haft med $k = 3$ så hade inte z^6 termen blivit korrekt. Det beror helt enkelt på hur många termer man vill skriva ut i sin serie.

8.27

f är holo i z_0, $f(z_0) = 0$ och $f'(z_0) \neq 0$

<u>Påstående</u>:

f har multipliitet 1 i z_0.

Eftersom f är holo i z_0 och $f(z_0) = 0$ ger *Klassifikation av nollställen* att $f(z) = (z - z_0)^m g(z)$ där g är holo i z_0, $g(z_0) \neq 0$ och $m \geq 1, \quad m \in \mathbb{N}$.

$(f(z) \not\equiv 0$ eftersom $f'(z_0) \neq 0)$

$$f'(z) = \begin{cases} m(z-z_0)^{m-1}g(z) + (z-z_0)^m g'(z), & m > 1 \\ g(z) + (z-z_0)^m g'(z), & m = 1 \end{cases}$$

Om $m > 1$:

$$=> f(z_0) = m(\cancel{z_0} - \cancel{z_0})^{m-1}g(z_0) + (\cancel{z_0} - \cancel{z_0})^m g(z_0) = 0$$

$=> m \not> 1$

Om $m = 1$:

$$f(z_0) = g(z_0) + (\cancel{z_0} - \cancel{z_0})^m g(z_0) = g(z_0) \neq 0$$

$=>$ nollstället z_0 måste ha multiplicitet $m = 1$.

VSV

8.28

I den här uppgiften vill vi använda oss av teorin som bevisade i uppgift 8.27.

(a)

Vi har funktionen $f(z) = e^z - 1, \quad z_0 = 2k\pi i, \quad k \in \mathbb{Z}$

$$f(z) = e^z - 1 = \{\text{Eulers formel ger}\} = (\cos(-iz) + i\sin(-iz))) - 1$$

$$\begin{aligned} => & f(z_0) = 0 \\ & f'(z) = e^z = \cos(-iz) + i\sin(-iz) \\ & f'(z_0) = \underbrace{\cos(2\pi k)}_{=1} + i\underbrace{\sin(2\pi k)}_{=0} = 1 \neq 1 \end{aligned}$$

Resultatet från uppgift 8.27 ger att multipliciteten $m = 1$.

(b)

Vi har funktionen $f(z) = \sin(z) - \tan(z), \quad z_0 = 0$

$$
\begin{aligned}
&f(z_0) = 0\\
&f'(z) = \cos(z) - (1 + \tan^2(z)\\
&f'(z_0) = \underbrace{\cos(z_0)}_{=1} - 1 - \underbrace{\tan^2(z_0)}_{=0} = 0\\
&f''(z) = -\sin(z) - 2\tan(z)(1 + \tan^2(z)) = -\sin(z) - 2\tan(z) - 2\tan^3(z)\\
&f''(z_0) = -\underbrace{\sin(z_0)}_{=0} - 2\underbrace{\tan(z_0)}_{=0}(1 + \tan^2(z_0)) = 0\\
&f'''(z) = -\cos(z) - 2(1 + \tan(z)) - 6\tan^2(z)(1 + \tan^2(z)) = -3 \neq 0
\end{aligned}
$$

Resultatet från uppgift 8.27 ger att multipliciteten $m = 3$.

8.32

Hitta LSU:er till $f(z) = \frac{3}{(1-z)(z+2}$ i områdena $|z| < 1$, $1 < |z| < 2$ och $z > |2|$.

Det viktiga att ta med sig från en sån här uppgift är att samma funktion ibland Laurentserieutvecklas på olika sätt beroende på vilket område den ska konvergera!

Från partialbråksuppdelning får vi

$$
\begin{aligned}
f(z) = \frac{3}{(1-z)(z+2} &= \frac{A}{1-z} + \frac{B}{z+2}\\
3 &= 2A + B + z(B - A) \implies A = B = 1\\
f(z) &= \underbrace{\frac{1}{1-z}}_{S_i(z)} + \underbrace{\frac{1}{z+2}}_{S_j(z)}
\end{aligned}
$$

Målet är nu att hitta Laurentserierna S_i och S_j för de i de tre olika områdena.
<u>**|z|<1** :</u>

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{1-z} &= \sum_{k\geq 0} z^k = S_1(z)\\
\frac{1}{z+2} &= \frac{1}{2(1-\left(-\frac{z}{2}\right))} = \frac{1}{2}\sum_{k\geq 0}\left(-\frac{z}{2}\right)^k = S_2(z)\\
f(z) &= S_1(z) + S_2(z)
\end{aligned}
$$

`Obs:` Geometrisk serie okej när $|z/2| < 1$ vilket stämmer sålänge $|z| < 2$, vilket det är i fallet $|z| < 1$.

<u>**1<|z|<2** :</u>
Notera först att $S_2(z)$ gäller även för detta intervall (se kommentar ovan). Däremot gäller $S_1(z)$ endast när $|z| < 1$ så den behöver här bytas ut.

$$\frac{1}{1-z} = \frac{1}{-z(1-\frac{1}{z})} = -\frac{1}{z}\sum_{k\geq 0}\frac{1}{z^k} = \sum_{k\geq 0}\frac{1}{z^{k+1}} = \sum_{k\geq 1}\frac{1}{z^k} = S_3(z)$$
$$f(z) = S_3(z) + S_2(z)$$

`Obs:` Geometrisk serie okej här eftersom $|z| > 1 \iff \left|\frac{1}{z}\right| < 1$.

|z|>2 :

`Obs:` $S_3(z)$ gäller då $|z| > 1$ och gäller alltså även på detta område. Det gör dock inte $S_2(z)$, som därför nu behöver bytas ut.

$$\frac{1}{z+2} = \frac{1}{z(1-(-\frac{2}{z})} = \frac{1}{z}\sum_{k\geq 0}\left(-\frac{2}{z}\right)^k = \sum_{k\geq 0}\frac{(-2)^k}{z^{k+1}} = \sum_{k\geq 1}\frac{(-2)^{k-1}}{z^k} = S_4(z)$$
$$f(z) = S_3(z) + S_4(z)$$

Alltså slutligen:

$$f(z) = \begin{cases} S_1(z) + S_2(z), & |z| < 1 \\ S_3(z) + S_2(z), & 1 < |z| < 2 \\ S_3(z) + S_4(z), & |z| > 2 \end{cases}$$

8.33

Anta $f(z)$ har precis ett nollställe a med multiplicitet 1 i området omslutet av cirkeln γ. Visa att

$$a = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{zf'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z$$

Från sats vet vi att $f(z) = (z-a)g(z)$ där $g(z)$ är holo och från antagandet är nollskild i cirkelskivan.

Derivera båda led ger med produktregeln $f'(z) = g(z) + (z-a)g'(z)$.

$$I = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{zf'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{z(g(z)+(z-a)g'(z))}{(z-a)g(z)}\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{z\left(1+\frac{(z-a)g'(z)}{g(z)}\right)}{(z-a)}\,\mathrm{d}z$$

Låt nu täljaren vara $h(z) = z\left(1+\frac{(z-a)g'(z)}{g(z)}\right)$, som alltså är en holo funktion (eftersom $g(z)$ är nollskild) i området.

Skriv om igen så kommer vi få ett uttryck vi känner väl igen,

$$I = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{h(z)}{(z-a)}\,\mathrm{d}z$$

Enligt Cauchys Integralformel är alltså $I = h(a) = a\left(1 + \frac{(a-a)g'(z)}{g(z)}\right) = a$.

$\square$

Kapitel 9.

9.1

Eftersom f har ett nollställe med multiplicitet m i a kan vi skriva, $f(z) = (z-a)^m g(z)$ där $g(a) \neq 0$.

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{(z-a)^m g(z)} = \frac{\frac{1}{g(z)}}{(z-a)^m}$$

där $\frac{1}{g}$ är holo i något område kring a eftersom $g(a) \neq 0$

Enligt sats om klassifikation av singulariteter har $\frac{1}{f}$ därför en pol av multiplicitet m i a.

9.2

b)

$$f = z\cot(z) = \frac{z\cos(z)}{\sin(z)}$$

Vilket innebär att vi har poler då $\sin(z) = 0 \implies z = k\pi$ där $k \in \mathbb{Z}$. Dessa poler kommer vara av första ordningen, eftersom $(\sin(z))'|_{z=k\pi} \neq 0$.

Dock kommer vi ihåg det gamla standardgränsvärdet: $\lim_{z\to 0} \frac{\sin(z)}{z} = 1$. Vi kommer alltså få en hävbar singularitet för $z = 0$.

Formellt skrivet,

$$\lim_{z\to k\pi} \left|\frac{z\cos(z)}{\sin(z)}\right| = \begin{cases} \lim_{z\to 0}\left(\frac{z}{\sin(z)}\right)\cos(0) = 1\,, & k = 0 \\ \infty\,, & k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\} \end{cases}$$

Därav har vi poler av multiplicitet 1 då $z \in \{\pi k : k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}\}$ och en hävbar singularitet då $z = 0$.

9.5

$\gamma = C[0{,}3]$, beräkna $I = \int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z$ för följande f.

Allmänt noterar vi att γ är en enkel, sluten, glatt och positivt orienterad kurva. Så Residysatsen är good to go!

b)

$f(z) = z^3 \cos(\frac{3}{z})$ är holo på $D(0{,}3)^*$. Vi har en isolerad singuläritet i $z = 0$, och vill därför använda Residysatsen.

$$I = 2\pi i \operatorname{Res}_0(f(z))$$

För att hitta $\operatorname{Res}_0(f(z))$ kommer vi ihåg Maclaurinutvecklingen av $\cos(z)$, (Kom ihåg att $\operatorname{Res}_0(f(z)) = c_{-1}$ där $f(z) = \sum_k c_k z^k$!)

$$\begin{aligned}
\cos(z) &= 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \mathcal{O}(z^6) \\
\cos(\frac{3}{z}) &= 1 - \frac{9}{2z^2} + \frac{3^4}{4!z^4} + \mathcal{O}(\frac{1}{z^6}) \\
z^3\cos(\frac{3}{z}) &= z^3 - \frac{9}{2}z + \frac{3^4}{4!z} + \mathcal{O}(\frac{1}{z^3}) \\
\implies \operatorname{Res}_0(f(z)) &= \frac{3^4}{4!} = \frac{3^3}{8} = \frac{27}{8} \\
\implies I = 2\pi i \frac{27}{8} &= \frac{27}{4}\pi i
\end{aligned}$$

c)

$$f(z) = \frac{1}{(z+4)(z^2+1)} = \frac{\frac{1}{(z+4)}}{(z+i)(z-i)}$$

Vi har här alltså två isolerade singulariteter i $\pm i$. Men vi har fortfarande vår goda vän Residysatsen till hjälp!

$$I = 2\pi i \sum_j \operatorname{Res}_j f(z) = 2\pi i(\operatorname{Res}_{+i} f(z) + \operatorname{Res}_{-i} f(z))$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}_{+i} f(z) &= \operatorname{Res}_{+i} \frac{\frac{1}{(z+4)}}{(z+i)(z-i)} = \operatorname{Res}_{+i} \frac{\frac{1}{(z+4)(z+i)}}{(z-i)} \\
&\overset{(*)}{=} \left(\frac{1}{(z+4)(z+i)} \right) \Bigg|_{z=i} = \frac{1}{(4+i)2i} \\
\operatorname{Res}_{-i} f(z) &= \operatorname{Res}_{-i} \frac{\frac{1}{(z+4)}}{(z+i)(z-i)} = \operatorname{Res}_{-i} \frac{\frac{1}{(z+4)(z-i)}}{(z+i)} \\
&\overset{(*)}{=} \left(\frac{1}{(z+4)(z-i)} \right) \Bigg|_{z=-i} = \frac{-1}{(4-i)2i} \\
\implies I &= 2\pi i \left(\frac{1}{(4+i)2i} - \frac{1}{(4-i)2i} \right) = -\frac{2i}{17}\pi
\end{aligned}$$

`Kommentar:`
($*$) Här används ”räkneregel 3” (eller ”c”) för residyer.
(Om $f(z) = \frac{g(z)}{(z-a)^{m+1}}$ där $m \geq 0$ och g holo, så är $\mathrm{Res}_a(f) = \frac{g^m(a)}{m!}$)
I det här specifika fallet så är dock $m = 0$ och det här blir exakt som Cauchys integralformel! Jämför med uppgift 5.18 för att se hur vi löste en liknande uppgift med CIF istället för Residysatsen.

9.7

(d)

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}_0\left(e^{1-1/z}\right) &= \mathrm{Res}_0\left(e \cdot e^{-1/z}\right) = \{\text{Räkneregel a) för residyer ger}\} \\
&= e\,\mathrm{Res}_0\left(e^{-1/z}\right) = \\
&= e \cdot c_{-1}
\end{aligned}$$

Låt oss nu finna c_{-1} genom att använda oss av TU:

$$\begin{aligned}
e^{-1/z} = \{\text{TU ger}\} &= \sum_0^\infty \frac{\left(-\frac{1}{z}\right)^k}{k!} = \\
&= \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k}{k!} z^{-k} = \{\text{Låt } m = -k\} \\
&= \sum_{m=-\infty}^{0} \frac{(-1)^m}{(-m)!} z^m
\end{aligned}$$

Från detta kan vi nu ta fram att:

$$c_{-1} = \frac{(-1)^{-1}}{(-(-1))!} = \frac{-1}{1!} = -1$$

$$=> \mathrm{Res}_0\left(e^{1-1/z}\right) = -e$$

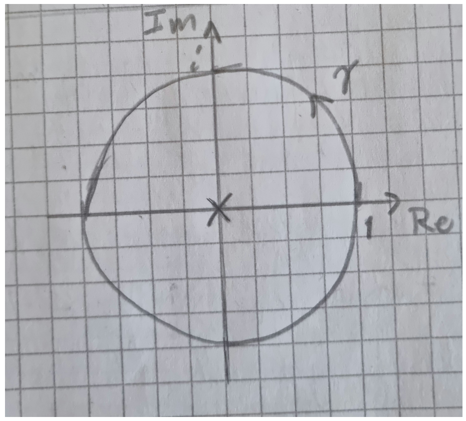
9.8

(d)

Vi har integralen:

$$\int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z^2 \sin z}$$

där $\gamma = C[0,1]$. Alltså är $f(z) = \frac{1}{z^2 \sin z}$. $f(z)$ har singulariteter i $k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$ men endast singulariteten $z = 0 \in \text{int}(\gamma)$ (se bild). Vi är ju endast intresserade av singulariteter som är innanför γ eftersom det endast är de som påverkar integralen. Singulariteten $z = 0$ är en pol av ordning 3. Per definition är $\text{Res}_a f(z) = c_{-1}$ för LSU:n till $f(z)$ centrerad i $z = a$.



Låt oss finna c_{-1} för LSU av $f(z)$ centrerar i $z = 0$:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sin z} = \{\text{TU ger}\} &= \frac{1}{z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \mathcal{O}(z^7)} = \\
&= \frac{1}{z}\frac{1}{1 - \left(\frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} + \mathcal{O}(z^6)\right)} = \{\text{geometrisk serie ger}\} \\
&= \frac{1}{z}\sum_0^\infty \left(\frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} + \mathcal{O}(z^6)\right)^k = \{\text{vi skriver ut summan}\}^{10} \\
&= \frac{1}{z}\left(\underbrace{1}_{k=0} + \underbrace{\left(\frac{z^2}{3!} - \frac{z^4}{5!} + \mathcal{O}(z^6)\right)}_{k=1} + \underbrace{\left(\frac{z^4}{36} + \mathcal{O}(z^6)\right)}_{k=2} + \underbrace{\mathcal{O}(z^6)}_{k>2}\right) = \\
&= \frac{1}{z}\left(1 + \frac{z^2}{6} + \frac{7}{360}z^4 + \mathcal{O}(z^6)\right) = \\
&= \frac{1}{z} + \frac{z}{6} + \frac{7}{360}z^3 + \mathcal{O}(z^5)
\end{aligned}$$

[10]Här gäller det att kunna vara bekväm med Big O notationen för att förstå vad som händer. Om man inte är det redan bör man läsa på om den. Men kortfattat fungerar det som att när vi utvecklar våra termer $\left(\frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} + \mathcal{O}(z^6)\right)^k$ där k är heltal från 0 till ∞ är vårt $\mathcal{O}(z^6)$ lite som vår 'soptunna' där alla termer som har en grad $\geq$\{potensen i Big O notationen\} hamnar. I detta fall hamnar alla termer som är ≥ 6 i vår soptunna $\mathcal{O}(z^6)$. Alltså struntar vi att skriva ut dessa termer och skriver bara ut termer av en grad < 6. Vi kan göra detta eftersom vi (i detta fall) endast är intresserad av termen då $k = -1$ för att finna c_{-1} och att inte skriva ut alla termer påverkar i detta fall inte $k = -1$.

Detta ger oss att:

$$
\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{z^2 \sin z} = \\
&= \frac{1}{z^2}\left(\frac{1}{z} + \frac{z}{6} + \frac{7}{360}z^3 + \mathcal{O}(z^5)\right) = \\
&= z^{-3} + \frac{1}{6}z^{-1} + \frac{7}{360}z + \mathcal{O}(z^3)
\end{aligned}
$$

Faktoridentifiering ger att $c_{-1} = \frac{1}{6}$, vilket i sin tur ger att:

$$\mathrm{Res}_0\left(\frac{1}{z^2 \sin z}\right) = \frac{1}{6}$$

RS ger nu att:

$$\int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z^2 \sin z} = 2\pi i \, \mathrm{Res}_0 \, f(z) = 2\pi i \cdot \frac{1}{6} = \frac{\pi i}{3}$$

OBS! MYCKET VIKTIGT! Observera att residyer i isolerade singulariteter endast räknas en gång, även fast det skulle vara en pol av en högre ordning än 1 likt i denna uppgift.

9.9

Väljer att visa Cauchys integralformel för allmänna derivator eftersom de andra är specialfall av den. f holo i ett område G , γ är pos.orienterad, enkelsluten, styckevis glatt och $\omega \in \mathrm{Int}(\gamma)$.

$$f^{(k)}(\omega) = \frac{k!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-\omega)^{k+1}}\,\mathrm{d}z$$

Så först börjar vi att definera $g(z) = \frac{f(z)}{(z-\omega)^{k+1}}$ och noterar att denna är holo i $D(\omega,R)^*$ och har en isolerad singularitet (en pol) av ordning k+1 i ω. Från residysatsen gäller då att,

$$\int_\gamma g(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i \sum_j \mathrm{Res}_j(g(z)) = 2\pi i \, \mathrm{Res}_\omega(g).$$

Enligt räkneregel för residyer gäller att

$$\mathrm{Res}_\omega(g) = \mathrm{Res}_\omega \frac{f(z)}{(z-\omega)^{k+1}} = \frac{f^{(k)}(\omega)}{k!}$$

Sammanslaget är alltså

$$\int_\gamma g(z)\,\mathrm{d}z = \int_\gamma \frac{f(z)}{(z-\omega)^{k+1}}\,\mathrm{d}z = 2\pi i\frac{f^{(k)}(\omega)}{k!}$$
$$f^{(k)}(\omega) = \frac{k!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-\omega)^{k+1}}\,\mathrm{d}z$$

□

9.11

Metod 1: (Definitioner för holomorfa funktioners derivata)

Eftersom f är holo i $D(a,R)^x$ där a är en isolerad singularitet till f måste även f' vara holo i $D(a,R)^x$. f' har då per definition också en isolerad singularitet i a.

VSV[11]

Metod 2: (Laurentserie)

Eftersom f är holo i $D(a,R)^x$ kan f skrivas som en Laurentserie:

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_k(z-a)^k$$

Kom ihåg att vår Laurentserie också konvergerar likformigt på $D(a,R)^x$.[12] Att vår Laurentserie konvergerar likformigt är viktigt eftersom det gör det möjligt att flytta in derivationstecknet innanför summationstecknet (dvs vi kan derivera termvis). Detta blir viktigt snart.

Vi har tre möjliga situationer: den isolerade singulariteten a kan varar:

1. hävbar
2. en pol
3. eller väsentlig

Låt oss undersöka varje situation för sig:

<u>1. Om a är hävbar</u>:

Sats 4.3R ger att $c_k = 0 \quad \forall k < 0$

[11] Den här lösningen är lite klurig att förstå och det gäller att man har koll på sin teori när man använder sig av den- Därför finns det även en ytterligare metod som kanske är lite mer 'straight forward' men som däremot är längre.

[12] Detta är en egenskap som gäller generellt för Laurentserier. Viktigt är dock att komma ihåg att c_0-termen deriveras bort. Alltså måste man sätta $c_0 = 0$ i derivatans Laurentserie.

$$
\begin{aligned}
f'(z) &= \left(\sum_{-\infty}^{\infty} c_k(z-a)^k\right)' = \\
&= \left(\sum_{0}^{\infty} c_k(z-a)^k\right)' = \\
&= \sum_{0}^{\infty} \left(c_k(z-a)^k\right)' = \{\text{Observera att } c_0\text{-termen dervieras bort}\} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} k c_k (z-a)^{k-1} = \{\text{Låt } m = k-1 <=> k = m+1\} \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} (m+1) c_m (z-a)^m
\end{aligned}
$$

$=> c_{-1} = 0$ och $c_m = 0 \quad \forall m < -1$.

Sats 4.3R ger nu att även f' har en hävbar singularitet i a.

2. Om a är en pol:

Sats 4.1/4.2R ger:

$$
f(z) = \frac{g(z)}{(z-a)^m}
$$

där $g(a)$ är holo i $D(a,R)$ och $m \geq 1$. Produktregeln ger nu att:

$$
=> f'(z) = \frac{g'(z)}{(z-a)^m} + g(z)(-m)(z-a)^{-m-1} = \frac{g'(z)}{(z-a)^m} - \frac{mg(z)}{(z-a)^{m+1}}
$$

Sats 4.1/4.2R ger nu att $f'(z)$ måste ha en pol i a.

3. Om a är väsentlig:

Sats 4.3R säger att $\exists$ oändligt många $k < 0$ sådana att $c_k \neq 0$.

$$
\begin{aligned}
f'(z) &= \left(\sum_{-\infty}^{\infty} c_k(z-a)^k\right)' = \\
&= \sum_{-\infty}^{\infty} \left(c_k(z-a)^k\right)' = \{\text{Glöm ej att derivera bort } c_0\text{-termen}\} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} kc_k(z-a)^{k-1} + \sum_{k=-\infty}^{-1} kc_k(z-a)^{k-1} = \{\text{Låt } m = k-1 <=> k = m+1\} \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} (m+1)c_m(z-a)^m + \sum_{m=-\infty}^{-2} (m+1)c_m(z-a)^m
\end{aligned}
$$

Det $\exists$ nu oändligt många $m < -1$ sådana att $c_m \neq 0$. Sats 4.3R ger då att f' har en väsentlig singularitet i a

1, 2 och 3 ger då att vi har bevisat påståendet.

VSV

9.15

Vi vill beräkna den reella integralen:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^2}$$

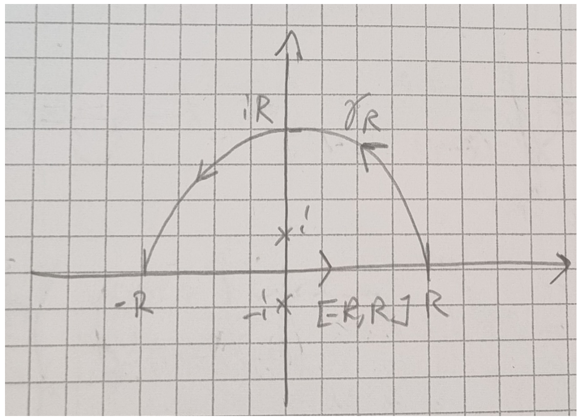
genom att utvidhga integralen till en komplex sådan. Först kan vi konstatera att:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^2} = \lim_{R\to\infty} \int_{[-R,R]} \frac{\mathrm{d}z}{(1+z^2)^2}$$

Nu vill vi kunna utnyttja vad vi har lärt oss från residykalkyl men då behöver vi en sluten kurva att jobba med. Låt därför $\sigma_R = \gamma_R \cup [-R,R]$ där γ_R är halvcirkeln på det positiva imaginära halvplanet med radien R och $R \to \infty$. Viktigt att notera är att:

$$\frac{1}{(1+z^2)^2} = \frac{1}{(z+i)^2(z-i)^2)}$$

Alltså har $f(z) = \frac{1}{(1+z^2)^2}$ två st isolerade singulariter i form av polerna $z = i$ och $z = -i$. Polen $z = i$ är innanför kurvan σ_R, vilket vi kommer att vilja utnyttja.



Om vi studerar integralen av $f(z)$ över σ_R får vi följande uttryck:

$$\int_{\sigma_R} \frac{\mathrm{d}z}{(1+z^2)^2} = \underbrace{\int_{[-R,R]} \frac{\mathrm{d}z}{(1+z^2)^2}}_{\text{integralen vi är intresserad av}} + \underbrace{\int_{\gamma_R} \frac{\mathrm{d}z}{(1+z^2)^2}}_{=(*)}$$

Det är jobbigt att beräkna $(*)$ alltså kommer vi försöka visa att $(*) \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$. [13] *Triangelolikheten för integraler*[14] ger att:

$$\left|\int_{\gamma_R} \frac{\mathrm{d}z}{(1+z^2)^2}\right| \leq \max_{z\in\gamma_R}\left|\frac{1}{(1+z^2)^2}\right| |\pi R| = \max_{z\in\gamma_R} \frac{1}{|z^4+2z^2+1|}\pi R \tag{2}$$

Vi vill nu utnyttja *Omvända triangelolikheten*[15] för att göra så att vi inte har alla z-termer under ett och samma abslutbeloppstecken. Genom att använda *Omvända triangelolikheten* ger därför att:

$$\begin{aligned}
\left|z^4+2z^2+1\right| &\geq |z|^4 - |2z^2+1| \geq \{\textit{Omvända triangleolikheten} \text{ igen}\} \\
&\geq |z|^4 - (2|z|^2 - 1) = \\
&= |z|^4 - 2|z|^2 + 1 = \{\text{På } \gamma_R \text{ är } |z| = R\}^{16} \\
&= R^4 - 2R^2 + 1
\end{aligned}$$

[13] Detta är förörvigt den generella metoden för att lösa den här typen av uppgifter. Först visar man att $(*) \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$. Sedan beräknar man integralen över σ_R mha residykalkyl och därmed har vi också värdet på den reella integralen vi är intresserade av.

[14] *Triangelolikheten för integraler* är mycket användbar när man löser denna typ av uppgifter.

[15] Även *Omvända triangelolikheten* är väldigt användbar för denna typ av uppgifter.

[16] Kom ihåg att γ_R är en halvcirkel med radien R och att $|z|$ besrkiver längden av det komplexa talet från origo, dvs radien hos halvcirkeln

Om man sätter in något som är större i nämnaren blir värdet av bråket mindre. Insättning i (2) ger därför olikheten:

$$\max_{z \in \gamma_R} \frac{1}{|z^4 + 2z^2 + 1|} \pi R \leq \max_{z \in \gamma_R} \frac{\pi R}{R^4 - 2R^2 + 1} \xrightarrow[R \to \infty]{} 0$$

Nu har därför också visar att:

$$\int_{\sigma_R} \frac{\mathrm{d}z}{(1+z^2)^2} = \int_{[-R,R]} \frac{\mathrm{d}z}{(1+z^2)^2}, \quad R \to \infty$$

Låt oss beräkna integralen över σ_R:

$$\begin{aligned} \int_{\sigma_R} \frac{\mathrm{d}z}{(1+z^2)^2} &= \int_{\sigma_R} \frac{\mathrm{d}z}{(z+i)^2(z-i)^2)} = \{\text{RS ger}\} \\ &= 2\pi i \operatorname{Res}_i \left(\frac{\frac{1}{(z+i)^2}}{(z-i)^2} \right) = \end{aligned}$$

$\frac{1}{(z+i)^2}$ är holo i $D(i,r)$ $(m = 1)$ => Räkneregel c) för residyer ger:

$$\begin{aligned} \int_{\sigma_R} \frac{\mathrm{d}z}{(1+z^2)^2} &= 2\pi i \left(\frac{\left(\frac{1}{(z+i)^2}\right)'}{1!} \right) \Bigg|_{z=i} = \{\text{derivering ger}\} \\ &= 2\pi i \left(-2(z+i)^{-3}\right)\big|_{z=i} = \\ &= 2\pi i \left(\frac{-2}{(2i)^3} \right) = \\ &= 2\pi i \left(\frac{-2}{8i^2 i} \right) = \\ &= 2\pi i \left(\frac{2}{8i} \right) = \\ &= 2\pi i \cdot \frac{2}{8i} = \\ &= \frac{\pi}{2} \in \mathbb{R} \qquad \Rightarrow \text{rimligt} \end{aligned}$$

Alltså är:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^2} = \frac{\pi}{2}$$

Notera att svaret är reellt. Reella integraler måste ha reella värden. Om man får ett svar som inte är reellt på en sådan här uppgift kan man vara säker på att man har gjort fel någonstans.

9.17

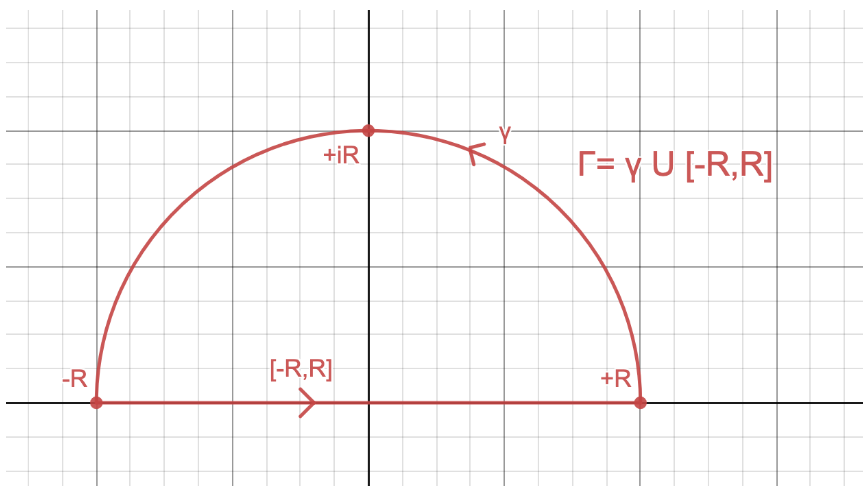
Beräkna $I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{1+x^4}\,\mathrm{d}x$

Notera först att i det komplexa talplanet så är,

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{1+x^4}\,\mathrm{d}x = \mathrm{Re}\left(\int_{[R,R]} \frac{e^{iz}}{1+z^4}\,\mathrm{d}z\right)$$

Eftersom vi vet att $\mathrm{Re}(e^{iz}) = \cos(z)$

Jämför denna med uppgift 5.18! Vi börjar på samma sätt här, med att skapa en kurva $\Gamma = \gamma \cup [-R,R]$ enligt figuren, dvs halvmånen som består av halvcirkeln med radie R och linjesegmentet mellan $-R$ och R. Av konvention låter vi kurvan ha positiv orientering (moturs).



Figur 5: Γ i det komplexa talplanet

$$\underbrace{\int_\Gamma \frac{e^{iz}}{1+z^4}\,\mathrm{d}z}_{\text{Residysatsen } (**)} = \underbrace{\int_{[R,R]} \frac{e^{iz}}{1+z^4}\,\mathrm{d}z}_{\text{Re() söks}} + \underbrace{\int_\gamma \frac{e^{iz}}{1+z^4}\,\mathrm{d}z}_{\overset{(*)}{\to} 0}$$

$(*)$ Använd triangelolikheten för integraler,

$$\left|\int_\gamma \frac{e^{iz}}{z^4+1}\,\mathrm{d}z\right| \leq \max_{z\in\gamma}\left|\frac{e^{iz}}{z^4+1}\right|\pi R \leq \max_{z\in\gamma} \frac{1}{|z|^4-1}\pi R = \frac{\pi R}{R^4-1} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$$

`Kommentar:` Först omvända triangelolikheten, kom ihåg ett bråk är som störst när nämnaren är som minst. Sen gäller på γ att $|z| = R$ eftersom R är radien på halvcirkeln.

Vi har nu alltså att när $R \to \infty$ är

$$I = \mathrm{Re}\left(\int_{[R,R]} \frac{e^{iz}}{1+z^4}\,\mathrm{d}z\right) = \mathrm{Re}\left(\int_{\Gamma} \frac{e^{iz}}{1+z^4}\,\mathrm{d}z\right)$$

(∗∗) Residysatsen,
Vi har totalt fyra poler, varav två ($\omega_1 = e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{-1+i}{\sqrt{2}}$ och $\omega_2 = e^{i\frac{3\pi}{4}} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$) ligger i området innanför Γ. (Se 5.18 för mer detaljer).

Enligt residysatsen är alltså

$$\int_{\Gamma} \frac{e^{iz}}{1+z^4}\,\mathrm{d}z = 2\pi i\left(\mathrm{Res}_{\omega_1}\frac{e^{iz}}{1+z^4} + \mathrm{Res}_{\omega_2}\frac{e^{iz}}{1+z^4}\right)$$

% Obs: Enkla poler, använd räkneregel "4" (eller "d") }

$$\mathrm{Res}_{\omega_1}\frac{e^{iz}}{1+z^4} = \frac{e^{i\omega_1}}{4\omega_1^3} = \frac{e^{i\frac{1+i}{\sqrt{2}}}}{4e^{i\frac{3\pi}{4}}} = \frac{e^{\frac{-1}{\sqrt{2}}}}{4}e^{i\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{3\pi}{4}\right)} = \mathrm{Re}(\mathrm{Res}_{\omega_2}) + i\frac{e^{\frac{-1}{\sqrt{2}}}}{4}\sin\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{3\pi}{4}\right)$$

$$\mathrm{Res}_{\omega_2}\frac{e^{iz}}{1+z^4} = \frac{e^{i\omega_2}}{4\omega_2^3} = \frac{e^{i\frac{-1+i}{\sqrt{2}}}}{4e^{i\frac{9\pi}{4}}} = \frac{e^{i\frac{-1+i}{\sqrt{2}}}}{4\underbrace{e^{i\frac{12\pi}{4}}}_{=-1}e^{-i\frac{3\pi}{4}}} = -\frac{e^{\frac{-1}{\sqrt{2}}}}{4}e^{i\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}+\frac{3\pi}{4}\right)} = -\frac{e^{\frac{-1}{\sqrt{2}}}}{4}e^{-i\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{3\pi}{4}\right)}$$

$$= -\mathrm{Re}(\mathrm{Res}_{\omega_2}) + i\frac{e^{\frac{-1}{\sqrt{2}}}}{4}\sin\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{3\pi}{4}\right)$$

% Obs: Vi kommer inte behöva ta hänsyn till vad Realdelen av residyerna är eftersom vi i residysatsen multiplicerar med i och vi bara söker realdelen av uttrycket integralen!

$$\begin{aligned}
I &= \mathrm{Re}\left(\int_{\Gamma}\frac{e^{iz}}{1+z^4}\,\mathrm{d}z\right)\\
&= \mathrm{Re}\left(2\pi i\left(\mathrm{Re}(\mathrm{Res}_{\omega_2}) + i\frac{e^{\frac{-1}{\sqrt{2}}}}{4}\sin\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{3\pi}{4}\right) - \mathrm{Re}(\mathrm{Res}_{\omega_2}) + i\frac{e^{\frac{-1}{\sqrt{2}}}}{4}\sin\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{3\pi}{4}\right)\right)\right)\\
&= -2\pi\left(\frac{e^{\frac{-1}{\sqrt{2}}}}{4}\sin\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{3\pi}{4}\right) + \frac{e^{\frac{-1}{\sqrt{2}}}}{4}\sin\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{3\pi}{4}\right)\right)\\
&= -\pi e^{\frac{-1}{\sqrt{2}}}\sin\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{3\pi}{4}\right) = \pi e^{\frac{-1}{\sqrt{2}}}\sin\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right).
\end{aligned}$$

9.18

f är hel, $a \neq b \in \mathbb{C}$ och $|a|,|b| < R$.

$$\int_{C[0,R]} \frac{f(z)}{(z-a)(z-b)}\,\mathrm{d}z = 2\pi i \left(\mathrm{Res}_a \frac{f(z)}{(z-a)(z-b)} + \mathrm{Res}_b \frac{f(z)}{(z-a)(z-b)}\right)$$
$$= 2\pi i \left(\mathrm{Res}_a \frac{\frac{f(z)}{(z-b)}}{(z-a)} + \mathrm{Res}_b \frac{\frac{f(z)}{(z-a)}}{(z-b)}\right) = 2\pi i \left(\frac{f(z)}{(z-b)}\bigg|_{z=a} + \frac{f(z)}{(z-a)}\bigg|_{z=b}\right)$$
$$= 2\pi i \left(\frac{f(a)}{(a-b)} + \frac{f(b)}{(b-a)}\right) = 2\pi i \left(\frac{f(a)-f(b)}{(a-b)}\right)$$

Kom ihåg Liouvilles sats, om f hel och begränsad så måste den vara konstant.

Alltså anta, $|f(z)| < M < \infty$.

Triangelolikheten för integraler ger,

$$\left|\int_{C[0,R]} \frac{f(z)}{(z-a)(z-b)}\,\mathrm{d}z\right| \leq \max_{z\in C[0,R]} \left|\frac{f(z)}{(z-a)(z-b)}\right| 2\pi R < \frac{M2\pi R}{(R-|a|)(R-|b|)} \underset{R\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

`Kommentar:` $|(z-a)(z-b)| = |z-a||z-b| \geq (|z|-|a|)(|z|-|b|)$ enligt omvända triangelolikheten och på cirkeln är $|z| = R$. Kom ihåg att vi vill ha så liten nämnare som möjöigt för att hitta en övre gräns på ett bråk.

Vi har nu att när $R \to \infty$ så är,

$$\int_{C[0,R]} \frac{f(z)}{(z-a)(z-b)}\,\mathrm{d}z = 2\pi i \left(\frac{f(a)-f(b)}{(a-b)}\right) = 0$$
$$\implies f(a) = f(b)$$

Alltså när $R \to \infty$ kollar vi på hela $\mathbb{C}$ och då är $f(a) = f(b)$ men eftersom a och b är godtyckligt valda punkter måste det betyda att f är konstant.

□

9.21

c)

Vi har en funktion $h(z) = z^4 - 5z + 1$ och söker hur många nollställen den har i Annulusen $A(0,1,2)$ ($\{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2\}$.

Definera cirkelkurvorna, $\gamma_1 = C[0,1] = \{|z| = 1\}$ och $\gamma_2 = C[0,2] = \{|z| = 2\}$. Antalet nollställen i $A(0,1,2)$ kommer alltså vara (antalet nollställen i $\mathrm{Int}(\gamma_2)$) - (antalet nollställen i $\mathrm{Int}(\gamma_1)$).
Tips: Rita en figur!

Till vår hjälp har vi Rouchés sats. Vi vill hitta funktioner f och g som uppfyller Rouché så att $h(z) = f(z) + g(z)$

antalet nollställen i Int(γ_2) :
Välj, $f_2 = z^4$ och $g_2 = -5z + 1$. På γ_2 gäller då att

$$\begin{aligned}
&|f_2(z)| = |z|^4 = 16 \\
&|g_2(z)| = |-5z + 1| \leq |5z| + |1| = 11 \\
&\quad \Longrightarrow |f_2(z)| > |g_2(z)| \ \forall z \in \gamma_2
\end{aligned}$$

Enligt Rouché har $h(z)$ då lika många nollställen som f_2 i Int(γ_2), dvs **4 st**. (obs: vi räknar med multiplicitet)

antalet nollställen i Int(γ_1) :
Välj, $f_1 = -5z + 1$ och $g_1 = z^4$. På γ_1 gäller då att

$$\begin{aligned}
&|f_1(z)| = |-5z + 1| \geq |5z| - |1| = 4 \\
&|g_1(z)| = |z|^4 = 1 \\
&\quad \Longrightarrow |f_1(z)| > |g_1(z)| \ \forall z \in \gamma_1
\end{aligned}$$

Enligt Rouché har $h(z)$ då lika många nollställen som f_1 i Int(γ_1), dvs **1 st**.
($-5z + 1 = 0$ då $z = \frac{1}{5}$ vilket ligger i Int(γ_1))

`Allmän obs:` från villkoret i Rouché inser vi också att h inte kan ha några nollställen på γ_i eftersom $|h| = |f + g| \geq |f| - |g| \neq 0$ ty $|f| > |g|$. Vi behöver alltså inte tänka på några eventuella sådana nollställen ifall vi kan använda Rouchés sats!

Totalt har $h(z)$ alltså $\mathbf{4} - \mathbf{1} = \mathbf{3}$ st nollställen i annulusen $A(0{,}1{,}2)$

Residy-pdf

Rs.4nr.1

Påstående:

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a + b\sin(t)} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - b^2}}$$

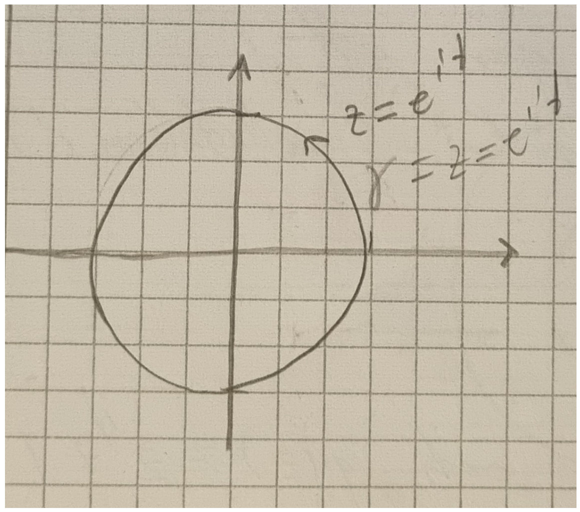
där $a{,}b \in \mathbb{R}: \quad a > b \geq 0$.

Strategi:

I den här uppgiften ska vi lösa en reell integral genom att utnyttja vad vi har lärt oss från komplex analys. För trigonometriska funktioner är det ofta användbart att skriva använda sig av variabelsubstitutionen $z = e^{it}, \quad t \in [0{,}2\pi]$ för att göra om integralen till en komplex integral. Anledningen till att detta är smidigt är delvis eftersom $\sin(t) = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}$ och $\cos(t) = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}$. Men det är också smidigt eftersom då blir $z = e^{it}$ en parametrisering av enhetscirkeln, vilken blir kurvan vi kommer integrera över. På så sätt kan vi slutligen applicera RS (residysatsen). Notera att om värdet hos integralen efter applikation av RS inte blir reellt, då har man gjort något fel. Detta eftersom integralen vi började med var reell och en reell integral måste ge reella värden.

Lösning:

Låt $z = e^{it} = \gamma(t), \quad t \in [0{,}2\pi]$.



Detta ger att:

$$\begin{aligned}\sin(t) &= \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} = \\ &= \frac{z}{2i} - \frac{1}{2iz} = \\ &= \frac{z^2 - 1}{2iz}\end{aligned}$$

Vi behöver nu finna ett samband mellan $\mathrm{d}z$ och $\mathrm{d}t$. Vi vet att:

$$\begin{aligned}\mathrm{d}z &= \gamma'(t)\,\mathrm{d}t = \{\gamma'(t) = ie^{it}\} \\ &= ie^{it}\,\mathrm{d}t = \\ &= iz\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

$$=> \ \mathrm{d}t = -\frac{i}{z}\,\mathrm{d}z$$

$$
\begin{aligned}
=> \frac{\mathrm{d}t}{a+b\sin(t)} &= -\frac{i}{z}\cdot\frac{\mathrm{d}z}{a+b\frac{b(z^2-1)}{2iz}} = \\
&= -\frac{i}{za+\frac{b(z^2-1)}{2i}}\,\mathrm{d}z = \\
&= -\frac{i}{\frac{2iza+b(z^2-1)}{2i}}\,\mathrm{d}z = \\
&= \frac{2}{2iza+b(z^2-1)}\,\mathrm{d}z = \\
&= \frac{2}{bz^2+2iaz-b}\,\mathrm{d}z
\end{aligned}
$$

Vi vill nu hitta singulariteter genom att hitta nollställen till nämaren i det rationella uttrycket ovan. När vi har hittat dessa singulariteter kommer vi kunna se vilka som är $\mathrm{int}(\gamma)$ och därifrån applicera RS:

$$
\begin{aligned}
&bz^2+2iaz-b=0 \\
&z^2+\frac{2ia}{b}z-1=0 \qquad \{\text{pq-formeln ger}\} \\
&\qquad z = -\frac{ia}{b}\pm\sqrt{\left(\frac{ia}{b}\right)^2+1} = \\
&\qquad\; = -\frac{ia}{b}\pm\sqrt{1-\frac{a^2}{b^2}} = \\
&\qquad\; = -\frac{ia}{b}\pm\frac{1}{b}\sqrt{b^2-a^2}
\end{aligned}
$$

=> Vi har poler i:

$$
\begin{aligned}
z_1 &= -\frac{ia}{b}+\frac{1}{b}\sqrt{b^2-a^2} = \{a>b\} \\
&= -\frac{ia}{b}+\frac{i}{b}\sqrt{a^2-b^2}
\end{aligned}
$$

och

$$
\begin{aligned}
z_2 &= -\frac{ia}{b}-\frac{1}{b}\sqrt{b^2-a^2} = \{a>b\} \\
&= -\frac{ia}{b}-\frac{i}{b}\sqrt{a^2-b^2}
\end{aligned}
$$

Vi vill nu ta reda på vilka av dessa poler som tillhör int(γ). Detta kan vara lite svårt att se huruvida z_1 och z_2 tillhör int(γ) men låt oss börja med att komma ihåg att $a > b \geq 0$. Alltså måste:

$$\left|\frac{ia}{b}\right| > 1$$

Från detta kan vi direkt konstatera att $z_2 \notin \text{int}(\gamma)$ eftersom om vi 'tar mer minus' till $-\frac{ia}{b}$ hamnar vi bara längre bort från int(γ).

När det kommer till z_1 tycker iallafall jag det är betydligt svårare att visa detta algebraiskt. Om någon har en bättre förklaring än den nedan får man gärna redigera detta (skulle tro att man kan visa detta relativt lätt genom flervariabelanalys). Men min förklaring, vilken inte är särskilt rigorös, börjar med att vi gör en ytterligare omskrivning för att se om den tillhör int(γ) eller inte:

$$z_1 = -\frac{ia}{b} + \frac{i}{b}\sqrt{a^2 - b^2} = \frac{i}{b}\left(-a + \sqrt{a^2 - b^2}\right)$$

Om man nu leker runt med detta i desmos via länken `https://www.desmos.com/calculator/jwemiyg5fv` kan man se att $z_1 \in \text{int}(\gamma)$.

Låt oss nu återgå till essensen av uppgiften. Låt:

$$f(z) = \frac{2}{bz^2 + 2iaz - b} = \frac{2}{b(z - z_1)(z - z_2)}$$

f är holo i $\mathbb{C}$ förutom i de isolerade singulariteterna z_1 och z_2. Låt oss nu undersöka residyn i z_1:

$$\text{Res}_{z_1} f(z) = \text{Res}_{z_1}\left(\frac{\frac{z}{b(z-z_2)}}{z - z_1}\right)$$

Observera nu att $\frac{2}{z-z_2}$ är holo i en omgivning till z_1 ($m = 0$). Alltså ger Räkneregel c) för residyer att:

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Res}_{z_1} f(z) &= \frac{\frac{2}{b(z_1-z_2)}}{0!} = \\
&= \frac{2}{b\left(\underbrace{-\frac{i\cancel{a}}{b}+\frac{i}{b}\sqrt{a^2-b^2}}_{=z_1} - \left(\underbrace{-\frac{i\cancel{a}}{b}-\frac{i}{b}\sqrt{a^2-b^2}}_{=z_2}\right)\right)} = \\
&= \frac{2}{\cancel{b}\left(\frac{i}{\cancel{b}}\sqrt{a^2-b^2}+\frac{i}{\cancel{b}}\sqrt{a^2-b^2}\right)} = \\
&= \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}i\sqrt{a^2-b^2}} = \\
&= \frac{1}{i\sqrt{a^2-b^2}}
\end{aligned}
$$

Nu kan vi sätta in detta i integralen från början:

$$
\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}t}{a+b\sin(t)} &= \int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \{\text{RS ger}\} \\
&= 2\pi i \operatorname{Res}_{z_1} f(z) = \\
&= 2\pi i \frac{1}{i\sqrt{a^2-b^2}} = \\
&= \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-b^2}} \in \mathbb{R} \quad \text{=> rimligt}
\end{aligned}
$$

Därmed stämmer påståendet.

VSV

Fourier-pdf

Fs.8nr.1

(b)

Från uppgiftsbeskrivningen får vi att $\sigma = \frac{1}{2}$ och att:

$$
f_1(t) = \begin{cases} 0, & |t| \geq \sigma = \frac{1}{2} \\ 1, & |t| < \sigma = \frac{1}{2} \end{cases}
$$

Samt får vi från exempel 6 att:

$$f_2(t) = \begin{cases} 0, & |t| \geq 1 \\ 1-t, & 0 < t < 1 \\ 1+t, & -1 < t < 0 \end{cases}$$

och att $f_2(t)$ har fouriertransformen:

$$\hat{f}_2(x) = \frac{2}{x^2}\left(1 - \cos\left(\frac{1}{2}x\right)\right)$$

Låt oss nu studera fouriertransformen av $f_1(t)$:

$$\begin{aligned}
\hat{f}_1(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-ixt}\,\mathrm{d}t = \\
&= \int_{-1/2}^{1/2} e^{-ixt}\,\mathrm{d}t = \\
&= \left[\frac{e^{-ixt}}{-ixt}\right]_{-1/2}^{1/2} = \\
&= \frac{e^{-\frac{1}{2}xi}}{-ix} - \frac{e^{\frac{1}{2}xi}}{-ix} = \\
&= -\frac{1}{x}\left(\frac{e^{-\frac{1}{2}xi} - e^{\frac{1}{2}xi}}{i}\right) = \\
&= \frac{2}{x}\left(\frac{e^{\frac{1}{2}xi} - e^{-\frac{1}{2}xi}}{2i}\right) = \\
&= \frac{2}{x}\sin\left(\frac{x}{2}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hat{f}_1(x)\hat{f}_1(x) &= \frac{2}{x}\sin\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \frac{2}{x}\sin\left(\frac{x}{2}\right) = \\
&= \frac{4}{x^2}\sin^2\left(\frac{x}{2}\right) = \left\{\sin^2(\varphi) = \frac{1-\cos(\varphi)}{2}\right\} \\
&= \frac{2}{x^2}\frac{1-\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{2} = \\
&= \hat{f}_2(x)
\end{aligned}$$

Sats 2.4F säger att:

$$\hat{f}_1(x)\hat{f}_1(x) = \widehat{f_1 * f_1}$$
$$=> \widehat{f_1 * f_1} = \hat{f}_2$$

Lemma ger slutligen att:

$$f_1 * f_1 = f_2$$

VSV

Fs.8nr.2

I den här uppgiften vill vi använda oss av variabelsubstitution för att bevisa att:

Påstående: $f * g = g * f$

Bevis:

$$f * g = \int_{-\infty}^{\infty} f(r)g(t-r)\,\mathrm{d}r$$

Låt nu $p = t - r =>\ \mathrm{d}p = -\,\mathrm{d}r$ och från detta kan vi ta fram våra nya integrationsgränser:

"$p(\infty) = t - \infty = -\infty$" och
"$p(-\infty) = t - (-\infty) = \infty$"

Slutligen innebär det också att $r = t - p$. Insättning ger då att:

$$\begin{aligned} f * g &= \int_{\infty}^{-\infty} f(t-p)g(p)(-1)\,\mathrm{d}p = \{\text{Flippa integrationsgränserna}\} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t-p)g(p)\,\mathrm{d}p = \\ &= g * f \end{aligned}$$

Alltså stämmer påståendet.

VSB

Fs.8nr.4

Den här uppgiften är riktigt tuff men stay strong soldier!

Strategi:

Vi vill först identifiera at vi har att göra med en faltning. När vi har identifierat detta vill vi studera FT:n av $f * f$ sedan använda oss av *Sats 2.4F* som säger att: $\widehat{f * f} = \hat{f}\hat{f}$. Sedan vill vi beräkna $\hat{f}$ för att ta reda på vad $\widehat{f * f} = \hat{f}\hat{f}$ är. Därifrån kommer vi utnyttja inversionformeln för FT:s för att beräkna integralen vi är intresserad av.

Lösning:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+s^2} \frac{1}{1+(s-t)^2} \, \mathrm{d}s = \left\{(s-t)^2 = (t-s)^2\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+s^2} \frac{1}{1+(t-s)^2} \, \mathrm{d}s$$

Låt nu $f(t) := \frac{1}{1+t^2} \Rightarrow f(t-s) = \frac{1}{1+(t-s)^2}$. Alltså får vi att:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+s^2} \frac{1}{1+(s-t)^2} \, \mathrm{d}s = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) f(t-s) \, \mathrm{d}s = f * f(t)$$

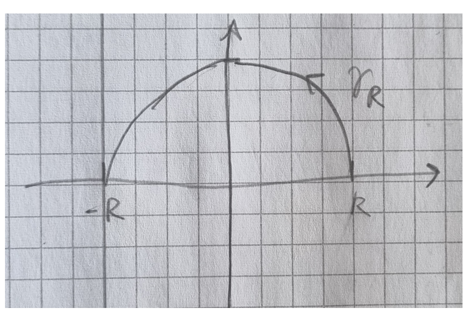
Nu vill vi studera FT:n av $f * f$. Och enligt *Sats 2.4F* är $\widehat{f * f} = \hat{f}\hat{f}$. Låt oss därför beräkna $\hat{f}$:

$$\hat{f} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+s^2} e^{-ixs} \, \mathrm{d}s$$

Vi vill nu utvidga integralen till en komplex integral så att vi senare kan applicera vad vi lärt oss om residykalkyl på den. Dvs:

$$\hat{f} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+s^2} e^{-ixs} \, \mathrm{d}s = \lim_{R \to \infty} \int_{[-R,R]} \frac{e^{-ixz}}{1+z^2} \, \mathrm{d}z$$

och:



där $\gamma_R(t) := Re^{it}, \quad t \in [0,\pi]$ och $\sigma_R := [-R,R] \cup \gamma_R$. Alltså är σ_R en sluten kurva.

Nu blir det viktigt huruvida $x \leq 0$ eller $x \geq 0$. Anledningen varför detta är viktigt har att göra med e^{-ixz}, men det kommer vi se tydligare i beräkningarna nedan. Låt oss därför studera dessa två situtationer separat:

1. Anta först att $x \leq 0$:

Vi vet att:

$$\int_{\sigma_R} \frac{e^{-ixz}}{1+z^2}\,\mathrm{d}z = \int_{[-R,R]} \frac{e^{-ixz}}{1+z^2}\,\mathrm{d}z + \int_{\gamma_R} \frac{e^{-ixz}}{1+z^2}\,\mathrm{d}z$$

Låt oss nu använda oss av *Triangelolikheten för integraler* för att uppskatta integralen över γ_R. Triangelolikheten för integraler ger:

$$\left|\int_{\gamma_R} \frac{e^{-ixz}}{1+z^2}\,\mathrm{d}z\right| \leq \max_{z\in\gamma_R}\left|\frac{e^{-ixz}}{1+z^2}\,\mathrm{d}z\right|\pi R \tag{3}$$

Låt oss nu studera nämnaren:

$$\left|1+z^2\right| \geq \{\text{Omvända triangelolikheten ger}\} \geq |z|^2 - 1 = R^2 - 1 \text{ på } \gamma_R$$

Fortsatt kan vi uppskatta tälajren:

$$\begin{aligned}
\left|e^{ixz}\right| = \{\text{Låt } z = a+ib \text{ där } a,b \in \mathbb{R}\} &= \left|e^{ix(a+ib)}\right| = \\
&= \underbrace{\left|e^{ixa}\right|}_{=1}\left|e^{bx}\right| = \\
&= 1 \cdot e^{bx} \leq \\
&\leq 1 \qquad \text{eftersom } b \geq 0 \text{ och } x \leq 0
\end{aligned}$$

Det sista steget att ≤ 1 här är kanske inte helt uppenbart först. Men kom ihåg att vi arbetar på den övre halvan av det komplexa talplanet alltså är alla imaginärdelar $b \geq 0$. Och fortsatt är ju $x \leq 0$. Detta är anledningen varför det är vktigt att studera fallen $x \leq 0$ och $x \geq 0$ separat.

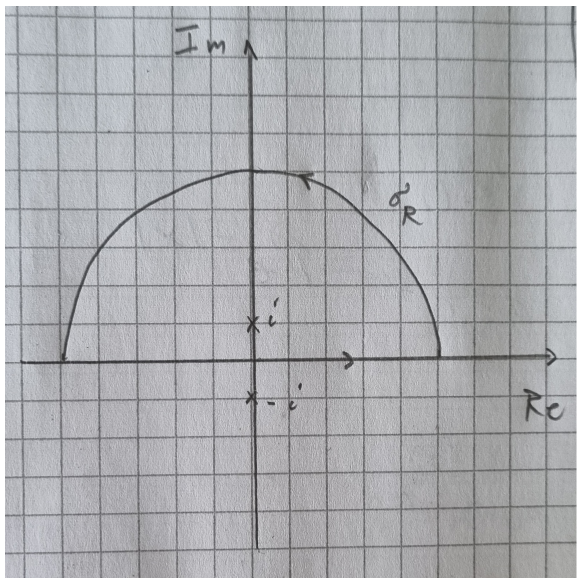
Insättning i (3) ger nu att:

$$\max_{z\in\gamma_R}\left|\frac{e^{-ixz}}{1+z^2}\,\mathrm{d}z\right|\pi R \leq \max_{z\in\gamma_R}\frac{\pi R}{R^2-1} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$$

Alltså är:

$$\int_{\sigma_R} \frac{e^{-ixz}}{1+z^2}\,\mathrm{d}z = \int_{[-R,R]} \frac{e^{-ixz}}{1+z^2}\,\mathrm{d}z = \hat{f}$$

Nu är det dags att beräkna residyn i de isolerade singulariteter som $\in \text{int}(\sigma_R)$. Vår funktion $\frac{e^{-ixz}}{1+z^2}$ har de isolerade singulariteterna $z = i \in \text{int}(\sigma_R)$ och $z = -i \notin \text{int}(\sigma_R)$:



Alltså vill vi beräkna residyn i $z = i$. Vi har en enkel singularitet i $z = i$. Alltså kan vi utnyttja räkneregel d):

$$\text{Res}_i \left(\frac{e^{-ixz}}{1+z^2}\right) = \{\text{Räkneregel d)}\} = \left(\frac{e^{-ixz}}{1+z^2}\right)\Bigg|_{z=i} = \frac{e^x}{2i}$$

$$=> \int_{\sigma_R} \frac{e^{-ixz}}{1+z^2}\,\mathrm{d}z = \{\text{RS ger}\} = \frac{e^x}{\cancel{2}\cancel{i}}\cancel{2}\pi\cancel{i} = \pi e^x$$

$$=> \hat{f} = \pi e^x \qquad \text{för } x \leq 0$$

2. Anta nu att $x \geq 0$:

Vi kommer inte behöva göra massa långa beräkningar likt beräkningarna från **1.**. Istället kan vi utnyttja lemmat som säger att för en reellvärd funktion f är $\hat{f}(-x) = \overline{\hat{f}(x)}$ kombinerat med resultatet från **1.**:

$$
\begin{aligned}
\hat{f}(x) &= \overline{\hat{f}(-x)} = \{\text{resultatet från } \mathbf{1.} \text{ ger}\} \\
&= \overline{\pi e^{-x}} = \\
&= \pi e^{-x}
\end{aligned}
$$

Således ger **1.** och **2.** att:

$$
=> \hat{f}(x) = \begin{cases} \pi e^{x}, & x \leq 0 \\ \pi e^{-x}, & x \geq 0 \end{cases} = \pi e^{-|x|}
$$

$$
=> \hat{f}\hat{f} = \pi^2 e^{-2|x|}
$$

Men pga Sats 2.4F som vi använde innan är ju $\widehat{f * f} = \hat{f}\hat{f}$. Alltså är också:

$$
\widehat{f * f} = \hat{f}\hat{f} = \pi^2 e^{-2|x|}
$$

Vi vill nu använda oss av inversionsformeln för FT:s som bl.a. säger att $\hat{\hat{g}}(t) = 2\pi g(-t)$. Alltså är:

$$
\begin{aligned}
2\pi f * f(-t) = \widehat{\widehat{f * f}} &= \pi^2 \widehat{e^{-2|x|}} = \{\text{Defintionen för FT ger}\} \\
&= \pi^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2|x|} e^{-itx} \, \mathrm{d}x = \\
&= \pi^2 \int_{0}^{\infty} e^{-2x-itx} \, \mathrm{d}x + \pi^2 \int_{-\infty}^{0} e^{2x-itx} \, \mathrm{d}x = \\
&= \pi^2 \lim_{R \to \infty} \left(\left[\frac{e^{-x(2+it)}}{-(2+it)} \right]_0^R + \left[\frac{e^{x(2-it)}}{2-it} \right]_{-R}^0 \right) = \\
&= \pi^2 \lim_{R \to \infty} \left(\underbrace{\frac{e^{-R(2+it)}}{-(2+it)}}_{\longrightarrow 0} - \frac{1}{-(2+it)} + \frac{1}{2-it} - \underbrace{\frac{e^{-R(2-it)}}{2-it}}_{\longrightarrow 0} \right) = \\
&= \pi^2 \left(\frac{1}{1+it} + \frac{1}{2-it} \right) = \\
&= \pi^2 \left(\frac{2 - \cancel{it} + 2 + \cancel{it}}{4+t^2} \right) = \\
&= \frac{4\pi^2}{4+t^2}
\end{aligned}
$$

$$=> f * f(-t) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{4\pi^2}{4+t^2} = \frac{2\pi}{4+t^2} = \frac{2\pi}{4+(-(-t))^2}$$

Observera minustecknet innanför argumentet (även fast det i detta fall inte sepalar någon roll)!!! Låt oss ta bort detta minustecknen genom att sätta in t istället för $-t$. Slutligen får vi på så sätt vårt svar:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+s^2} \frac{1}{1+(s-t)^2}\,\mathrm{d}s = f * f(t) &= \\ &= \frac{2\pi}{4+(-t)^2} = \\ &= \frac{2\pi}{4+t^2}\end{aligned}$$

Fs.13nr.3

I de här uppgifterna vill vi utnyttja Prop. 3.3F för att lösa differentialekvationen mha LT (laplacetransform).

(b)

Vi vill lösa begynnelsevärdesproblemet:

$$\begin{cases} u'' + u = g(t) \\ u(0) = 0 \\ u'(0) = 0 \end{cases}$$

där $g(t) = 0, \quad 0 < t < \pi$ och $g(t) = 1, \quad t > \pi$. Detta kan vi skriva om som att vi har funktionen:

$$g(t) = g_\pi(t) = \begin{cases} 0, & 0 < t < \pi \\ 1, & t > \pi \end{cases}$$

Vi vill notera att $g(t)$ är en funktion på formen för $f_a(t)$ eftersom det existerar en viktig egenskap hos LT av funktioner $f_a(t)$.[17] Från och med nu kommer vi därför för tydlighetens skull notera $g(t)$ som $g_\pi(t)$.

Låt oss nu laplacetransformerar vår differentialekvation:

[17]Detta är en generell notation för att beskriva en viss typ av funktion som ser ut som följande:

$$f_a(t) := \begin{cases} f(t-a), & t \geq a \\ 0, & 0 \leq t \leq a \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
&\widetilde{u''} = \{\text{Prop. 3.3F b) ger}\} \\
=&s\widetilde{(u')} - u'(0) = \{\text{Prop. 3.3F b) ger}\} \\
=&s(s\tilde{u} - u(0)) - u'(0) = \\
=&s^2\tilde{u}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\widetilde{g_\pi(t)} = \{\text{Prop. 3.3F e) ger}\} \\
=&e^{-\pi s}\tilde{1} = \left\{\text{Vi vet sedan tidigare att } \tilde{1} = \frac{1}{s}\right\} \\
=&\frac{e^{-\pi s}}{s}
\end{aligned}$$

Insättning i vår differentialekvation ger:

$$\begin{aligned}
s^2\tilde{u} + \tilde{u} &= \frac{e^{-\pi s}}{s} \\
\tilde{u}(s^2+1) &= \frac{e^{-\pi s}}{s} \\
\tilde{u} &= \frac{e^{-\pi s}}{s(s^2+1)} = e^{-\pi s}\left(\frac{1}{s(s^2+1)}\right)
\end{aligned}$$

Nu vill vi finna kända laplacetransformer som vi sedan kan använda inversformeln för LT för att ta fram u. För $e^{-\pi s}$ har vi e) i Prop. 3.3F som vi kan utnyttja. Men för $\frac{1}{s(s^2+1)}$ vet vi ingen känd transformation eller någon regel som kan få fram en känd transformation. Vi måste alltså skriva om $\frac{1}{s(s^2+1)}$. Att börja med partialbråksuppdelning är ofta ett bra försök:

$$\frac{1}{s(s^2+1)} = \frac{A}{s} + \frac{Bs+C}{s^2+1} = \frac{As^2 + A + Bs^2 + Cs}{s(s^2+1)}$$

Faktoridentifiering ger nu att:

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ A = 1 \\ C = 0 \end{cases} \quad => B = -1 \tag{4}$$

Alltså är:

$$
\begin{aligned}
\tilde{u} &= e^{-\pi s}\left(\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+1}\right) = \{\text{Dessa LT känner vi till}\} \\
&= e^{-\pi s}\left(\tilde{1} - \widetilde{\cos(t)}\right) = \\
&= e^{-\pi s}\tilde{1} - e^{-\pi s}\widetilde{\cos(t)} = \{\text{Låt } h(t) = \cos(t)\} \\
&= e^{-\pi s}\tilde{1} - e^{-\pi s}\widetilde{h(t)} = \{\text{Prop. 3.3F e) ger}\} \\
&= \widetilde{g_\pi(t)} - \widetilde{h_\pi(t)} = \{\text{Linjäritet hos LT ger}\} \\
&= \mathcal{L}\left(g_\pi(t) - h_\pi(t)\right)
\end{aligned}
$$

Observera att $\mathcal{L}(...)$ är en annan notation för LT. Inversformeln för LT ger nu att:

$$
\begin{aligned}
u(t) &= g_\pi(t) - h_\pi(t) = \\
&= \begin{cases} 0, & 0 < t < \pi \\ 1 - \cos(t-\pi), & t > \pi \end{cases} = \{\cos(t-\pi) = -\cos(t)\} \\
&= \begin{cases} 0, & 0 < t < \pi \\ 1 + \cos(t), & t > \pi \end{cases}
\end{aligned}
$$